ПРО ЛОКАЛЬНИЙ ЧАС САМОПЕРЕТИНУ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ, ПОБУДОВАНОГО ЗА СИНГУЛЯРНОЮ МІРОЮ

Ольга ІЗЮМЦЕВА

Інститут математики НАН України, Київ

Редакція отримала статтю 10 вересня 2008 р.

Розглянуто локальний час самоперетину тривимірного вінерівського процесу, який побудовано за узагальненою функцією повільного росту. У випадку, коли узагальнена функція є мірою довжини на деякій гладкій кривій, доведено, що за рахунок багаторазового попадання вінерівської траєкторії на криву, вдається ”понизити вимірність” до 2, де локальний час самоперетину існує після перенормування. Для узагальненої функції порядку $m \geq 0$, знайдено вигляд перенормування локального часу самоперетину тривимірного вінерівського процесу і доведено його існування як елементу деякого простору узагальнених вінерівських функціоналів.

1 Вступ

В даній роботі розглядається наступне узагальнення локального часу самоперетину для тривимірного вінерівського процесу w:

$$\mathcal{T}_2(t) = \int\limits_{\Delta_2(0;t)} æ(w(t_2) - w(t_1))dt_1dt_2. \tag{1.1}$$

Тут w – стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^3$, $\Delta_2(0;t) = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t\}$, $æ \in S^*(\mathbb{R}^3)$ – узагальнена функція повільного росту порядку $m \geq 0$. Зазначимо, що вираз (1.1), в окремому випадку

УДК 519.21

$æ = \delta_0$, розглядався багатьма авторами [1-3] як величина, що відповідає за кількість самоперетинів вінерівської траєкторії на відрізку часу $[0;t]$. Відомо [4], що у випадку вимірності 2, для $æ = \delta_0$ вираз (1.1) треба перенормувати, а у випадку вимірності 3 і вище (1.1) взагалі не може бути визначеним як випадкова величина. Це відповідає твердженню теореми Ердеша–Дворецького–Какутані про наявність точок самоперетину вінерівського процесу в просторах різної вимірності.

Використання нами узагальненої функції $æ \in S^*(\mathbb{R}^3)$ замість δ_0, відображає той факт, що якщо *supp* æ не зосереджений в одній точці, то можна сподіватись, що вінерівська траєкторія в $\mathbb{R}^3$ буде багаторазово потрапляти на нього. Тим самим, у (1.1) можна буде "понизити вимірність" до 2, де локальний час самоперетину існує після перенормування.

Зауважимо, що функціонали від вінерівського процесу, які містять узагальнені функції, розглядались в [5-7] з використанням техніки розкладу Іто–Вінера і відповідних Соболєвських просторів вінерівських функціоналів. Згдаємо також роботи [8, 9], де для ґауссівських випадкових полів отримано критерії існування локальних часів ($æ = \delta_0$). До того ж в [10] доведено існування перенормованого локального часу самоперетину для одновимірного вінерівського процесу у випадку $æ = \delta_0'$, де δ_0' – це узагальнена похідна від дельта функції.

Оскільки ядра розкладу Іто-Вінера для функції $æ(w(t_2) - w(t_1))$ мають особливість на діагоналі $t_1 = t_2$, то в загальному випадку важко очікувати, що $\mathcal{T}_2(t)$ буде елементом деякого простору узагальнених вінерівських функціоналів. Тому основною нашою метою є встановлення вигляду перенормування для $\mathcal{T}_2(t)$, причому перенормована величина вже буде елементом вищезгаданого простору .

Ідея перенормування полягає в тому, що від $\mathcal{T}_2(t)$ віднімається певна кількість членів її розкладу Іто–Вінера і тим самим ліквідується особливість на діагоналі. Знайдене у нашій роботі перенормування повністю узгоджене з перенормуванням, введеним в [3, 10] для одновимірного вінерівського процесу і узагальнених функцій δ_0, δ_0' – нульового та першого порядку відповідно. Справді, в одновимірному випадку для $æ \in S^*(\mathbb{R})$ порядку m від $\mathcal{T}_2(t)$ треба відняти $m-1$ перших членів її розкладу Іто–Вінера. Звідси випливає, що для $m = 0$ зовсім не треба перенормувати $\mathcal{T}_2(t)$, а для $m = 1$ перенормування полягає у відніманні від $\mathcal{T}_2(t)$ нульового члену її розкладу Іто–Вінера, що є математичним сподіванням $\mathcal{T}_2(t)$.

2 Самоперетини на кривій

В цьому розділі розглядається ситуація, коли æ – міра довжини на гладкій кривій Γ, тобто

$$\forall\ \varphi \in S^*(\mathbb{R}^3) : <æ, \varphi >= \int\limits_{\Gamma} \varphi\ ds. \tag{2.1}$$

В цьому випадку (1.1) можна трактувати як кількість таких пар (t_1, t_2), для яких $w(t_1)$ і $w(t_2)$ одночасно опинились на Γ.

Почнемо з простої ситуації, коли

$$\Gamma = \{(x, y, z) : x = 0,\ y = 0,\ z \in [0; 1]\}. \tag{2.2}$$

Для того щоб (1.1) мав місце, використаємо гладкі наближення æ:

$$æ_\varepsilon = æ * f_\varepsilon,\ \varepsilon > 0. \tag{2.3}$$

Тут f_ε – ґауссівська щільність з дисперсією ε:

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}^3}\ e^{-\frac{\|u\|^2}{2\varepsilon}},\ \ u \in \mathbb{R}^3.$$

Відомо [11], що $æ_\varepsilon \in S^*(\mathbb{R}^3)$ і $æ_\varepsilon \to æ,\ \varepsilon \to 0+$ в $S^*(\mathbb{R}^3)$.

Покладемо

$$\mathcal{T}_2^\varepsilon(t) = \int\limits_{\Delta_2(0;t)} æ_\varepsilon(w(t_2) - w(t_1))dt_1dt_2.$$

Справедлива наступна лема.

Лема 1.1. *При* $\varepsilon \to 0+, M\mathcal{T}_2^\varepsilon(t) \sim \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\varepsilon}$.

Доведення. Нехай w має координати w_x, w_y, w_z, які є незалежними стандартними одновимірними вінерівськими процесами. Збережемо позначення $||\nu||$ для вектора ν в евклідовому просторі довільної вимірності. Позначимо через w_{xy} двовимірний вінерівський процес з координатами w_x, w_y. Згідно з означенням випадкової величини $\mathcal{T}_2^\varepsilon(t)$ і припущеннями (2.1)-(2.3)

$$M\mathcal{T}_2^\varepsilon(t) = M\int\limits_{\Delta_2(0;t)} \frac{1}{2\pi\varepsilon} e^{-\frac{||w_{xy}(t_2) - w_{xy}(t_1)||^2}{2\varepsilon}} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\ e^{-\frac{(w_z(t_2) - w_z(t_1) - z)^2}{2\varepsilon}} dzdt_1dt_2 =$$

$$= \int\limits_{\Delta_2(0;t)} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon + t_2 - t_1} \cdot \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + t_2 - t_1}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(\varepsilon + t_2 - t_1)}} dz dt_1 dt_2. \quad (2.4)$$

Розглянемо

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + t_2 - t_1}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(\varepsilon + t_2 - t_1)}} dz. \quad (2.5)$$

Зробимо заміну змінної $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + t_2 - t_1}} = z'$. Після заміни вираз (2.4) матиме наступний вигляд:

$$\int\limits_{\Delta_2(0;t)} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon + t_2 - t_1} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon + t_2 - t_1}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz' dt_1 dt_2.$$

Інтегруючи частинами відносно t_1, отримаємо:

$$t \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \cdot \frac{1}{2\pi} ln \frac{1}{\varepsilon} + o(\ln \frac{1}{\varepsilon}), \ \varepsilon \to 0+.$$

Таким чином, ми показали, що справді

$$M\mathcal{T}_2^\varepsilon(t) \sim \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Лему доведено.

З вищедоведеної леми можна зробити висновок, що випадкові величини $\mathcal{T}_2^\varepsilon(t)$ не мають границі у середньому будь-якого порядку $p \geq 1$, при $\varepsilon \to 0+$. Тому розглянемо деяке перенормування $\mathcal{T}_2^\varepsilon(t)$. Покладемо

$$\tilde{\mathcal{T}}_2^\varepsilon(t) = \mathcal{T}_2^\varepsilon(t) - M\mathcal{T}_2^\varepsilon(t).$$

Випадкові величини $\tilde{\mathcal{T}}_2^\varepsilon(t)$ збігаються у середньому квадратичному при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 1.1. *Існує границя*

$$L_2 - \lim_{\varepsilon \to 0+} \tilde{\mathcal{T}}_2^\varepsilon(t).$$

Доведення. Для доведення існування $L_2 - \lim_{\varepsilon\to 0+} \tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon}(0;t)$, достатньо показати, що існує скінченна границя

$$M\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_1}(t)\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_2}(t) \quad \text{при} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0+. \tag{2.6}$$

Перепишемо (2.6), використовуючи розклад Іто–Вінера для $\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t)$. Введемо позначення

$$f_{\varepsilon}^1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}},\ x \in \mathbb{R},\ f_{\varepsilon}^2(x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} e^{-\frac{||x||^2}{2\varepsilon}},\ x \in \mathbb{R}^2.$$

Зазначимо, що для $\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t)$ має місце таке зображення:

$$\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t) = \int\limits_{\Delta_2(0;t)} \int\limits_0^1 f_{\varepsilon}^1(w_x(t_2) - w_x(t_1)) \cdot f_{\varepsilon}^1(w_y(t_2) - w_y(t_1)) \cdot f_{\varepsilon}^1(w_z(t_2) -$$

$$- w_z(t_1) - z) dz dt_1 dt_2. \tag{2.7}$$

Відомо [6], що

$$f_{\varepsilon}^1(w_z(t_2) - w_z(t_1) - z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n\left(\frac{w_z(t_2) - w_z(t_1)}{\sqrt{t_2 - t_1 + \varepsilon}}\right) \cdot$$

$$\cdot H_n\Big(\frac{z}{\sqrt{t_2 - t_1 + \varepsilon}}\Big) f^1_{\varepsilon + t_2 - t_1}(z). \tag{2.8}$$

Тут $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ – n-й многочлен Ерміта зі старшим коефіцієнтом $1, n \geq 0$. З (2.7) і (2.8) випливає, що

$$\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon}(t) = \int\limits_{\Delta_2(0;t)} \int\limits_0^1 \sum_{\substack{n_1,n_2,n_3: \\ n_1+n_2+n_3>0}} \frac{1}{n_1!} H_{n_1}\Big(\frac{w_x(t_2) - w_x(t_1)}{\sqrt{t_2 - t_1 + \varepsilon}}\Big) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{n_2!} H_{n_2}\Big(\frac{w_y(t_2) - w_y(t_1)}{\sqrt{t_2 - t_1 + \varepsilon}}\Big) \frac{1}{n_3!} H_{n_3}\Big(\frac{w_z(t_2) - w_z(t_1)}{\sqrt{t_2 - t_1 + \varepsilon}}\Big) \cdot$$

$$\cdot H_{n_1}(0) \cdot H_{n_2}(0) \cdot H_{n_3}\Big(\frac{z}{\sqrt{t_2 - t_1 + \varepsilon}}\Big) f^2_{\varepsilon + t_2 - t_1}(0) \cdot f^1_{\varepsilon + t_2 - t_1}(z) dz dt_1 dt_2.$$

Підсумовування здійснюється за усіма n_1, n_2, n_3, такими що $n_1+n_2+n_3 > 0$. Це зумовлено тим, що від випадкової величини $\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t)$ віднімається її математичне сподівання. Математичне сподівання дорівнює нульовому члену розкладу Іто–Вінера $\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t)$. Перемноживши розклади Іто-Вінера для $\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_1}(t)$ і $\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_2}(t)$, і, беручи математичне сподівання добутку, ми отримаємо наступну рівність

$$M\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_1}(t)\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_2}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

де

$$c_k(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \int\limits_{\Delta_2(0;t)\times\Delta_2(0;t)} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}^6}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1+t_2-t_1}}\cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{z_1^2}{16(t_2-t_1+\varepsilon_1)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2+t_4-t_3}}e^{-\frac{z_2^2}{16(t_4-t_3+\varepsilon_2)}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\lambda([t_1;t_2]\cap[t_3;t_4])^k}{[(t_2-t_1+\varepsilon_1)(t_4-t_3+\varepsilon_2)]^{\frac{k}{2}+1}}\cdot\sum_{n_1+n_2+n_3=k} c_{n_1,n_2,n_3}(z_1,z_2)\cdot dz_1dz_2d\vec{t},$$

$$c_{n_1,n_2,n_3}(z_1,z_2) = \prod_{i=1}^{3}\frac{1}{n_i!}H_{n_1}^2(0)H_{n_2}^2(0)\cdot$$

$$\cdot H_{n_3}\Big(\frac{z_1}{\sqrt{t_2-t_1+\varepsilon_1}}\Big)H_{n_3}\Big(\frac{z_2}{\sqrt{t_4-t_3+\varepsilon_2}}\Big)e^{-\frac{7z_1^2}{16(t_2-t_1+\varepsilon_1)}}\cdot e^{-\frac{7z_2^2}{16(t_4-t_3+\varepsilon_2)}}.$$

Покажемо, що існує $c_k>0$, таке, що $\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0 : |c_k(\varepsilon_1,\varepsilon_2)|\le c_k$ і $\sum_{k=1}^{\infty} c_k<+\infty$. Оцінимо $c_k(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, використовуючи рівномірну оцінку для многочленів Ерміта [12]. Для $\frac{1}{4}\le\alpha\le\frac{1}{2}$, існує $c>0$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{n!}}|H_n(x)e^{-\alpha x^2}|\le c\cdot n^{-\frac{8\alpha-1}{12}}, n\ge 1. \tag{2.9}$$

Згідно з (2.9)

$$\Big|\sum_{n_1+n_2+n_3=k} c_{n_1,n_2,n_3}(z_1,z_2)\Big|\le\sum_{n_1+n_2+n_3=k}\prod_{i=1}^{3} n_i^{-\frac{5}{12}},$$

де α ми беремо рівним $\frac{7}{16}$. В [13] було доведено, що для $d\in\mathbb{N}, 0<\beta<1$, існує $c>0$, таке, що

$$\forall\ n\in\mathbb{N}: \sum_{n_1+\ldots+n_d}\prod_{i=1}^{d}(n_i\vee 1)^{-\beta}\le c\cdot k^{d(1-\beta)-1}.$$

Отже,

$$\sum_{n_1+n_2+n_3=k} \prod_{i=1}^{3} n_i^{-\frac{5}{12}} \leq c \cdot k^{\frac{3}{4}}. \qquad (2.10)$$

В [13] було показано, що існує $L > 0$, таке, що для $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Delta_2 \times \Delta_2} \frac{\lambda([t_1;t_2] \cap [t_3;t_4])^k}{[(t_2-t_1)(t_4-t_3)]^{\frac{k}{2}+1}} d\vec{t} \leq \frac{L}{k^2}.$$

Це дає можливість зробити висновок, що

$$\int_{\Delta_2 \times \Delta_2} \frac{\lambda([t_1;t_2] \cap [t_3;t_4])^k}{[(t_2-t_1+\varepsilon_1)(t_4-t_3+\varepsilon_2)]^{\frac{k}{2}+1}} d\vec{t} \leq \frac{L}{k^2}. \qquad (2.11)$$

Крім того,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1+\varepsilon_1)}} e^{-\frac{z_1^2}{16(t_2-t_1+\varepsilon_1)}} dz_1 \leq \sqrt{8}. \qquad (2.12)$$

З оцінок (2.10)-(2.12) випливає, що

$$|c_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)| \leq \frac{c \cdot L \cdot \sqrt{8}}{k^{\frac{5}{4}}}$$

Покладемо $c_k := \frac{c \cdot L \cdot \sqrt{8}}{k^{\frac{5}{4}}}$. Зауважимо, що $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < +\infty$. Далі, неважко перевірити, що

$$c_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to c_k(0,0), \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0+. \qquad (2.13)$$

Отже, за теоремою про мажоровану збіжність існує границя

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0+} M\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_1}(t)\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_2}(t).$$

Теорему доведено.

Нехай тепер Γ – довільна гладка крива, яка задається параметричними рівняннями

$$g(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t). \end{cases}, \quad t \in [0;1]. \qquad (2.14)$$

Позначимо $I(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$. Припустимо, що існують $a, c > 0$, такі, що для довільного t із $[0; 1]$:

$$I(t) \leq a, \tag{2.15}$$

$$||g(t)|| \geqslant c \cdot t. \tag{2.16}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1.2. *Для гладкої кривої (2.14), що задовольняє умови (2.15), (2.16) існує* $L_2 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon}(t)$.

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 1.1 перепишемо $M\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_1}(t)\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_2}(t)$, використовуючи розклад Іто–Вінера для $\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t)$.

$$M\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_1}(t)\tilde{\mathcal{T}}_2^{\varepsilon_2}(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_2(0;t)\times\Delta_2(0;t)} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\lambda([t_1;t_2]\cap[t_3;t_4])^k}{[(t_2-t_1+\varepsilon_1)(t_4-t_3+\varepsilon_2)]^{\frac{k}{2}}} \sum_{n_1+n_2+n_3=k} \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{n_i!} \cdot$$

$$\cdot H_{n_1}\left(\frac{x(u)}{\sqrt{t_2-t_1+\varepsilon_1}}\right) H_{n_2}\left(\frac{y(u)}{\sqrt{t_2-t_1+\varepsilon_1}}\right) H_{n_3}\left(\frac{z(u)}{\sqrt{t_2-t_1+\varepsilon_1}}\right)$$

$$\cdot H_{n_1}\left(\frac{x(\nu)}{\sqrt{t_4-t_3+\varepsilon_2}}\right) H_{n_2}\left(\frac{y(\nu)}{\sqrt{t_4-t_3+\varepsilon_2}}\right) H_{n_3}\left(\frac{z(\nu)}{\sqrt{t_4-t_3+\varepsilon_2}}\right) \cdot$$

$$\cdot f_{\varepsilon_1+t_2-t_1}(g(u)) f_{\varepsilon_2+t_4-t_3}(g(\nu)) \cdot I(u)I(\nu)\,du\,d\nu\,d\vec{t}. \tag{2.17}$$

На основі (2.15) і рівномірної оцінки для многочленів Ерміта (2.9) (знову беремо α рівним $\frac{7}{16}$), вираз (2.17) буде меншим або рівним ніж

$$a^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_2(0;t)\times\Delta_2(0;t)} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{\lambda([t_1;t_2]\cap[t_3;t_4])^k}{[(t_2-t_1+\varepsilon_1)(t_4-t_3+\varepsilon_2)]^{\frac{k}{2}+1}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n_1+n_2+n_3=k} \prod_{i=1}^{3} n_i^{-\frac{5}{12}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1+\varepsilon_1)}} e^{-\frac{||g(u)||^2}{16(t_2-t_1+\varepsilon_1)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_4-t_3+\varepsilon_2)}} e^{-\frac{||g(\nu)||^2}{16(t_4-t_3+\varepsilon_2)}} du\,d\nu\,d\vec{t}.$$

З умови (2.16) випливає, що

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1+\varepsilon_1)}} e^{-\frac{||g(u)||^2}{16(t_2-t_1+\varepsilon_1)}} du \leq \frac{\sqrt{8}}{c}.$$

Далі, повторюючи хід доведення теореми 1.1, отримаємо твердження теореми 1.2.

Теорему доведено.

3. В данному розділі ми розглядаємо величину $\mathcal{T}_2(t)$, побудовану за узагальненою функцією æ $\in S^*(\mathbb{R}^3)$ порядку m. Як і раніше наблизимо $\mathcal{T}_2(t)$ величинами

$$\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t) = \int\limits_{\Delta_2(0;t)} \text{æ}_{\varepsilon}(w(t_2) - w(t_1))dt_1 dt_2.$$

Відомо [6], що при $\varepsilon \to 0+$ підінтегральний вираз $\text{æ}_{\varepsilon}(w(t_2) - w(t_1))$ збігається лише в деякому просторі узагальнених вінерівських функціоналів. Тому ми і досліджуємо збіжність $\mathcal{T}_2^{\varepsilon}(t)$ в такому ж просторі після відповідного перенормування.

Нагадаємо необхідні означення і факти із [6]. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір. Як і раніше w – стандартний вінерівський процес в $\mathbb{R}^3, S(\mathbb{R}), S(\mathbb{R}^3)$ – простори функцій повільного росту на $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3$ відповідно. Для $f(\cdot) \in S(\mathbb{R})$ визначимо оператор

$$(Af)(x) = -f^{''}(x) + (1 + x^2)f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Замикання A в $L^2(\mathbb{R})$ є самоспряженим додатнім оператором, який будемо позначати тим самим символом. Відомо [14], що функції Ерміта

$$e_n(x) = (2^n \cdot n!\sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),\ n \geq 0,$$

утворюють ортонормований базис в $L^2(\mathbb{R})$ і одночасно є власними функціями оператора $A : Ae_n = (2n + 2)e_n,\ n \geq 0$. Тому спектр оператора A – це множина $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$. Нехай для $\varphi \in S(\mathbb{R}),\ \psi \in S(\mathbb{R}),\ p \in \mathbb{R}$

$$(\varphi, \psi)_p := \int\limits_{\mathbb{R}} (A^p \varphi)(x)\psi(x)dx.$$

Позначимо через $S_p(\mathbb{R})$ гільбертовий простір, який є поповненням $S(\mathbb{R})$ за нормою, що відповідає скалярному добутку $(\cdot, \cdot)_p$, і яку будемо позначати $|\cdot|_p$ ($|\cdot|_0$ звичайна L_2 – норма). Покладемо $\hat{S}_{p,k_1,k_2,k_3} := \hat{S}_{p,k_1} \bigotimes \hat{S}_{p,k_2} \bigotimes \hat{S}_{p,k_3}$, де $\hat{S}_{p,k}$ – симетрична частина $S_p(\mathbb{R})^{\bigotimes k}$. Аналогічно, нехай

$$\hat{L}^2_{k_1,k_2,k_3} := \hat{L}^2_{k_1} \bigotimes \hat{L}^2_{k_2} \bigotimes \hat{L}^2_{k_3},$$

де $\hat{L}_k^2$ – симетрична частина $L^2([0;1]^k)$. Розклад Іто–Вінера випадкової величини α, вимірної відносно w на $[0;1]$ зі скінченним другим моментом має такий вигляд:

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \int \overset{1}{\underset{0}{\overset{k}{\cdots}}} \int a_{k_1,k_2,k_3}(\tau_1,\ldots,\tau_k)dw_x(\tau_1)\ldots dw_z(\tau_k) :=$$

$$= \sum_{k_1+k_2+k_3=k} I^{0,1}_{k_1,k_2,k_3}(a_{k_1,k_2,k_3}),$$

де $a_{k_1,k_2,k_3} \in \hat{L}^2_{k_1,k_2,k_3}$ і

$$||\alpha||_0^2 = M\alpha^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} k_1!k_2!k_3! \, |a_{k_1,k_2,k_3}|_0^2 \, .$$

Те, що величині α відповідає набір ядер її розкладу надалі будемо позначати так: $\alpha \sim (a_{k_1,k_2,k_3})$. Таким чином, $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ ізоморфний простору $\bigoplus_{k_1,k_2,k_3=0}^{\infty} \sqrt{k_1!}\sqrt{k_2!}\sqrt{k_3!}\hat{L}^2_{k_1,k_2,k_3}$. Якщо замінити $\left\{\hat{L}^2_{k_1,k_2,k_3}\right\}$ на $\left\{\hat{S}_{p,k_1,k_2,k_3}\right\}$, то отримаємо простори $S_p, p \in \mathbb{R}$, з нормами

$$||\alpha||_p^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} k_1!k_2!k_3! \, |a_{k_1,k_2,k_3}|_p^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} k_1!k_2!k_3! \left|(A^p)^{\bigotimes k} a_{k_1,k_2,k_3}\right|_0^2 .$$

Простір $\Theta = \bigcap_{p \geq 0} S_p$ є ядерним з системою норм $\{|| \cdot ||_p, \ p \geq 0\}$ і його спряженим простором є $\Theta^* = \bigcup_{p \geq 0} S_{-p}$. Елементи простору Θ^* називаються узагальненими вінерівськими функціоналами [15].

Розглянемо

$$\mathcal{T}_2(t) = \int_{\Delta_2(0;t)} æ(w(t_2) - w(t_1))dt_1dt_2.$$

Розклад Іто-Вінера для $æ(w(t_2) - w(t_1))$ має такий вигляд:

$$æ(w(t_2) - w(t_1)) = \sum_{k_1+k_2+k_3=k}^{\infty} \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{k_i!} I^{t_1,t_2}_{k_i} \left(\mathbb{I}^{\bigotimes k_i}_{[t_1;t_2]} \right) .$$

$$\cdot (t_2 - t_1)^{-\frac{k_i}{2}} < æ,\ H_{k_1,k_2,k_3}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t_2 - t_1}}\right) f_{t_2-t_1}(\cdot) >, \tag{3.1}$$

де $H_{k_1,k_2,k_3}\left(\frac{r}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) = H_{k_1}\left(\frac{r_x}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) H_{k_2}\left(\frac{r_y}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) \cdot H_{k_3}\left(\frac{r_z}{\sqrt{t_2-t_1}}\right)$, для довільного $r \in \mathbb{R}^3$.

Оскільки

$$||A^{-p}\mathbb{I}_{[t_1;t_2]}||_0^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)^{-2p} < \mathbb{I}_{[t_1;t_2]}, e_k >^2 \leq$$

$$\leq (t_2 - t_1)^2 \cdot c_1^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)^{-2p},$$

де $c_1 = \sup\limits_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ k\geq 0}} |e_k(x)|$, то існує таке $q_0 > 0$, що

$$||A^{-q_0}\mathbb{I}_{[t_1;t_2]}||_0^2 \leq (t_2 - t_1)^2. \tag{3.2}$$

Нехай $\tilde{\Delta}_2(0;t) = \{(t_1, t_2) \in \Delta_2(0;t) : t_1 \neq t_2\}$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай* $æ \in S^*(\mathbb{R}^3)$ *порядку* $m \geq 0$ *і* $æ(w(t_2) - w(t_1)) \sim (a_{k_1,k_2,k_3}(t_1, t_2))$, $t_1, t_2 \in \tilde{\Delta}_2(0;t)$. *Тоді для* q_0 *з (3.2) і усіх* $p > q_0$, *функціонал вигляду*

$$\tilde{\mathcal{T}}_2(t) := \int\limits_{\Delta_2(0;t)} (æ(w(t_2) - w(t_1)) -$$

$$- \sum_{k=0}^{3m+1} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} I^{t_1,t_2}_{k_1,k_2,k_3}(a_{k_1,k_2,k_3}(t_1, t_2)))dt_1dt_2.$$

є елементом S_{-p}.

Доведення. Введемо позначення

$$V^m_{-p}(t_1, t_2) := ||æ(w(t_2) - w(t_1)) - \sum_{k=0}^{3m+1} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} I^{t_1,t_2}_{k_1,k_2,k_3}(a_{k_1,k_2,k_3}(t_1, t_2))||^2_{-p}.$$

Згідно з (3.1)

$$V^m_{-p}(t_1, t_2) = \sum_{k=3m+2}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \prod_{i=1}^{3} |(A^{-p+q_0} \cdot A^{-q_0})^{\bigotimes k_i}.$$

$$\cdot(\mathbb{I}_{t_1;t_2})^{\bigotimes k_i}|_0^2 \frac{(t_2-t_1)^{-k_i}}{k_i!}.$$

$$\cdot < æ, H_{k_1,k_2,k_3}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) f_{t_2-t_1}(\cdot) >^2 .$$

Далі з оцінки $||A^{-(p-q_0)}|| \leq 2^{-(p-q_0)}$ і (3.2) випливає, що

$$V_{-p}^m(t_1,t_2) \leq \sum_{k=3m+2}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} 2^{-2k(p-q_0)}.$$

$$\cdot\frac{(t_2-t_1)^k}{k_1!k_2!k_3!} < æ, H_{k_1,k_2,k_3}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) f_{t_2-t_1}(\cdot) >^2 .$$

Неважко помітити, що

$$\frac{1}{k_1!k_2!k_3!} < æ, H_{k_1,k_2,k_3}\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) f_{t_2-t_1}(\cdot) >^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{k_1!, k_2!, k_3!} ||æ||_{-m}^2 \left(\sup_{\substack{r\in\mathbb{R}^3 \\ |\alpha|\leq m}} \middle| (1+||r||^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot D^{\alpha}\left(H_{k_1,k_2,k_3}\left(\frac{r}{\sqrt{t_2-t_1}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}^3} e^{-\frac{||r||^2}{2(t_2-t_1)}}\right) \middle| \right)^2,$$

що менше або рівне, ніж

$$||æ||_{-m}^2 \left(\sup_{\substack{r\in\mathbb{R}^3 \\ t_1,t_2\in\tilde{\Delta}_2(0;t)}} ((1+||r||^2)^{\frac{m}{2}} \ e^{-\frac{||r||^2}{4(t_2-t_1)}}) \right)^2 \cdot \prod_{i=1}^{3} \frac{1}{k_i!} h_{k_i}(t_1,t_2),$$

де

$$h_{k_1}(t_1,t_2) = \left(\sup_{\substack{r_x\in\mathbb{R} \\ \alpha_1\leq m}} \left| \frac{d^{\alpha_1}}{dr_x^{\alpha_1}} H_{k_1}\left(\frac{r_x}{\sqrt{t^2-t_1}}\right) e^{-\frac{r_x^2}{4(t_2-t_1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \right| \right)^2,$$

$$h_{k_2}(t_1,t_2) = \left(\sup_{\substack{r_y\in\mathbb{R} \\ \alpha_2\leq m}} \left| \frac{d^{\alpha_2}}{dr_y^{\alpha_2}} H_{k_2}\left(\frac{r_y}{\sqrt{t^2-t_1}}\right) e^{-\frac{r_y^2}{4(t_2-t_1)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \right| \right)^2,$$

$$h_{k_3}(t_1,t_2)=\left(\sup_{\substack{r_z\in\mathbb{R}\\ \alpha_3\le m}}\left|\frac{d^{\alpha_3}}{dr_z^{\alpha_3}}H_{k_3}\left(\frac{r_z}{\sqrt{t^2-t_1}}\right)e^{-\frac{r_z^2}{4(t_2-t_1)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\right|\right)^2.$$

Оцінимо $h_{k_1}(t_1,t_2)$. Для $h_{k_2}(t_1,t_2), h_{k_3}(t_1,t_2)$ будуть мати місце аналогічні оцінки.

$$\frac{1}{k_1!}h_{k_1}(t_1,t_2)=\sup_{\substack{r_x\in\mathbb{R}\\ \alpha_1\le m}}\left|\frac{\sqrt{(k_1+\alpha_1)!}}{(t_2-t_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}}\ \frac{H_{k_1+\alpha_1}(\frac{r_x}{\sqrt{t_2-t_1}})}{\sqrt{(k_1+\alpha_1)!}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}e^{-\frac{r_x^2}{4(t_2-t_1)}}\right|\le\frac{1}{2\pi}\frac{(k_1+m)^m}{(t_2-t_1)^{m+1}}\cdot$$

$$\cdot\left(\sup_{\substack{r_x\in\mathbb{R}\\ n\ge k_1}}\left|\frac{H_n(\frac{r_x}{\sqrt{t_2-t_1}})}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{r_x^2}{4(t_2-t_1)}}\right|\right)^2. \tag{3.3}$$

Згідно з рівномірною оцінкою для многочленів Ерміта (2.9), (3.3) не перевищуватиме $c\cdot\frac{(k_1+m)^m}{(t_2-t_1)^{m+1}}\cdot k_1^{-1/6}$. Аналогічно

$$h_{k_2}(t_1,t_2)\cdot\frac{1}{k_2!}\le c\cdot\frac{(k_2+m)^m}{(t_2-t_1)^{m+1}}k_2^{-1/6},$$

$$h_{k_3}(t_1,t_2)\cdot\frac{1}{k_3!}\le c\cdot\frac{(k_3+m)^m}{(t_2-t_1)^{m+1}}k_3^{-1/6}.$$

Для функції $g(r)=(1+||r||^2)^{\frac{m}{2}}e^{-\frac{||r||^2}{4(t_2-t_1)}}$, існує додатна константа $c_3=c_3(m)$, така, що $\sup_{\substack{r\in\mathbb{R}^3\\ t_1,t_2\in\tilde{\Delta}_2(0;t)}} g(r)\le c_3$.

Таким чином,

$$V_{-p}^m(t_1,t_2)\le K||æ||_{-m}^2\sum_{k=3m+2}^{\infty}\sum_{k_1+k_2+k_3=k}2^{-2k(p-q_0)}\cdot$$

$$\cdot(t_2-t_1)^{k-3m-3}\prod_{i=1}^{3}(k_i+m)^m k_i^{-1/6}, \tag{3.4}$$

де K – деяка додатна константа.

З оцінки (3.4) випливає, що

$$\int\limits_{\Delta_2(0;t)} (V_{-p}^{m}(t_1,t_2))^{1/2} dt_1 dt_2 < +\infty.$$

Теорему доведено.

[1] Dynkin E.B. Regularized self-intersection local times of planar Brownian motoin // The Annals of Probability. — 1988. – Vol. no. 1. – Pp. 58-74.

[2] Le Gall J.-F. Fluctuation results for the Wiener sausage // Ann. Probab. – 1988. – Vol. 16. – Pp. 991–1018.

[3] Rosen J. A renormalized local time for multiple intersection of planar Brownian motion // Seminaire de Probabilities XX. – 1986. – Vol. 20. – Pp. 515–531.

[4] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972. — 376 с.

[5] Бакун В.В. Об обобщенном локальном времени для процесса броуновского движения // Український математичний журнал. — 2000. — 52. — **2**. — С.157–164.

[6] Дороговцев А.А., Бакун В.В. Обобщенные функционалы от винеровского процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 2003. — **48**. – N 1. — С. 43–61

[7] Uemura H. Unrenormalized intersection local time of Brownian motion and its local time representation // Journal of Math. — Kyoto Univ. — 2004. — Vol. 43. – N 4. – Pp. 671–688.

[8] Rudenko A. Local time as an element of the Sobolev space // Theory of Stoch. Proc. — 2007. —Vol. 13 (29). – no 3. – Pp. 65–79.

[9] Rudenko A. Existence of generalized lolal times for Gaussian random fields // Theory of Stoch. Proc. — 2006. Vol. 12 (28). — no. 1–2. – Pp. 142–154.

[10] Rosen J. Derivatives of self–intersection local times // Seminaire de Probabilities XXXVIII. — Pp. 263–281.

[11] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 стр.

[12] Szego G. Orthogonal polynomials // Amer. Math. Soc. Collog. Publ. — 1939. – 23 p.

[13] Imkeller P., Perez–Abreu V., Vives J. Chaos expansions of double intersection local time of Brownian motion in R^D and renormalization // Stochastic Process. Appl. — 1995. — Vol. 56. N 1. — Pp. 1–34.

[14] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1977. – 360 с.

[15] Хида Т. Броуновское движение. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

ON THE LOCAL TIME OF SELF-INTERSECTION FOR WIENER PROCESS GENERATED BY A SINGULAR MEASURE

Olga IZYUMTSEVA

Institute of Mathematics of NASU,
3 Tereshchenkivska Str., Kyiv 01601, Ukraine

The local time of self-intersection for Wiener process in $\mathbb{R}^3$, constructed by using a generalized function of slow growth, is considered. In the case when the generalized function is a measure of length on the certain smooth curve, we prove that, because of multifold hits of Wiener trajectory in $\mathbb{R}^3$ on the curve, it is possible to drop in dimension to 2, where the local time of self-intersection exists after renormalization. In the case of the generalized function of slow growth of order $m \geq 0$, the renormalization of self-intersection local time for Wiener process in $\mathbb{R}^3$ is found and it's existence as an element of a certain space of Wiener functionals is proved.