ПРОДОВЖЕННЯ ВІДОБРАЖЕНЬ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В НЕМЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

©2008 р. *Олена КАРЛОВА*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 20 серпня 2008 р.

Досліджується можливість продовження відображень з різних функціональних класів, які набувають значень у неметризовних просторах, до відображень першого класу Лебеґа.

1 Вступ

Відображення $f : X \to Y$, яке діє з топологічного простору X у топологічний простір Y, називається *відображенням першого класу Лебеґа*, якщо для довільної замкненої множини F в Y множина $f^{-1}(F)$ є типу G_δ в X. Сукупність усіх таких відображень ми позначаємо через $H_1(X,Y)$. Символом $B_1(X,Y)$ ми позначатимемо сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Бера*, тобто поточкових границь послідовностей неперервних відображень. Якщо Z – ще один топологічний простір, то $CC(X \times Y, Z)$ – це сукупність всіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$.

Ми кажемо, що трійка (E, X, Y) топологічних просторів X, Y та $E \subseteq X$ *має властивість* $B_1/H_1/$*-продовження*, якщо для кожного відображення $f \in B_1(E,Y)$ $/f \in H_1(E,Y)/$ існує відображення $g \in B_1(X,Y)$ $/g \in H_1(X,Y)/$, таке, що $g|_E = f$.

Питанням продовження дійснозначних функцій першого класу Лебеґа займались багато математиків, такі, як Ф. Гаусдорф [1], В. Серпінський [2], Ґ. Алєксич [3], Г. Ган [4] та інші.

УДК 517.51, MSC 2000: 54C20, 54C05

К. Куратовський [5] довів, що (E, X, Y) має властивість H_1-продовження, якщо E – G_δ-підмножина метричного простору X, а Y – польський (тобто повнометризовний сепарабельний) простір.

О. Календа і Дж. Спурний [6] встановили наступний результат.

Теорема А. *Нехай E – ліндельофовий підпростір цілком регулярного простору X, Y – польський простір і*

(i) E – спадково берівський, або

(ii) E – типу G_δ в X.

Тоді (E, X, Y) має властивість H_1-продовження, а $(E, X, \mathbb{R})$ має властивість B_1-продовження.

Зауважимо, що у згаданих вище результатах простір значень метризовний, тому природно постає питання про дослідження можливості продовження відображень з певних функціональних класів, які набувають значень у неметризовних просторах.

2 Основні результати

Підмножину A топологічного простору X ми будемо називати *множиною типу G_δ^* /F_σ^*/*, якщо її можна зобразити у вигляді перетину /об'єднання/ послідовності функціонально відкритих /замкнених/ множин. Множина A називається *двосторонньою**, якщо вона одночасно є типу G_δ^* і F_σ^*.

Лема 1 [6, Proposition 7]. *Нехай X – топологічний простір, E – підмножина простору X, такі, що пара $(E, \mathbb{R})$ має властивість B_1-продовження відносно X. Тоді для будь-яких двох диз'юнктних G_δ^*-множин A та B в E існують дві диз'юнктні G_δ^*-множини A^* та B^* в X, такі, що $A = A^* \cap E$ і $B = B^* \cap E$.*

Наступне твердження є аналогом добре відомих теорем редукції і відокремності [10, с. 288].

Лема 2. *Нехай X – топологічний простір.*

а) [7, лема 3.2] *Якщо $(A_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність F_σ^*-множин в X, причому $X = \bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n$, то існує послідовність $(B_n)_{n=1}^\infty$ диз'юнктних двосторонніх* множин, таких, що $B_n \subseteq A_n$ і $X = \bigcup\limits_{n=1}^\infty B_n$.*

б) [8, лема 2.3] *Якщо A і B – диз'юнктні G_δ^*-множини в X, то існує двостороння* множина C, така, що $A \subseteq C$ і $C \cap B = \emptyset$.*

Лема 3. *Нехай X – топологічний простір, $E \subseteq X$ і виконується одна з наступних умов:*

(i) E – типу G^*_δ в X і пара $(E,X,\mathbb{R})$ має властивість B_1-продовження, або

(ii) X – цілком регулярний, E – лінделефовий спадково берівський.

Тоді

а) для кожної двосторонньої в E множини A існує двостороння* в X множина A^*, така, що $A = A^* \cap E$;*

б) для кожної послідовності $(A_n)_{n=1}^\infty$ диз'юнктних двосторонніх в E множин, таких, що $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty A_n$ існує послідовність $(A_n^*)_{n=1}^\infty$ диз'юнктних двосторонніх* в X множин, така, що $A_n = E \cap A_n^*$ і $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty A_n^*$.*

Доведення. а) Множини A і $E \setminus A$ є диз'юнктними G^*_δ-множинами в E. У випадку (i) згідно з лемою 1 існують такі диз'юнктні G^*_δ-множини C та D в X, що $A = C \cap E$ і $E \setminus A = D \cap E$. Зауважимо, що те ж саме має місце і для випадку (ii), адже згідно з теоремою А трійка $(E,X,\mathbb{R})$ має властивість B_1-продовження. З леми 2б) випливає, що існує двостороння* в X множина A^*, така, що $C \subseteq A^*$ і $A^* \cap D = \emptyset$. Легко бачити, що $A^* \cap E = A$.

б) Згідно з твердженням а) цієї леми, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує двостороння* в X множина D_n, така, що $A_n = D_n \cap E$. Покладемо $B_n = D_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k<n} D_k\right)$ для $n \geq 2$ і $B_1 = D_1$. Тоді множини B_n також двосторонні* в X, $A_n = B_n \cap M$ і $B_n \cap B_m = \emptyset$ при $n \neq m$.

У випадку (i) з леми 2а) випливає, що існує послідовність $(E_n)_{n=1}^\infty$ диз'юнктних двосторонніх* в X множин, така, що $X \setminus E = \bigsqcup\limits_{n=1}^\infty E_n$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо $C_n = E_n \cup B_n$. Тоді множини C_n двосторонні* в X і $\bigcup\limits_{n=1}^\infty C_n = X$. Покладемо $A_1^* = C_1$ і $A_n^* = C_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k<n} C_k\right)$ для $n \geq 2$. Зрозуміло, що A_n^* – диз'юнктні двосторонні* в X і $\bigsqcup\limits_{n=1}^\infty A_n^* = \bigcup\limits_{n=1}^\infty C_n = X$.

Залишилось показати, що $A_n^* \cap E = A_n$. Нехай $x \in A_n^* \cap E$. Тоді
$$x \in (C_n \cup B_n) \cap E = (E_n \cap E) \cup (B_n \cap E) = A_n,$$
адже $E_n \cap E = \emptyset$. Якщо $x \in A_n$, то $x \in E$ і $x \in B_n \subseteq C_n$. Нехай $x \in C_k$ для деякого $k < n$. Тоді $x \in E_k$ або $x \in B_k$. Оскільки $E \cap E_k = \emptyset$, то $x \in B_k$, що проводить до суперечності, бо $B_n \cap B_k = \emptyset$. Таким чином,

$x \notin \bigcup\limits_{k<n} C_k$, тому $x \in A_n^*$.

Розглянемо тепер випадок (ii). Позначимо $B = X \setminus \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Множина B є типу G_δ^* в X і $B \cap E = \emptyset$. З [6, Proposition 12] випливає, що існує G_δ^* в X множина E^*, така, що $E \subseteq E^* \subseteq X \setminus B$. Згідно з лемою 2а) існує така послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в X множин, що $X \setminus E^* = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Далі міркуємо аналогічно як у випадку (i). □

Лема 4. *Нехай X – топологічний простір, $E \subseteq X$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, E_n – F_σ^* в E для кожного n, $Y = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$, $(E, X, \mathbb{R})$ має властивість B_1-продовження, (E, X, Y_n) має властивість H_1-продовження для кожного n, $f : E \to Y$ – таке відображення, що $f(E_n) \subseteq Y_n$, $f|_{E_n} \in H_1(E_n, Y_n)$ для кожного n і виконується одна з наступних умов:*

(i) E – типу G_δ^* в X, або

(ii) X – цілком регулярний, E – ліндедефовий спадково берівський.

Тоді існує таке відображення $g \in H_1(X, Y)$, що $g|_E = f$.

Доведення. Згідно з лемою 2а) існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в E множин, така, що $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ і $A_n \subseteq E_n$.

Згідно з лемою 3б) існує послідовність $(A_n^*)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* в X множин, така, що $A_n = E \cap A_n^*$ і $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n^*$.

Для кожного n зафіксуємо точку $y_n \in Y_n$ і покладемо $g_n(x) = f(x)$, якщо $x \in A_n$ і $g_n(x) = y_n$, якщо $x \in E \setminus A_n$. Легко бачити, що $g_n \in H_1(E, Y_n)$ для кожного n.

Оскільки трійка (E, X, Y_n) має властивість H_1-продовження, то для кожного n існує відображення $g_n^* : X \to Y_n$, таке, що $g_n^*|_E = g_n$.

Покладемо $g(x) = g_n^*(x)$, якщо $x \in A_n^*$. Тоді $g \in H_1(X, Y)$ і $g|_E = f$. □

Теорема 1. *Нехай X – цілком регулярний простір, E – спадково берівський метризовний сепарабельний підпростір простору X, Y – строга індуктивна границя зростаючої послідовності повнометризовних локально опуклих просторів Y_n. Тоді (E, X, Y) має властивість H_1-продовження.*

Доведення. Нехай $f : E \to Y$ – відображення першого класу Лебеґа. Згідно з [9, Proposition 2.3], існує послідовність $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ множин типу F_σ в E, така, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ і $f(A_n) \subseteq Y_n$.

Оскільки простір E метризовний, то множини A_n є типу F_σ^* в E. Крім того, згідно з [9, Lemma 2.4] образ $f(A_n)$ сепарабельний. Тоді простір $Y_n^o = \overline{f(A_n)} \subseteq Y_n$ є польським. З теореми А випливає, що трійка (E, X, Y_n^o) має властивість H_1-продовження, а трійка $(E, X, \mathbb{R})$ має властивість B_1-продовження. Тому згідно з лемою 4 існує відображення $g \in H_1(X, Y)$, таке, що $g|_E = f$.

Отже, (E, X, Y) має властивість H_1-продовження. □

Нагадаємо, що топологічний простір Y називається *σ-метризовним*, якщо його можна подати у вигляді зліченного об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Y_n. Якщо, крім того, для кожної збіжної в Y послідовності $(y_k)_{k=1}^\infty$ існує номер n, такий, що $\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Y_n$, то простір Y називається *сильно σ-метризовним*. Послідовність підпросторів $(Y_n)_{n=1}^\infty$ називається *вичерпуванням* простору Y.

Теорема 2. *Нехай X – цілком регулярний простір, Y – досконало нормальний простір, Z – сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^\infty$, де Z_n – польський простір для кожного n, $A \subseteq X$ – метризовний підпростір, $B \subseteq Y$ і*

(i) $A \times B$ – ліндeлефовий G_δ-підпростір добутку $X \times Y$, або

(ii) $A \times B$ – ліндeлефовий спадково берівський підпростір добутку $X \times Y$.

Тоді для довільного відображення $f \in CC(A \times B, Z)$ існує відображення $g \in H_1(X \times Y, Z)$, таке, що $g|_E = f$.

Доведення. Нехай $f \in CC(A \times B, Z)$. Позначимо $E = A \times B$. З [11, Твердження 1] випливає, що існує послідовність $(F_n)_{n=1}^\infty$ замкнених в E множин, така, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ і $f(F_n) \subseteq Z_n$ для кожного n. Оскільки добуток метризовного і досконало нормального простору досконало нормальний, а досконало нормальний простір буде і спадково досконало нормальним, то множини F_n є функціонально замкненими, а, отже, типу F_σ^* в E.

Згідно з [12], $f \in H_1(E, Z)$. Тоді $f|_{F_n} \in H_1(F_n, Z_n)$ для кожного n. Згідно з лемою 4 існує відображення $g \in H_1(X \times Y, Z)$, таке, що $g|_E = f$. ♢

Теорема 3. *Нехай X – цілком регулярний простір, $E \subseteq X$, Y – σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Y_n)_{n=1}^\infty$, де Y_n – повнометризовний простір для кожного n, і виконується одна з наступних умов:*

(i) E – ліделефовий G_δ, або

(ii) E – ліделефовий спадково берівський, або

(iii) X – метризовний простір, E – множина типу G_δ в X.

Тоді для кожного неперервного відображення $f : E \to Y$ існує відображення $g \in H_1(X,Y)$, таке, що $g|_E = f$.

Доведення. Нехай $f : E \to Y$ – неперервне відображення.

Покладемо $\tilde{Y}_1 = Y_1$, $\tilde{Y}_n = Y_n \setminus Y_{n-1}$ для всіх $n \geq 2$. Простір Y досконалий, тому всі множини $\tilde{Y}_n$ є типу F_σ і G_δ в Y.

Позначимо $E_n = f^{-1}(\tilde{Y}_n)$ для кожного $n \geq 1$. Тоді $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Оскільки відображення f неперервне, то всі множини E_n є типу F_σ і G_δ в E.

Для кожного $n \geq 1$ покладемо $Y'_n = \overline{f(E_n)}$. Зауважимо, що у випадках (i) та (ii) простір Y'_n польський для кожного $n \geq 1$, адже відображення f неперервне.

Трійка $(E, X, \mathbb{R})$ має властивість B_1-продовження згідно з теоремою А, а трійка (E, X, Y'_n) має властивість H_1-продовження згідно з теоремою А у випадках (i) та (ii). Зрозуміло, що $f(E_n) \subseteq Y'_n$ і $f|_{E_n} \in H_1(E_n, Y'_n)$, тобто виконуються всі умови леми 4. Отже, у випадках (i) та (ii) існує відображення $g \in H_1(X,Y)$, таке, що $g|_E = f$.

У випадку (iii) для кожного n розглянемо відображення $f_n = f|_{E_n}$. Оскільки $f_n \in C(E_n, Y_n)$, то згідно з [13, Corollary 3.4] для кожного n існує відображення $g_n \in H_1(X, Y_n)$, таке, що $g|_{E_n} = f_n$. Множина E_n є типу G_δ в E, а значить, і типу G_δ в X, тому з леми 3б) випливає, що існує послідовність $(E^*_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних двосторонніх* множин в X, така, що $X = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E^*_n$ і $E_n = E \cap E^*_n$. Покладемо $g(x) = g_n(x)$, якщо $x \in E^*_n$. Зрозуміло, що $g \in H_1(X,Y)$ і $g|_E = f$. $\square$

[1] Hausdorff F. Set Theory. – Moscow-Leningrad, 1934.

[2] Sierpińsky W. Sur l'extension des fonctions de Baire définities sur les ensembles linéaires quelconques, Fund.Math., **16** (1930), 81 - 89.

[3] Alexits G. Über die Erweiterung einer Baireschen Funktion, Fund. Math., **15** (1930).

[4] Hahn H. Theorie der reellen Funktionen, Berlin (1921), P. 349.

[5] Kuratowski K. Sur les théorèmes topologiques de la théorie des fonctions de varibles réelles // C.R. Paris, **197**, 1933.

[6] Kalenda, O., Spurný, J. Extending Baire-one functions on topological spaces // Topol. Appl. 149 (2005), 195 - 216.

[7] Карлова О.О. Перший функціональний лебеґівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191-192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 52 - 60.

[8] Карлова О.О. Берівська класифікація відображень, неперервних відносно першої змінної і функціонального класу α відносно другої // Математичний вісник НТШ. – Т.2. – 2005. – С. 98 - 114.

[9] Karlova O.O., Mykhaylyuk V.V. On Baire one mappings and Lebesgue one mappings with values in inductive limits // Мат. Студії. – 2006. – Т. 25, №1. – С. 103 - 107.

[10] Куратовский К. Топология. - Т.1. - Москва: Мир, 1966. - 596 с.

[11] Карлова О.О., Маслюченко В.К. Нарізно неперервні відображення зі значеннями в не локально опуклих просторах // Укр. мат. журн. – Т. 59, №12. – 2007. – С. 1639 - 1646.

[12] Маслюченко В.К., Маслюченко О.В., Михайлюк В.В. Паракомпактність і лебеґівська класифікація // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, №2. – С. 65 - 72.

[13] Karlova O. Extension of continuous mappings and H_1-retracts // Bull. Aust. Math. Soc. – preprint.

EXTENSION OF MAPPINGS WITH VALUES IN NON METRIZABLE SPACES

Olena KARLOVA

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We investigate the possibility of extension of mappings from different functional classes, which act in non-metrizable spaces, to mappings of the first Lebesgue class.