Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2015. — Т.12

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2015. — V.12

ПРО ОБМЕЖУЮЧІ УЗАГАЛЬНЕНІ РЕТРАКТИ

НАЗАР ПИРЧ

Присвячено 60-річчю від дня народження Ігора Йосиповича Гурана

Українська Академія Друкарства, м. Львів, Україна

Н. Пирч. *Про обмежуючі узагальнені ретракти* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2015. — Т.12. — С. 41–51.

У статті подано застосування теорії вільних топологічних груп до вивчення обмежуючих G-ретрактів.

N. Pyrch, *On bounding generalized retracts*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **12** (2015), 41–51.

In the paper we apply the theory of free topological groups to studying bounding G-retracts of the Tychonoff spaces.

1. Вступ

Ми продовжуємо дослідження узагальнених ретрактів, які пов'язані з продовженнями неперервних відображень у топологічні групи, що були розпочаті у роботах [3] та [4] Ми вивчаємо модифікацію поняття G-ретракту — поняття обмежуючого G-ретракту. Властивість підпростору бути обмежуючим G-ретрактом є сильнішою за властивість бути G-ретрактом, але слабшою за властивість бути ретрактом. У роботі побудовано приклади, що відділяють поняття обмежуючого G-ретракту від понять G-ретракту та ретракту. Наведено приклад простору, який не є обмежуючим G-ретрактом жодної топологічної групи, а це узагальнює відповідні результати О.В. Сіпачової [5] та В. В. Успенського [7]. У другому розділі ми досліджуємо загальні властивості обмежуючих G-ретрактів та встановлюємо методи побудови обмежуючих G-ретрактів.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 22A05 *УДК:* 512.546
Ключові слова та фрази: free topological group, bounding G-retract, M-equivalence, cellularity
E-mail: pnazar@ukr.net

У третьому розділі ми подаємо застосування узагальнених ретрактів до побудови просторів з топологічно ізоморфними вільними топологічними групами, а також будуємо приклад G-ретракту, що не є обмежуючим G-ретрактом.

Нехай X — тихоновський простір. Через $F(X)$ будемо позначати вільну топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $A(X)$ — вільну абелеву топологічну групу простору X у сенсі Маркова, через $L(X)$ — вільний локально-опуклий простір над X. (див. [5] та [8]). Для топологічного простору X через X^+ будемо позначати простір отриманий з простору X додаванням однієї ізольованої точки.

Означення 1.1. Підпростір Y топологічного простору X називається *G-ретрактом* (відп. *G_A-ретрактом*) топологічного простору X, якщо кожне неперервне відображення $f : Y \to H$ у довільну віддільну топологічну (абелеву) групу H продовжується до неперервного відображення $\bar{f} : X \to H$.

Означення 1.2. Підпростір Y топологічного простору X називається *L-ретрактом* топологічного простору X, якщо кожне неперервне відображення з топологічного простору Y довільний лінійний топологічний простір неперервно продовжується на X.

Для підмножини A групи G та натурального числа n введемо позначення: $A^{\pm} = A \cup A^{-1}$ і $A^{\pm n} = (A \cup A^{-1})^n \subset G$.

Означення 1.3. Підпростір Y топологічного простору X називається *обмежуючим G-ретрактом* (відп. *обмежуючим G_A-ретрактом*) топологічного простору X, якщо довільне неперервне відображення $f : Y \to H$ у віддільну топологічну (абелеву) групу H продовжується до неперервного відображення $f : X \to H$ такого, що $f(X) \subseteq h(Y)^{\pm n}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Безпосередньо з цих означень випливає, що кожен ретракт є обмежуючим G-ретрактом, а кожен обмежуючий G-ретракт є G-ретрактом.

Нехай X — тихоновський простір і $w \in F(X)$ – елемент його вільної топологічної групи. Через $l(w)$ будемо позначати довжину незвідного запису слова w в алфавіті X. Через $F(X)_n$ будемо позначати множину слів у $F(X)$ довжина яких не перевищує n. Аналогічну підмножину у вільній абелевій топологічній групі $A(X)$ будемо позначати через $A(X)_n$. Для тихоновського простору X розглянемо підмножину у $L(X)$:

$$L(X)_n = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, x_1, \ldots, x_n \in X\}.$$

Означення 1.4. Топологічні простори X та Y називаються

- *сильно M-еквівалентними* ($X \overset{M}{\simeq} Y$), якщо існує такий топологічний ізоморфізм $i : F(X) \to F(Y)$, що $i(X) \subseteq F(Y)_n$ та $i^{-1}(Y) \subseteq F(X)_m$ для деяких натуральних n та m;

- *сильно A-еквівалентними* ($X \overset{A}{\simeq} Y$), якщо існує такий топологічний ізоморфізм $i: A(X) \to A(Y)$, що $i(X) \subseteq A(Y)_n$ та $i^{-1}(Y) \subseteq A(X)_m$ для деяких натуральних n та m;
- *сильно L-еквівалентними* ($X \overset{L}{\simeq} Y$), якщо існує такий лінійний гомеоморфізм $i: L(X) \to L(Y)$, що $i(X) \subseteq L(Y)_n$ та $i^{-1}(Y) \subseteq L(X)_m$ для деяких натуральних n та m;

2. Загальні властивості та методи побудови обмежуючих G-ретрактів

Скажемо, що підпростір Y топологічного простору X є *P-вкладеним* у простір X, якщо довільна неперервна псевдометрика задана на просторі Y неперервно продовжується на X. Як було встановлено у [5], підпростір Y тихоновського простору X є P-вкладеним у простір X тоді і тільки тоді, коли підгрупа $F_X(Y)$ вільної топологічної групи $F(X)$, породжена множиною Y, топологічно ізоморфна вільній топологічній групі $F(Y)$. Під вільною топологічною групою ми будемо розуміти топологічну групу, яка топологічно ізоморфна вільній топологічній групі деякого тихоновського простору X.

Теорема 2.1. *Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору X та його підпростору Y:*

(1) Підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом у X.

(2) Для деякого натурального числа n_1 існує такий неперервний гомоморфізм $h_1: F(X) \to F(Y)$, що $h_1(y) = y$ для всіх $y \in Y$ та $l(h_1(w)) \leq n_1\, l(w)$ для всіх слів $w \in F(X)$.

(3) Для деякого натурального числа n_2 існує таке неперервне відображення $h_2: F(X) \to F(Y)$, що $h_2(y) = y$ для всіх $y \in Y$ та $l(h_2(w)) \leq n_2\, l(w)$ для всіх $w \in F(X)$.

(4) Для деякого натурального числа n_3 існує таке неперервне відображення $h_3: X \to F(Y)_{n_3}$, що $h_3(y) = y$ для всіх $y \in Y$.

(5) Підпростір Y є P-вкладеним в X і для деякого натурального числа n_4 існує такий неперервний гомоморфізм $h_4: F(X) \to F_X(Y)$, що $h_4(y) = y$ для всіх $y \in Y$ та $l(h_4(w)) \leq n_4\, l(w)$ для всіх $w \in F(X)$.

(6) Для деякого натурального числа n_5 існує таке неперервне відображення $h_5: F(X) \to F_X(Y)$, що $h_5(y) = y$ для всіх $y \in Y$ та $l(h_5(w)) \leq n_5 l(w)$ для всіх $w \in F(X)$.

(7) Довільне неперервного відображення $h: Y \to G$ у вільну топологічну групу G можна продовжити до неперервного відображення $f: X \to G$ такого, що $f(X) \subseteq h(Y)^{\pm n}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (4): Вкладення $i: Y \to F(Y)$ топологічного простору Y у його вільну топологічну групу $F(Y)$ ми, за означенням обмежуючого G-ретракту, можемо продовжити до неперервного відображення $h_3\colon X \to F(Y)$ такого, що $h_3(X) \subseteq i(Y)^{\pm n}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Залишилося зауважити, що $i(Y)^{\pm n} = F(Y)_n$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Нехай $f : Y \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу G і $\bar{f}\colon F(Y) \to G$ – його продовження до неперервного гомоморфізму топологічних груп. Тоді композиція $\tilde{f} = \bar{f} \circ h_3 : X \to G$ має потрібну властивість: $\tilde{f}|_Y = f$ і $f(X) \subseteq \bar{f}(F(Y)_{n_3}) = f(Y)^{\pm n_3}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4): В якості константи n_3 можна взяти n_2. Відображення h_3 отримується як звуження відображення h_2 на множину X. Тоді для всіх $x \in X$ маємо $l(h_3(x)) = l(h_2(x)) \le n_2 l(x) = n_2 \cdot 1 = n_2$, звідки $h_3(X) \subseteq F(Y)_{n_2}$.

(4) $\Rightarrow$ (2): Гомоморфізм h_1 можна отримати як канонічне продовження відображення h_4. Тоді за константу n_2 можна взяти константу n_4.

(3) $\Rightarrow$ (5): Якщо виконано умову (3), то підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом у X. Як було встановлено у [3], якщо Y є G-ретрактом простору X, то Y є P-вкладеним у X, а тому підгрупа $F_X(Y)$ вільної топологічної групи $F(X)$ є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y)$, і в якості гомоморфізму h_5 можна взяти гомоморфізм h_2, за константу n_5 — константу n_2.

(5) $\Rightarrow$ (2): Якщо Y є P-вкладеним у X, а то підгрупа $F_X(Y)$ вільної топологічної групи $F(X)$ є топологічно ізоморфною вільній топологічній групі $F(Y)$, і в якості гомоморфізму h_2 можна взяти гомоморфізм h_5, за константу n_2 — константу n_5.

Імплікації (5) $\Rightarrow$ (6) та (4) $\Leftrightarrow$ (7) очевидні. □

Будемо говорити, що підпростір Y топологічного простору X є *обмежуючим L-ретрактом* простору X, якщо існує таке лінійне відображення $h\colon L(X) \to L(Y)$, що $h(y) = y$ для всіх $y \in Y$ і $h(X) \subseteq L(Y)_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Твердження аналогічне до теореми 2.1 справедливе також для абелевих топологічних груп та локально опуклих просторів.

Наслідок 2.2. *Якщо простір X є обмежуючим G-ретрактом простору Y, а простір Y є обмежуючим G-ретрактом простору Z, то простір X є обмежуючим G-ретрактом простору Z.*

Доведення. Оскільки простір Y є обмежуючим G-ретрактом простору Z, то існує неперервне відображення $f : Z \subseteq F(Y)_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$, що продовжує тотожне вкладення $Y \subset F(Y)_1$. Аналогічно, для обмежуючого G-ретракту $X \subset Y$ існує неперервне відображення $g : Y \to F(X)_m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. За означенням вільної топологічної групи, відображення g єдиним чином продовжується для неперервноо групового гомоморфізму $\bar{g} : F(Y) \to F(X)$, для якого $\bar{g}(F(Y)_n) \subset F(X)_{nm}$. Тоді композиція $\bar{g} \circ f : Z \to F(X)_{n,m}$ є шуканим відображенням, яке свідчить, що X є обмежуючим G-ретрактом простору Z. □

Зауваження 2.3. Для кожного тихоновського простору X, для кожного натурального n підпростір є X обмежуючим G-ретрактом простору $F(X)_n$.

Твердження 2.4. *Якщо простір X є псевдокомпактним, то кожен G-ретракт цього простору буде обмежуючим G-ретрактом цього простору.*

Доведення. Нехай Y — G-ретракт простору X. Тоді існує неперервне відображення $f : X \to F(Y)$ таке, що $f(y) = y$ для всіх $y \in Y$. Оскільки неперервний образ псевдокомпактного простору є псевдокомпактним простором, то простір $f(X)$ є псевдокомпактним. Тому, за наслідком 7.5.4 з [8], маємо, що $f(X) \subseteq F(Y)_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, за теоремою 2.1, отримаємо, що підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом в X. □

Твердження 2.5. *Якщо простір Y є G-ретрактом псевдокомпактного простору X, то простір Y є псевдокомпактним.*

Доведення. Нехай $f : Y \to \mathbb{R}$ — неперервна дійснозначна функція. Оскільки $\mathbb{R}$ є топологічною групою і Y є G-ретрактом X, то функція f продовжується до неперервної функції $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$, яка обмежена за псевдокомпактністю X. Тому функція f також обмежена, що свідчить про псевдокомпактність простору Y. □

Теорема 2.6. *Нехай $r_1 : X \to K_1$ і $r_2 : X \to K_2$ — ретракції топологічного простору X, такі, що $r_1 \circ r_2(X) = r_2 \circ r_1(X)$. Тоді підпростір $K_1 \cup K_2$ є обмежуючим G-ретрактом в X.*

Доведення. Нехай $f : K_1 \cup K_2 \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору $K_1 \cup K_2$ у топологічну групу G . Розглянемо відображення $f_1 : X \to G$, означене формулою

$$f_1(x) = f(r_1(x)) \cdot f(r_2(r_1(x)))^{-1} \cdot f(r_2(x)).$$

Нехай $x \in K_1$. Тоді $r_1(x) = x$ і

$$f_1(x) = f(r_1(x)) \cdot f(r_2 \circ r_1(x))^{-1} \cdot f(r_2(x)) = f(x) \cdot f(r_2(x))^{-1} \cdot f(r_2(x)) = f(x).$$

Нехай $x \in K_2$. Тоді $r_1(x) = r_1 \circ r_2(x)$. Оскільки $r_1 \circ r_2(X) = r_2 \circ r_1(X)$, то $r_1 \circ r_2(x) \in K_2$. Отже, $r_2 \circ r_1(x) = r_2 \circ r_1 \circ r_2(x) = r_1 \circ r_2(x) = r_1(x)$, а тому

$$f_1(x) = f(r_1(x)) \cdot f(r_2 \circ r_1(x))^{-1} \cdot f(r_2(x)) = f(r_1(x)) \cdot f(r_1(x))^{-1} \cdot f(x) = f(x).$$

Отже, $f_1(x) = f(x)$ для всіх $x \in K_1 \cup K_2$. За побудовою

$$f_1(X) \subseteq (f(K_1 \cup K_2))^{-1} \cdot f(K_1 \cup K_2) \cdot (f(K_1 \cup K_2))^{-1} \subseteq (f(K_1 \cup K_2))^{\pm 3}.$$

Тобто, $K_1 \cup K_2$ є обмежуючим G-ретрактом в X. □

Наслідок 2.7. *Нехай X, Y — топологічні простори, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Тоді операції проектування $r_1(x,y) = (x_0, y)$ і $r_2(x,y) = (x, y_0)$ є ретракціями простору $X \times Y$ такими, що $r_1 \circ r_2(X \times Y) = r_2 \circ r_1(X \times Y) = \{(x_0, y_0)\}$. Отже, підпростір $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ є обмежуючим G-ретрактом топологічного простору $X \times Y$.*

Приклад 2.8. Із наслідку 2.7 випливає, що множина

$$K = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{Q})$$

є обмежуючим G-ретрактом топологічного простору $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. З іншого боку, із міркувань зв'язності випливає, що K не є ретрактом простору $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.

Для тихоновського простору X позначимо через $C_p^*(X)$ простір неперервних обмежених дійснозначних функцій, заданих на X, у топології поточкової збіжності.

Твердження 2.9. *Якщо підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом тихоновського простору X, то існує таке неперервне лінійне відображення $\varphi\colon C_p^*(Y) \to C_p^*(X)$, що $\varphi(f)|_Y = f$ для всіх $f \in C_p^*(Y)$.*

Доведення. Якщо підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом тихоновського простору X, то існує неперервне відображення $h\colon X \to F(Y)_n$ для деякого натурального n. Розглянемо дуальний лінійний неперервний оператор $h^* : C_p^*\big(F(Y)_n\big) \to C_p^*(X)$, $h^* : \varphi \mapsto \varphi \circ h$. За означенням вільної топологічної групи, кожна неперервна обмежена функція $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ продовжується до єдиного неперервного групового гомоморфізму $\bar{\varphi} : F(Y) \to \mathbb{R}$. Відображення $E : C_p^*(Y) \to C_p^*(F(Y)_n)$, $E : \varphi \mapsto \bar{\varphi}|F(Y)_n$, є коректно визначеним неперервним лінійним оператором продовження. Тоді композиція $h^* \circ E : C_p^*(Y) \to C^*(X)$ є лінійним неперервним оператором, що продовжує функції з Y на X. □

3. Обмежуючі G-ретракти та ізоморфізми вільних топологічних груп

Нехай підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом тихоновського простору X. Тоді існує неперервний гомоморфізм $h\colon F(X) \to F(Y)$ такий, що $h(y) = y$ для всіх $y \in Y$ і $h(X) \subseteq F(Y)_n$ для деякого натурального n. Підгрупа $F_X(Y)$ топологічної групи $F(X)$ породжена множиною твірних Y буде топологічно ізоморфною $F(Y)$, а тому відображення h ми можемо також розглядати як гомоморфну ретракцію $h\colon F(X) \to F_X(Y)$. В силу цього введемо наступне

Означення 3.1. Скажемо що підпростори K_1 і K_2 є *паралельними обмежуючими G-ретрактами* топологічного простору X, якщо існують такі гомоморфізми $R_1\colon F(X) \to F(K_1)$ і $R_2\colon F(X) \to F(K_2)$, що $R_1 \circ R_2 = R_1$, $R_2 \circ R_1 = R_2$ і $R_1(X) \subseteq F(K_1)_n$, $R_2(X) \subseteq F(K_2)_m$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$.

Аналогічним чином можна означити поняття паралельних обмежуючих G_A-ретрактів та паралельних обмежуючих L-ретрактів.

Нагадаємо [9], що сюр'єктивне неперервне відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами X, Y називається $\mathbb{R}$-*факторним*, якщо для довільної функції $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ з неперервності композиції $\varphi \circ f$ випливає неперервність φ. Згідно з [9] для довільного сюр'єктивного відображення $f : X \to Y$ з топологічного простору X у множину Y на множині існує єдина цілком регулярна топологія, при якій відображення f є $\mathbb{R}$-факторним. Простір Y наділений цією топологією називається $\mathbb{R}$-фактор-простором простору X при відображенні. Для підмножини K простору X через X/K позначатимемо $\mathbb{R}$-фактор-простір множини при відображенні $q : X \to (X \setminus K) \cup \{K\} = X/K$, що склеює множину K в точку $\{K\}$.

Теорема 3.2. *Нехай K_1 і K_2 — паралельні обмежуючі G-ретракти простору X. Тоді $\mathbb{R}$-факторні простори X/K_1 та X/K_2 є сильно M-еквівалентними.*

Доведення. Розглянемо відображення $i\colon X \to F(X)$ означене як $i(x) = R_1(x) \cdot x^{-1} \cdot R_2(x)$, де R_1, R_2 – гомоморфізми з Означення 3.1. Позначимо через $I\colon F(X) \to F(X)$ продовження відображення i до гомоморфізму вільних топологічних груп. Покажемо, що гомоморфізм I є топологічним ізоморфізмом. Нехай $x \in X$, $R_1(x) = z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \cdots z_n^{\varepsilon_n}$ де $z_j \in K_1$, $R_2(x) = y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \cdots y_m^{\mu_m}$ де $y_j \in K_2$. Тоді $i(x) = R_1(x) \cdot x^{-1} \cdot R_2(x) = z_1^{\varepsilon_1} z_2^{\varepsilon_2} \cdots z_n^{\varepsilon_n} x^{-1} y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \cdots y_m^{\mu_m}$. Розглянемо композицію

$$I \circ i(x) = I(z_1^{\varepsilon_1} \cdots z_n^{\varepsilon_n} x^{-1} y_1^{\mu_1} \cdots y_m^{\mu_m}) = \\ = I(z_1)^{\varepsilon_1} \cdots I(z_n)^{\varepsilon_n} I(x)^{-1} I(y_1)^{\mu_1} \cdots I(y_m)^{\mu_m}.$$

Оскільки $I(z_j) = R_1(z_j) \cdot z_j^{-1} \cdot R_2(z_j) = z_j \cdot z_j^{-1} \cdot R_2(z_j) = R_2(z_j)$, то

$$I(z_1^{\varepsilon_1} \cdots z_n^{\varepsilon_n}) = R_2(z_1)^{\varepsilon_1} \cdots R_2(z_n)^{\varepsilon_n} = R_2(z_1^{\varepsilon_1} \cdots z_n^{\varepsilon_n}) = R_2 \circ R_1(x) = R_2(x).$$

Аналогічно перевіряється, що $I(y_1)^{\mu_1} \cdots I(y_m)^{\mu_m} = R_1 \circ R_2(x) = R_1(x)$. Тому $I \circ i(x) = R_2(x) \cdot R_2(x)^{-1} \cdot x \cdot R_1(x)^{-1} \cdot R_1(x) = x$ для всіх $x \in X$. Таким чином $I \circ I = 1_{F(X)}$, тобто $I(x)$ є топологічним ізоморфізмом групи $F(X)$.

Якщо $x \in K_1$, то

$$I(x) = R_1(x) \cdot x^{-1} \cdot R_2(x) = x \cdot x^{-1} \cdot R_2(x) = R_2(x) \in G(K_2).$$

Аналогічно для всіх $x \in K_2$ маємо, що $I(x) = R_1(x) \in G(K_1)$.

Позначимо через $p_i \colon X \to X/K_i$ — $\mathbb{R}$-факторні відображення, та через $p_i^* \colon F(X) \to F(X/K_i)$ — їхні гомоморфні продовження. За теоремою 1.10 та лемою 2.3 з роботи [10] існує ізоморфізм $j \colon F(X/K_1) \to F(X/K_2)$ такий, що $p_2^* \circ I = j \circ p_1^*$.

Тоді $j(X/K_1) = p_2^* \circ i(X) \subseteq p_2^*(F(X)_n) \subset F(X/K_2)_n$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Аналогічно доводиться, що $j^{-1}(X/K_2) \subseteq F(X/K_1)_m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. □

Наслідок 3.3. *Нехай підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом топологічного простору X. Тоді $X^+ \overset{M}{\simeq} Y \oplus X/Y$.*

Наслідок 3.4. *Нехай підпростір Y є обмежуючим G-ретрактом топологічного простору X. Тоді $X \overset{M}{\simeq} Y \vee X/Y$.*

Теорема 3.2, а також її наслідки будуть справедливими, якщо у їх формулюваннях усюди замінити поняття обмежуючого G-ретракту на поняття обмежуючого G_A-ретракту (обмежуючого L-ретракту), а відношення сильної M-еквівалентності на відношення сильної A-еквівалентності (сильної L-еквівалентності).

Твердження 3.5. *Нехай $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, що зберігається відношенням M-еквівалентності та при переході від букету двох просторів до кожного з його складників. Тоді топологічна властивість $\mathcal{P}$ зберігається при переході від тихоновського простору до його G-ретракту.*

Доведення. Нехай підпростір K є G-ретрактом тихоновського простору X, який володіє властивістю $\mathcal{P}$. Тоді властивістю $\mathcal{P}$ володіє простір $K \vee X/K$, який є M-еквівалентним до простору X, а отже властивістю $\mathcal{P}$ володіє простір K. □

Наслідок 3.6. *Нехай Y є G-ретрактом тихоновського простору X, що має n компонент зв'язності. Тоді простір має не більше ніж n компонент зв'язності.*

Цілком аналогічно доводяться наступні твердження:

Твердження 3.7. *Нехай $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, що зберігається відношенням A-еквівалентності та при переході від букету двох просторів до кожного з його складників. Тоді топологічна властивість $\mathcal{P}$ зберігається при переході від тихоновського простору до його G_A-ретракту.*

Твердження 3.8. *Нехай $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, що зберігається відношенням сильної M-еквівалентності та при переході від букету двох просторів до кожного з його складників. Тоді топологічна властивість $\mathcal{P}$ зберігається при переході від тихоновського простору до його обмежуючого G-ретракту.*

Твердження 3.9. *Нехай $\mathcal{P}$ — топологічна властивість, що зберігається відношенням сильної A-еквівалентності та при переході від букету двох просторів до кожного з його складників. Тоді топологічна властивість $\mathcal{P}$ зберігається при переході від тихоновського простору до його обмежуючого G_A-ретракту.*

Для топологічного простору X його *числом Сусліна* $c(X)$ називають нескінченний кардинал, який рівний точній верхній грані потужностей диз'юнктних сімей відкритих множин в X.

Наслідок 3.10. *Нехай Y є обмежуючим L-ретрактом тихоновського простору X. Тоді $c(Y) \leq c(X)$.*

Доведення. Як було встановлено у [6] число Сусліна зберігається відношенням сильної L-еквівалентності. Тому для довільного тихоновського простору X та його L-ретракту Y справджується нерівність $c(Y) \leq c(Y \vee X/Y) = c(X)$ □

Наведемо приклад тихоновського простору X та його G-ретракту Y, такого, що Y не є обмежуючим L-ретрактом простору X.

Приклад 3.11. Нехай X — псевдокомпактний тихоновський простір з незліченним числом Сусліна $c(X)$. Як було встановлено у [7] $c(F(X)) = \omega$. Отже, за наслідком 3.10 підпростір X не є обмежуючим G-ретрактом простору $F(X)$. Як випливає з означення вільної топологічної групи, кожен тихоновський простір X є G-ретрактом своєї вільної топологічної групи $F(X)$. Тому X є G-ретрактом, але не є обмежуючим L-ретрактом простору простору $F(X)$.

Твердження 3.12. *Наступні умови є еквівалентними для тихоновського простору X:*

(1) простір X є обмежуючим G-ретрактом деякої топологічної групи;
(2) простір X є обмежуючим G-ретрактом своєї топологічної групи $F(X)$;
(3) X є обмежуючим G-ретрактом у кожному тихоновському просторі Y, що містить X як G-ретракт.

Доведення. (2) $\Rightarrow$ (1): Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (2): Випливає з того, що кожен тихоновський простір X є G-ретрактом своєї вільної топологічної групи.

(1) $\Rightarrow$ (3): Нехай простір X є обмежуючим G-ретрактом топологічної групи H. Нехай також $f_1 \colon X \to G_1$ — неперервне відображення з топологічного простору X у топологічну групу G_1. Тоді існує таке відображення $f_2 \colon H \to G_1$, що $f_2(H) \subseteq f_1(X)^{\pm n}$ для деякого натурального n. Нехай Y – тихоновський простір, що містить X як G-ретракт. Тоді тотожне вкладення $t \colon X \to H$ продовжується до неперервного відображення $T \colon Y \to H$. Покладемо $f_3 = f_2 \circ T$. Тоді $f_3(x) = f_2(T(x)) = f_2(x) = f_1(x)$ для кожного $x \in X$ і $f_3(Y) = f_2(T(Y)) = f_2(H) \subseteq f_1(X)^{\pm n}$.

Тобто, простір X є обмежуючим G-ретрактом у Y. □

Кожен тихоновський простір є G-ретрактом топологічної групи (зокрема, своєї вільної топологічної групи). Покажемо, що не кожен тихоновський простір вкладається як обмежуючий G-ретракт у деяку топологічну групу.

Приклад 3.13. Як випливає з твердження 3.12 простір X є обмежуючим G-ретрактом деякої топологічної групи тоді і тільки тоді коли X є обмежуючим G-ретрактом своєї вільної топологічної групи $F(X)$. Нехай X — псевдокомпактний простір такий, що $c(X) > \omega$. Тоді X не є обмежуючим G-ретрактом своєї вільної топологічної групи, а отже X не є обмежуючим G-ретрактом жодної топологічної групи.

Тихоновський простір X, що задовольняє умовам твердження 3.12 назвемо *b-ретральним*. Як випливає з наслідку 2.2, обмежуючий G-ретракт b-ретрального простору b-ретральним простором.

Узагальнюючи викладене у прикладі 3.13 сформулюємо наступне твердження.

Твердження 3.14. *Кожен псевдокомпактний b-ретральний простір X має зліченне число Сусліна.*

Зауваження 3.15. Якщо X — незліченний дискретний простір, то його вільна топологічна група $F(X)$ також дискретна і тому X є ретрактом у $F(X)$. Цей приклад показує, що умова псевдокомпактності є суттєвою в останньому твердженні.

Зауваження 3.16. Якщо для деякого натурального n підпростір $F(X)_n$ є ретрактом простору $F(X)$, то простір X буде обмежуючим G-ретрактом вільної топологічної групи $F(X)$. З прикладу 3.13 та наслідків 2.2 та 3.10, отримаємо що для псевдокомпактного простору X з незліченним числом Сусліна підпростір $F(X)_n$ не є обмежуючим G-ретрактом простору $F(X)$ для жодного натурального n.

Приклад 3.17. Нехай K — топологічний простір, означений у прикладі 2.8. Оскільки простір K є обмежуючим G-ретрактом топологічної групи $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, то за твердженням 3.12 простір K є обмежуючим G-ретрактом своєї вільної топологічної групи $F(K)$. Оскільки K is G-ретрактом, але не ретрактом простору $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, за твердженням 2 з [3], простір K не є ретрактом своєї вільної топологічної групи $F(K)$.

Скажемо, що топологічний простір X є *абсолютним обмежуючим G-ретрактом*, якщо X є обмежуючим G-ретрактом довільного тихоновського простору Y, що містить X як замкнений підпростір.

Теорема 3.18. *Кожен абсолютний обмежуючий G-ретракт X має зліченне число Сусліна.*

Доведення. Оскільки простір X є абсолютним обмежуючим G-ретрактом, то простір є абсолютним G-ретрактом, а тому є компактним (див. [4]), а тому $c(F(X)) = \omega$. Оскільки простір X є обмежуючим ретрактом в $F(X)$, то $c(X) \leq c(F(X)) = \omega$. □

Результати цієї статті анонсувалися на міжнародній конференції [11].

ЛІТЕРАТУРА

1. А.А. Марков, *О свободных топологических группах*, Известия АН СССР, Сер. мат. **9**:1 (1945), 3–64.
2. О.Г. Окунев, *M-эквивалентность произведений*, Труды Московского Математического общества, **56** (1995), 192–205.
3. Н.М. Пирч, *Узагальнені ретракти, пов'язані з топологічними групами*, Вісник НУ Львівська політехніка, фіз.-мат. **601** (2007), 54–58.
4. Н.М. Пирч, *Узагальнені ретракти і ізоморфізми вільних топологічних груп*, Математичні студії. **31**:1 (2010), 29–38.
5. О.В. Сипачева, *Топология свободной топологической группы*, Фундаментальная и прикладная математика, **9**:2 (2003), 99–204.
6. В.В. Ткачук, *Двойственость относительно функтора C_p и кардинальные инварианты типа числа Суслина*, Математические заметки, **37**:3. (1985), 441–451.
7. В.В. Успенский, *Топологическая группа, порожденная линделефовым Σ-пространством, обладает свойством Суслина* , Доклады АН СССР, **265**:4 (1982), 823–825.
8. A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, (2008), 781 p.
9. S.M. Karnik, S. Willard, *Natural covers and R-quotient maps*, Canad. Math. Bull. **25**:4 (1982), 456–461.
10. O.G. Okunev, *A method for consructing examples of M-equivalent spaces*, Topology and its Applications **36** (1990), 157–171; Correction: Topology and its Applications **49** (1993), 191–192.
11. N.M. Pyrch, *On generalized retracts and cardinal functions*, Int. Conf. dedicated to 120th birthday of Stefan Banach, Lviv, 2012, c.107.

Надійшло 20.02.2015

Після переробки 20.09.2015