ПРО СПЕКТР ВУЗЬКОГО ОПЕРАТОРА У ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ КЕТЕ

©*2008 р. Ірина КРАСІКОВА*

Запорізький державний університет

Редакція отримала статтю 24 вересня 2008 р.

Ми доводимо, що для довільної компактної підмножини K комплексної площини, яка містить нуль, у довільному просторі Кете E на безатомному просторі з σ-скінченною мірою з певного класу просторів (який, зокрема, містить переставляльно-інваріантні простори) існує вузький оператор $T \in \mathcal{L}(E)$, спектр якого збігається з K. Це – відповідь на запитання М. Л. Горбачука.

В роботі [5] А. Плічко і М. Попов ввели і розпочали дослідження поняття вузького оператора, як узагальнення поняття компактного оператора, який є визначеним на симетричному просторі функцій з абсолютно неперервною нормою на безатомному просторі зі скінченною мірою і діє у довільний банахів простір. Пізніше Дж. Флорес і К. Руіс проводили дослідження вузьких операторів для загальнішого випадку операторів, заданих на просторах Кете на безатомному просторі з σ-скінченною мірою [2]. У недавній роботі [4] О. Маслюченко, В. Михайлюк і М. Попов запропонували узагальнення поняття вузького оператора на векторні ґратки. Крім того, в цій роботі вперше з'явилися результати про вузькі оператори, задані на просторах без абсолютно неперервної норми, зокрема, на просторі L_∞ (формально означення вузького оператора не вимагає абсолютної неперервності норми, проте на цій властивості базувалися всі міркування у попередніх дослідженнях).

Добре відомо, що спектр компактного оператора є зліченною множиною, яка містить нуль, причому нуль може бути єдиною граничною

УДК 517.982

точкою спектру. Як нам сповістив М. М. Попов, на захисті його докторської дисертації у 2006 р. М. Л. Горбачук поставив запитання: яким може бути спектр вузького оператора? У цій замітці ми даємо відповідь на це запитання для деякого класу просторів Кете, які включають переставляльно-інваріантні простори функцій.

Оскільки векторні ґратки розглядаються лише над дійсним полем скалярів, найзагальніше розглядати це питання для випадку просторів Кете.

Нехай (Ω, Σ, μ) – простір з σ-скінченною безатомною додатною мірою. Банахів простір E класів еквівалентності вимірних функцій $x : \Omega \to \mathbb{C}$ називається *простором Кете,* якщо виконуються такі умови

(i) якщо $y \in E$ та $|x(\omega)| \le |y(\omega)|$ для майже всіх $\omega \in \Omega$, то $x \in E$ і $\|x\| \le \|y\|$;

(ii) $\chi(A) \in E$ для кожної множини $A \in \Sigma$ такої, що $\mu(A) < \infty$ (через $\chi(A)$ ми позначаємо характеристичну функцію множини $A \in \Sigma$).

Простір Кете E на (Ω, Σ, μ) називається *переставляльно-інваріантним*, якщо:

(iii) з умов $y \in E$ та $d_{|x|}(t) = d_{|y|}(t)$ для всіх $t \ge 0$ випливає, що $x \in E$ та $\|x\| = \|y\|$, де $d_z(t) = \mu\{\omega \in \Omega : z(\omega) > t\}$ – функція розподілу випадкової величини z;

(iv) з умов $x_n, x \in E,\ n = 1, 2, \dots$ та $0 \le x_n(\omega) \uparrow x(\omega)$ для майже всіх $\omega \in \Omega$ випливає, що $\|x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$;

(v) $L_\infty(\mu) \subseteq E \subseteq L_1(\mu)$, причому $\|x\|_1 \le \|x\|$ для всіх $x \in E$ та $\|x\| \le \|x\|_\infty$ для всіх $x \in L_\infty$.

Для банахових просторів X, Y символом $\mathcal{L}(E, X)$ ми позначаємо простір всіх лінійних неперервних операторів, які діють з X в Y. Крім того, ми користуємося скороченням $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. Запис $C = A \sqcup B$ означає, що $C = A \cup B$ і $A \cap B = \emptyset$.

Нехай E – простір Кете на (Ω, Σ, μ) і X – довільний банахів простір. Оператор $T \in \mathcal{L}(E, X)$ називається *вузьким*, якщо для будь-яких $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$ та $\varepsilon > 0$ існує $x \in E$ такий, що $x^2 = \chi(A)$, $\int\limits_\Omega x d\mu = 0$ і $\|Tx\| < \varepsilon$. Кожний компактний оператор є вузьким, але навпаки не вірно [5].

Теорема 1. *Нехай E – комплексний простір Кете на безатомно-*

му просторі (Ω, Σ, μ) *з* σ*-скінченною мірою. Нехай існує чисто атомна нескінченна* σ*-підалгебра*[1] $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$*, для якої оператор умовного математичного сподівання* $M(\cdot/\mathcal{F}) : E \to E$ *є обмеженим. Тоді для того, щоб множина* $K \subseteq \mathbb{C}$ *була спектром деякого вузького оператора* $T \in \mathcal{L}(E)$*, необхідно і достатньо, щоб* K *була компактною множиною, яка містить нуль.*

Доведення. Оскільки вузький оператор за означенням не може бути ізоморфізмом, нуль належить спектру довільного вузького оператора. Отже, оскільки спектр довільного оператора є компактною підмножиною $\mathbb{C}$, то необхідність умови є очевидною. Доведемо достатність. Нехай $0 \in K \subset \mathbb{C}$ – компактна підмножина. Виберемо в K щільну послідовність $(k_n)_{n=1}^{\infty}$. Нехай σ-алгебра $\mathcal{F}$ породжена диз'юнктною послідовністю $(\Omega_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів Σ додатної міри. Тоді $\Omega = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Для довільного $x \in E$ покладемо

$$(Tx)(\omega) = \frac{k_n}{\mu(\Omega_n)} \int\limits_{\Omega_n} x \, d\mu \tag{$*$}$$

для довільного $\omega \in \Omega_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Зауважимо, що

$$M(x/\mathcal{F})(\omega) = \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \int\limits_{\Omega_n} x \, d\mu$$

для всіх $\omega \in \Omega_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Тому, оскільки

$$\lambda = \sup\{|k| : \ k \in K\} < \infty,$$

то

$$|(Tx)(\omega)| \leq \lambda M(|x|/\mathcal{F})(\omega)$$

для всіх $\omega \in \Omega$, а отже, $Tx \in E$ та $\|Tx\| \leq \lambda \, \|M\| \|x\|$ для всіх $x \in E$. Таким чином, ми довели, що формула $(*)$ задає лінійний неперервний оператор на E.

Доведемо вузькість оператора T. Нехай тепер $A \in \Sigma$ - довільна множина скінченної міри. Покладемо $A_n = A \cap \Omega_n$. Якщо розглядати оператор T на підпросторі $E(\Omega_n)$ функцій з E, заданих тільки на Ω_n, він буде одновимірним, тобто компактним та вузьким.Отже, для кожного $n = 1, 2, \ldots$ існує така функція $\overline{x_n} \in E(\Omega_n)$, що $\overline{x_n}^2 = \chi(A_n)$, $\int\limits_{\Omega_n} \overline{x_n} d\mu = 0$.

[1]при цьому $\Omega \in \mathcal{F}$

Побудуємо тепер функцію $\overline{x}(\omega) = \overline{x_n}(\omega)$ для всіх $\omega \in \Omega_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Зрозуміло, що $|\overline{x}(\omega)| = \chi(A)$, тобто $\overline{x} \in E$, $\int\limits_{\Omega} \overline{x} d\mu = 0$ та $T\overline{x} = 0$, що й доводить, що оператор T є вузьким.

Залишилося знайти спектр оператора T. Легко бачити, що числа 0 та k_n для кожного $n = 1, 2, \ldots$ будуть власними значеннями оператора T, тобто належатимуть до його спектру. Оскільки спектр є замкненою множиною, в ній міститься вся множина K. Доведемо, що насправді спектр збігається з множиною K, тобто при будь-якому λ, що не належить K, оператор $T - \lambda I$ буде неперервно оборотним.

Нехай $y \in E$, тоді рівняння $(T - \lambda I)\, x = y$ має єдиний розв'язок у просторі E:

$$x = (T - \lambda I)^{-1} y = \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{k_n}{(k_n - \lambda)\mu(\Omega_n)} \int\limits_{\Omega_n} y \, d\mu \, - \, y\Big) \, = \, \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{k_n}{k_n - \lambda} M y - y\Big).$$

Зрозуміло, що

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| y \, \leq \, \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{|k_n| \, \|M\|}{|k_n - \lambda|} + 1\Big)\|y\| \, \leq \, \frac{1}{d_\lambda}\Big(\frac{C \, \|M\|}{d_\lambda} + 1\Big)\|y\|,$$

де

$$C = \sup\{|k| : \ k \in K\} < \infty, \quad d_\lambda = \rho(\lambda, K) > 0,$$

тобто оператор $(T - \lambda I)^{-1}$є неперервним. □

Оскільки в кожному переставляльно-інваріантному просторі всі оператори умовного математичного сподівання є обмеженими [3, Theorem 2.a.4.], ми одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай E – комплексний переставляльно-інваріантний простір на безатомному просторі (Ω, Σ, μ) з σ-скінченною мірою. Для того, щоби множина $K \subset \mathbb{C}$ була спектром деякого вузького оператора $T \in \mathcal{L}(E)$, необхідно і достатньо, щоби K була компактною множиною, яка містить нуль.*

Зауважимо, що у недавній роботі [1] наведено характеризацію σ-підалгебр $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, відносно яких оператор умовного математичного сподівання є вузьким в довільному просторі Кете E на (Ω, Σ, μ), як тільки він діє і є обмеженим.

[1] Дороговцев А. А., Попов М. М. Про вузькість операторів умовного математичного сподівання в просторах вимірних функцій // Вісник НТШ. – цей випуск.

[2] Flores J., Ruiz C. Domination by positive narrow operators // Positivity. – 2003. – 7. – P. 303–321.

[3] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. II. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1979. – X, 243 p.

[4] Maslyuchenko O. V, Mykhaylyuk V. V., Popov M. M. A lattice approach to narrow operators // Positivity (to appear).

[5] Plichko A. M., Popov M. M. Symmetric function spaces on atomless probability spaces // Diss. Math. (Rozpr. mat.) – 1990. – 306. – P. 1–85.

ON THE SPECTRUM OF A NARROW OPERATOR IN KÖTHE FUNCTION SPACES.

Iryna KRASIKOVA

Zaporizhzhya State University

We prove that for each compact subset K of the complex plane containing zero, on an arbitrary Köthe function spaces E on a non-atomic measure space with a σ-finite measure from a certain class of spaces (which, in particular, contains rearrangement invariant spaces) there exists a narrow operator $T \in \mathcal{L}(E)$ with the spectrum equals K. This answers a question of M. L. Gorbachuk.