ПРО УСЕРЕДНЕННЯ ПОЧАТКОВОЇ І КРАЙОВОЇ ЗАДАЧ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

©2008 р. Ярослав БІГУН

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 16 вересня 2008 р.

Розглядається система із повільними та швидкими змінними, що залежать від довільного числа лінійно перетворених аргументів. Будується явно залежна від малого параметра оцінка відповідного цій системі осциляційного інтеграла. На підставі одержаної оцінки обґрунтовується метод усереднення за швидкими змінними для системи з початковими і крайовими умовами.

1. Застосування методу усереднення для систем із повільними та швидкими змінними дозволяє відокремити змінні і перейти до розв'язання задач меншої вимірності. Якщо в таких системах виникають резонансні явища, то математичне обгрунтування методу усереднення значно ускладнюється і вперше для двочастотних систем такий результат одержаний В.І.Арнольдом [1]. Для систем із числом частот $m > 2$ запропоновано схеми усереднення й дано їх обгрунтування в роботах Є.О.Гребенікова [2], М.М.Хапаєва [3] та ін., але перевірити умови відповідних тверджень надзвичайно складно. У праці [4] А.М.Самойленко запропонував підхід, який ґрунтується на оцінці відповідного осциляційного інтеграла. Вдалося одержати непокращувані (порядку $O(\varepsilon^{1/m})$) оцінки при виконанні досить простих умов, наприклад, що вронскіан за деякою системою функцій не дорівнює нулю. Такий підхід розвинутий для широких класів багаточастотних систем й підсумований у монографії А.М.Самойленка і Р.І.Петришина [5].

УДК 517.929, MSC 2000: 34K10, 34K25

Для систем із запізненням в роботах [6], [7] та ін. запропоновано схеми усереднення, які враховують специфіку відхилення аргументу в швидких змінних та побудовано оцінки похибки методу, які явно залежать від малого параметра ε. Зокрема, для систем із одним лінійно перетвореним аргументом такі результати одержано в [8], [9].

В даній роботі розглядаються m-частотні системи з довільним числом лінійно перетворених аргументів та обгрунтовується метод усереднення для випадків початкових, двоточкових та інтегральних крайових умов.

2. Нехай $\tau \in [0, L]$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| := |x_1| + \cdots + |x_n|$, $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_r < 1$, $x_{\theta_\nu}(\tau) = x(\theta_\nu \tau)$, $\nu = 1, \ldots, r$, $x_\Theta(\tau) := \mathrm{col}\,(x(\tau), x_{\theta_1}(\tau), \ldots, x_{\theta_r}(\tau))$ й аналогічне позначення для $\varphi_\Theta(\tau)$, $G := [0, L] \times D^{r+1} \times \mathbb{R}^{m(r+1)} \times [0, \varepsilon_0]$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon), \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon), \tag{1}$$

де $X\colon G \to \mathbb{R}^n$, $Y\colon G \to \mathbb{R}^m$, $\omega\colon [0, L] \to \mathbb{R}^m$, вектор-функції X і Y 2π-періодичні за кожною компонентою вектора φ_Θ. Змінну x прийнято називати повільною, а φ – швидкою.

Усереднена за швидкими змінними система набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = X_0(\tau, x_\Theta), \tag{2_1}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, x_\Theta), \tag{2_2}$$

де

$$A_0(\tau, x_\Theta) := [X_0, Y_0] = \frac{1}{(2\pi)^{(r+1)m}} \int\limits_0^{2\pi} A(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, 0) d\varphi_\Theta.$$

Система (2) значно простіша, ніж (1), оскільки рівняння для $\overline{x}$ не залежить від $\overline{\varphi}$, а знаходження $\overline{\varphi}$ зводиться до задачі інтегрування.

Умовою резонансу частот у точці τ в системі (1) служить виконання рівності

$$\gamma_{kl}(\tau) := (k, \omega(\tau)) + \theta_1(l^{(1)}, \omega(\theta_1\tau)) + \cdots + \theta_r(l^{(r)}, \omega(\theta_r\tau)) = 0, \tag{3}$$

$l := \mathrm{col}\,(l^{(1)}, \ldots, l^{(r)})$, $\|k\| + \|l\| \neq 0$.

Умова (3) узагальнює умову резонансу частот $(k, \omega(\tau)) = 0$ для систем без запізнення [5] і відповідну умову для системи з одним лінійно перетвореним аргументом [6].

3. Дослідимо спочатку питання про близькість розв'язків систем (1) і (2) на проміжку $[0, L]$ з однаковими початковими умовами. Для цього розглянемо відповідний (1) осциляційний інтеграл

$$I_{kl}(\tau, \varepsilon) := \int_0^\tau f(s, \varepsilon) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_0^s \gamma_{kl}(s_1) ds_1\right\} ds, \tag{4}$$

де $\|k\| + \|l\| \neq 0$, $i^2 = -1$, вектор-функція f визначається правими частинами системи (1).

Розглянемо осциляційний інтеграл загальнішого вигляду

$$I_\Lambda(\tau, t, \bar{t}, \varepsilon) := \int_t^{t+\tau} f(s, \varepsilon) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{t}}^s \gamma_\Lambda(s_1) ds_1\right\} ds, \tag{5}$$

де $(\tau, t, \bar{t}, \varepsilon) \in [0, L] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0]$, $\Lambda := \mathrm{col}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, $\lambda_r \in \mathbb{R}^m$, $\|\Lambda\| \neq 0$.

Нехай $\omega_\nu \in C^{p-1}(\mathbb{R})$, $p \geq m(r+1)$, а $W_p(\tau)$ – $p \times m(r+1)$-матриця, m перших стовпців якої утворені елементами $\dfrac{d^j \omega_\nu(\tau)}{d\tau^j}$, $\nu = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, p-1$, наступні m стовпців $\dfrac{d^j \omega_\nu(\theta_1 \tau)}{d\tau^j}$ і т.д. Зокрема, для $p = m(r+1)$ $\det W_p(\tau)$ – визначник Вронського, побудований за системою функцій $\{\omega(\tau), \omega(\theta_1 \tau), \ldots, \omega(\theta_r \tau)\}$. Наприклад, для $m = 1$ і $r = 2$ маємо

$$W_3(\tau) = \begin{bmatrix} \omega(\tau) & \omega(\xi_1) & \omega(\xi_2) \\ \dfrac{d\omega(\tau)}{d\xi} & \theta_1 \dfrac{d\omega(\xi_1)}{d\xi_1} & \theta_2 \dfrac{d\omega(\xi_2)}{d\xi_2} \\ \dfrac{d^2\omega(\tau)}{d\xi^2} & \theta_1^2 \dfrac{d^2\omega(\xi_1)}{d\xi_1^2} & \theta_2^2 \dfrac{d^2\omega(\xi_2)}{d\xi_2^2} \end{bmatrix}$$

де $\xi_1 = \theta_1 \tau$, $\xi_2 = \theta_2 \tau$.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

$\mathbf{1^0}$. Функції $\omega_\nu \in C^{p-1}(\mathbb{R})$, $p \geq m(r+1)$, і ω_ν^j – рівномірно неперервні на $\mathbb{R}$, $\nu = 1, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, p-1$.

$\mathbf{2^0}$. $\|(W_p^T(\tau) W_p(\tau))^{-1} W_p(\tau)\| \leq \sigma_1$, $\tau \in \mathbb{R}$.

3⁰. Вектор-функція $f : \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_0] \mapsto \mathbb{R}^n$ і $f(\cdot, \varepsilon) \in C^1(\mathbb{R})$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* 1^0 – 3^0. *Тоді для досить малого* $\varepsilon_0 > 0$ *можна вказати сталу* $c_1 > 0$, *незалежну від* τ, t, $\bar{t}$, ε *і* Λ *таку, що для всіх* $\tau \in [0, L]$, $t, \bar{t} \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і* $\Lambda \neq 0$ *справджується нерівність*

$$\|I_\Lambda(\tau, t, \bar{t}, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{\frac{1}{p}} \Big[\Big(1 + \frac{1}{\|\Lambda\|_\theta}\Big) \sup_{G_t} \|f(s, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|\Lambda\|_\theta} \sup_{G_t} \Big\| \frac{df(s, \varepsilon)}{ds} \Big\| \Big], \quad (6)$$

де $\|\Lambda\|_\theta = \|k\| + \theta_1 \|l_1\| + \cdots + \theta_r \|l_r\|$.

Доведення. Побудова оцінки осциляційного інтеграла грунтується на тому, що резонансна частота $\gamma_\Lambda(\tau)$ маже залишатися малою тільки на проміжку часу довжиною $O(\varepsilon^{1/p})$. У свою чергу це зводиться до оцінки знизу $|\gamma_\Lambda(s)|$ або $\Big|\dfrac{d^\nu \gamma_\Lambda(s)}{ds^\nu}\Big|$ для $\nu = 1, \ldots, p-1$.

Нехай: $\Lambda_\theta = col(\lambda_0, \theta_1 \lambda_1, \ldots, \theta_r \lambda_r)$,

$$\Omega_\Lambda(s) := \Big(\gamma_\Lambda(s), \frac{d\gamma_\Lambda(s)}{d\tau}, \ldots, \frac{d^{p-1}\gamma_\Lambda(s)}{d\tau^{p-1}}\Big).$$

Тоді

$$\Omega_p(s) = W_p(s) \Lambda_\theta,$$

звідки випливає, що

$$\Lambda_\theta = (W_p^T(s) W_p(s))^{-1} W_p^T(s) \Omega_\Lambda(s).$$

На підставі умови **2⁰** маємо:

$$\|\Omega_\Lambda(s)\| \geq \frac{\|\Lambda\|_\theta}{\sigma_1} \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Звідси випливає, що для кожного $s \in \mathbb{R}$ знайдеться $q = q(s, \Lambda)$, $0 \leq j \leq p-1$, таке, що

$$|\gamma_\Lambda^{(q)}(s)| \geq \frac{\|\Lambda_\theta\|}{p\sigma_1}.$$

Продовживши тепер схему доведення, запропоновану для систем без запізнення в [5] і застосовану для рівнянь із запізненням в [6], одержимо оцінку (6).

4. Нехай $v(\tau, y, \psi, \varepsilon) := [x(\tau, y, \psi, \varepsilon), \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$, $[x(0, y, \psi, \varepsilon), \varphi(0, y, \psi, \varepsilon)] = [y, \psi]$, $\overline{x}(\tau, y, \psi, \varepsilon) := [\overline{x}(\tau, y), \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon)]$; $\theta_0 = 1$, $l^{(0)} = k$,

$\bar{l} := [k, l]$. Покажемо, що при досить малому $\varepsilon_1 > 0$ на проміжку $[0, L]$ виконується нерівність

$$\|v(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{v}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \tag{7}$$

де $c_2 > 0$ і не залежить від ε.

Доведення наступного твердження будується за схемою доведення інтегральної нерівності, наведеної в [10].

Лема 1. *Нехай стала $d \geq 0$, невід'ємні скалярні функції u, f, $g_\nu \in C([t_0, T], R_+)$, $\nu = 1, \ldots, r$; функції $\alpha_\nu \in C^1([t_0, T), [t_0, T])$ і $\alpha(t) \leq t$, коли $t \in [t_0, T)$. Якщо*

$$u(t) \leq a + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)u(s)ds + \sum_{\nu=1}^{r} \int\limits_{\alpha_\nu(t_0)}^{\alpha_\nu(t)} g_\nu(s)u(s)ds, t_0 \leq t \leq T,$$

то

$$u(t) \leq a \exp\Big[\int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds + \sum_{\nu=1}^{r} \int\limits_{\alpha_\nu(t_0)}^{\alpha_\nu(t)} g_\nu(s)ds\Big].$$

Наслідок. Якщо f і g_ν – деякі невід'ємні сталі, $t_0 = 0$ і $\alpha_\nu(t) = \theta_\nu t$, $\theta_\nu \in (0, 1)$, $\nu = 1, \ldots, r$, то для $t \in [0, T]$

$$u(t) \leq a \exp\Big[f + \sum_{\nu=1}^{r} \theta_\nu g_\nu\Big] t.$$

Теорема 2. *Нехай:*

1) функції $\omega_\nu \in C^{p-1}[0, L]$, $\nu = 1, \ldots, m$, $p \geq m(r+1)$, $\det(W_p^T(\tau) W_p(\tau)) \neq 0$ для $t \in [0, L]$;

2) $A \in C^1_{\tau, x^{(j)}}(G, \sigma_2)$, $j = 0, \ldots, r$, $x^{(\nu)}(\tau) = x(\theta_\nu \tau)$, сталою σ_2 обмежена вектор-функція A та її похідні в G;

3) в області $G_1 = [0, L] \times D^{r+1}$ для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції $A(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, 0)$ справджується нерівність

$$\sum_{\bar{l} \neq 0} \Big[\Big(\sum_{\nu=0}^{r} \theta_\nu \|l^{(\nu)}\|\Big) \sup_{G_1} \|A_{\bar{l}}(\tau, x_\Theta)\| + \frac{1}{\|\bar{l}\|}\Big(\sup_{G_1}\Big\|\frac{\partial A_{\bar{l}}}{\partial \tau}\Big\| +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r} \theta_\nu \sup_{G_1} \Big\|\frac{\partial A_{\bar{l}}}{\partial x^{(\nu)}}\Big\|\Big)\Big] \leq \sigma_3;$$

4) $\|A(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon) - A(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, 0)\| \le \sigma_4 \varepsilon^\beta$*,* $\beta \ge p^{-1}$*;*

5) існує єдиний розв'язок $\overline{x} = \overline{x}(\tau, y)$*,* $y \in D_0 \subset D$*, рівняння* (2_1)*, який лежить в* D *разом із деяким* ρ*-околом.*

Тоді для досить малого $\varepsilon_1 > 0$ *існує єдиний розв'язок* $v = v(\tau, y, \psi, \varepsilon)$ *системи (1) такий, що для всіх* $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_1]$ *виконується нерівність (7).*

Доведення. Із систем (1) і (2) маємо

$$\|v(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{v}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \le \int\limits_0^\tau \|A(s, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon) - A(s, x_\Theta, \varphi_\Theta, 0)\| ds +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \|A_0(\tau, x_\Theta) - A_0(\tau, \overline{x}_\Theta)\| ds +$$

$$+ \sum_{\|\bar{l}\| \ne 0} \Big\| \int\limits_0^\tau f_{\bar{l}}(s, \varepsilon) \exp\Big\{ \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{\bar{l}}(s_1) ds_1 \Big\} ds \Big\| \equiv S_1 + S_2 + S_3,$$

де

$$f_{\bar{l}}(s, \varepsilon) := A_{\bar{l}}(s, x_\Theta) \exp\Big\{ i(\bar{l}, \varphi_\Theta) - \frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^s \gamma_{\bar{l}}(s_1) ds_1 \Big\}.$$

Оцінимо кожен із доданків S_1, S_2 і S_3. З умови 4 випливає, що

$$S_1 \le \sigma_4 \tau \varepsilon^\beta \le \sigma_4 L \varepsilon^{1/p}. \tag{8}$$

На підставі умови 2 одержимо

$$S_2 \le \sigma_2 \sum_{\nu=0}^{r} \frac{1}{\theta_\nu} \int\limits_0^{\theta_\nu \tau} \|x(s, y, \psi, \varepsilon) - \overline{x}(s, y)\| ds. \tag{8}$$

Для оцінки інтегралів у сумі S_3 застосуємо нерівність (6). Маємо:

$$\|f_{\bar{l}}(s, \varepsilon)\| \le \sup_{G_1} \|A_{\bar{l}}(s, \overline{x}_\Theta)\|,$$

$$\Big\| \frac{df_{\bar{l}}(s, \varepsilon)}{ds} \Big\| \le \sup_{G_1} \Big\| \frac{\partial A_{\bar{l}}}{\partial \tau} \Big\| + \sigma_2 \sum_{\nu=0}^{r} \theta_\nu \sup_{G_1} \Big\| \frac{\partial A_{\bar{l}}}{\partial x^{(\nu)}} \Big\| + \sigma_2 \sup_{G_1} \|A_{\bar{l}}\| \sum_{\nu=0}^{r} \theta_\nu \|l^{(\nu)}\|,$$

Для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ із нерівності (5) одержимо

$$S_3 \le c_1 \varepsilon^{\frac{1}{p}} \sum_{\bar{l} \neq 0} \Big[1 + \frac{\sigma_2}{\|\bar{l}\|_\theta} \sum_{\nu=0}^{r} \theta_\nu \|l^{(\nu)}\| \sup_{G_1} \|A_{\bar{l}}\| + \frac{1}{\|l\|_\theta} \Big(\sup_{G_1} \Big\| \frac{\partial A_{\bar{l}}}{\partial \tau} \Big\| +$$

$$+ \sigma_2 \sum_{\nu=0}^{r} \theta_\nu \sup_{G_1} \Big\| \frac{\partial A_{\bar{l}}}{\partial x^{(\nu)}} \Big\| \Big) \Big] \le c_1(1+\sigma_2)\sigma_3 \varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

На підставі нерівностей (8), (9) та оцінки для S_3 одержимо

$$\|v(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \overline{v}(\tau, y, \psi, \varepsilon)\| \le$$

$$\le c_2 \varepsilon^{\frac{1}{p}} + \sigma_2 \sum_{\nu=0}^{r} \frac{1}{\theta_\nu} \int_0^{\theta_\nu \tau} \|v(s, y, \psi, \varepsilon) - \overline{v}(s, y, \psi, \varepsilon)\| ds, \tag{10}$$

де $c_2 = \sigma_2 L + c_1(1 + \sigma_2\sigma_3$. Нехай $\varepsilon_1 = \min\Big(\varepsilon_0, \Big(\frac{\rho}{2c_2}\Big)^p\Big)$. Тоді розв'язок системи (1) можна продовжити до $\tau = L$ і з нерівності (10) на підставі наслідку з леми 1 одержимо оцінку (7). Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо одночастотну систему

$$\frac{dx}{d\tau} = \cos(\varphi + 8\varphi_{\theta_1} - 6\varphi_{\theta_2}), \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}(1 + 2\tau + a\tau^2),$$

де $2\theta_1 = \theta_2 = 1/2$, $a = 24/19$, $x(0) = x_0$, $\varphi(0) = 0$. Усереднена задача для повільної змінної

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = 0, \quad \overline{x}(0) = x_0.$$

Оскільки $\gamma_\theta(\tau) = 9\tau^2/19$, то в системі є резонанс при $\tau = 0$. На проміжку $[0, 1]$ відхилення повільних змінних на підставі асимптотики інтеграла Френеля [11] маємо

$$x(1, x_0) - \overline{x}(1, x_0) = \int_0^1 \cos \frac{t^3}{\varepsilon} dt = \frac{\sqrt{3}}{6} \Gamma(\frac{1}{3}) \sqrt[3]{\varepsilon} + o(\sqrt[3]{\varepsilon}).$$

Умова 1 теореми 2 виконується, оскільки відповідний визначник Вронського дорівнює 3/19.

5. Крайова задача. Розглянемо систему (1) із крайовими умовами

$$A_1(\varepsilon) x|_{\tau=0} + A_2(\varepsilon) x|_{\tau=L} + \int_0^L f(\tau, x_\Theta, \varphi_\Theta, \varepsilon) d\tau = d_1, \tag{11}$$

$$B_1(\varepsilon)\varphi|_{\tau=0}+B_2(\varepsilon)\varphi|_{\tau=L}+\int\limits_0^L[C(\tau)\varphi+g(\tau,x_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon)]d\tau=d_2, \qquad (12)$$

де $A_\nu(\varepsilon)$ і $B_\nu(\varepsilon)$ – n- і m-матриці відповідно, $\nu=1,2$, $d_1\in\mathbb{R}^n$, $d_2\in\mathbb{R}^m$, вектор-функції f і g задовольняють ті ж умови, що й A, $C(\tau)$ – m-матриця.

В задачі (1), (11), (12) усереднюється за швидкими змінними як сама система, так і крайові умови. В підсумку одержимо систему (2) і крайові умови вигляду:

$$A_1(\varepsilon)\overline{x}|_{\tau=0}+A_2(\varepsilon)\overline{x}|_{\tau=L}+\int\limits_0^1 f_0(\tau,\overline{x}_\Theta,\varepsilon)d\tau=d_1, \qquad (13)$$

$$B_1(\varepsilon)\overline{\varphi}|_{\tau=0}+B_2(\varepsilon)\overline{\varphi}|_{\tau=L}+\int\limits_0^1[A(\tau)\overline{\varphi}+g_0(\tau,\overline{x}_\Theta,\varepsilon)]d\tau=d_2. \qquad (14)$$

Тепер, незалежно від $\overline{\varphi}$, можна розв'язати крайову задачу (2_1), (13), а знаходження $\overline{\varphi}=\overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)$ звести до задачі інтегрування.

Лема 2. *Нехай для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $\overline{x}=\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)$, $\overline{x}(0,\overline{y},\varepsilon)=\overline{y}$, крайової задачі (2_1), (13) і*

$$\det Q(\varepsilon)\neq 0, \quad Q(\varepsilon)=B_1(\varepsilon)+B_2(\varepsilon)+\int\limits_0^L A(s)ds.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (2_2), (14), який має вигляд

$$\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi};\varepsilon)=Q^{-1}(\varepsilon)\Big(d_2-B_2(\varepsilon)\overline{\varphi}(L,\overline{y},0,\varepsilon)-$$

$$-\int\limits_0^L[A(\tau)\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},0,\varepsilon)+g_0(s,\overline{x}_\Theta(\tau,\overline{y},\varepsilon))]\Big)d\tau.$$

Доведення леми зводиться до знаходження із (14) початкового значення $\overline{\psi}$ для розв'язку $\overline{\varphi}=\varphi(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)$ системи (2_2).

Позначимо через $D(\varepsilon)$

$$A_1(\varepsilon)+A_2(\varepsilon)\frac{\partial\overline{x}(L,\overline{y},\varepsilon)}{\partial\overline{y}}+\sum_{\nu=0}^{r}\int\limits_0^L\frac{\partial f_0(\tau,\overline{x}_\theta(\tau,\overline{y},\varepsilon),\varepsilon)}{\partial x^\nu}\frac{\partial\overline{x}_\nu(\tau,\overline{x}_\theta(\tau,\overline{y},\varepsilon),\varepsilon)}{\partial y}d\tau.$$

Теорема 3. *Нехай: 1) виконується умова 1 теореми 2;*

2) вектор-функція $F{:=}\ [X,Y,f,g]$ двічі неперервно диференційовна за змінними $[\tau, x_\Theta]$ в області G,

$$F \in C^{q_1}_{\varphi\Theta}, \frac{\partial F}{\partial \tau} \in C^{q_2}_{\varphi\Theta}, \frac{\partial F}{\partial x_\Theta} \in C^{q_2}_{\varphi\Theta},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial x_\Theta} \in C^{q_3}_{\varphi\Theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_\Theta \partial x_{\Theta,\nu}} \in C^{q_2}_{\varphi\Theta}, \nu = 1, \ldots, m(r+1),$$

$$\min(q_1 - 2, q_2 - 1, q_3) \geq m(r+1),$$

функція F та її похідні обмежені в G сталою σ_2;

3) для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ існує єдиний розв'язок крайової задачі (2), (13), (14) і $\overline{x} = \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)$ крива лежить в D разом із деяким ρ-околом;

4) $\|D^{-1}(\varepsilon)\| \leq \sigma_5$, $\|D^{-1}(\varepsilon)A_2(\varepsilon)\| \leq \overline{\sigma}_5$, $\|Q^{-1}(\varepsilon)\| \leq \sigma_6$, $\|Q^{-1}(\varepsilon)B_2(\varepsilon)\| \leq \overline{\sigma}_6$.

Тоді існує $c_3 > 0$ з таке $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, що для кожного$\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ в малому околі розв'язку усередненої задачі існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (11), (12) і для $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_2]$ виконується нерівність

$$\|v(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{v}(\tau, \overline{y}, \overline{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_3 \varepsilon^{\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

Доведення. Нехай D_0 – множина тих точок $\overline{y} \in D$, для яких розв'язок задачі (2_1), (11) $\overline{x} = \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon) \in D - \rho\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ і $\overline{y} + \mu \in D_0$, $\tilde{x}(\tau) = \tilde{x}(\tau, \overline{y} + \mu, \varepsilon)$, $\rho_1 = \rho/2$. Тоді, як випливає з (2_1),

$$\|\tilde{x}(\tau, \overline{y} + \mu, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)\| \leq c_4 \|\mu\| \leq \rho_1, \tag{16}$$

якщо $\|\mu\| \leq \rho_1 c_4^{-1}$, $c_4 = \exp(\sigma_2(r+1)L)$.

Із теореми 2 випливає, що для досить малого $\varepsilon_1 > 0$ та $\xi \in \mathbb{R}^m$ існує єдиний розв'язок $v = v(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)$ системи (1) і

$$\|v(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon) - \overline{v}(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{\frac{1}{p}}. \tag{17}$$

Покажемо, що знайдуться такі $\mu(\xi, \varepsilon)$ і $\xi(\varepsilon)$, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, розв'язок $v = v(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)$ задовольняє крайові умови (11), (12).

Підставивши $v(\tau, \overline{y} + \mu, \overline{\psi} + \xi, \varepsilon)$ в (11) і врахувавши (14) одержимо

$$A_1(\varepsilon)\mu + A_2(\varepsilon)(x - \tilde{x}) + A_2(\varepsilon)(\tilde{x} - \overline{x}) +$$

$$+\int_0^L [f(s,x_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon)-f(s,\overline{x}_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon)]ds+\int_0^L [f_0(s,\tilde{x}_\Theta,\varepsilon)-f_0(s,\overline{x}_\Theta,\varepsilon)]ds+$$

$$+\sum_{\bar{l}\neq 0}\int_0^L f_{\bar{l}}(s,\tilde{x}_\Theta,\varepsilon)\exp[i(\bar{l},\varphi_\Theta)]ds.$$

Звідси знаходимо $\mu = M_1(\mu,\psi,\varepsilon)$, де

$$M_1 := -D^{-1}(\varepsilon)\Big[\sum_{\nu=0}^{r}\int_0^L \frac{\partial f_0}{\partial x^{(\nu)}}(s,\overline{x}_\Theta(s,\overline{y},\varepsilon),\varepsilon)(x_\nu-\tilde{x}_\nu)+\int_0^L (f(s,x_\theta,\varphi_\theta,\varepsilon)-$$

$$-f(s,\tilde{x}_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon))ds+A_2(\varepsilon)(x-\tilde{x})|_{\tau=L}+$$

$$+\sum_{\bar{l}\neq 0}\int_0^L f_{\bar{l}}(s,\overline{x}_\Theta,\varepsilon)\exp[i(\bar{l},\varphi_\Theta)]ds+R_1(\mu)\Big].$$

Із умови гладкості функції F маємо

$$\|R_1\|\le c_5\|\mu\|^2,\quad c_5=c_5(\sigma_2). \tag{18}$$

на підставі оцінки (7) для функції F, нерівностей (6) і (7) одержимо

$$\|M_1(\mu,\psi,\varepsilon)\|\le 2(r+1)c_1\sigma_1\sigma_5 L\varepsilon^{\frac{1}{p}}+\overline{\sigma}_5 c_1\varepsilon^{\frac{1}{p}}+c_5\sigma_5\|\mu\|^2+$$

$$+\sigma_5\sum_{\bar{l}\neq 0}\Big\|\int_0^L f_{\bar{l}}(s,\tilde{x}_\Theta,\varepsilon)\exp[i(\bar{l},\varphi_\Theta)]ds\Big\|\le c_6\varepsilon^{\frac{1}{p}}+c_7\|\mu\|^2,$$

де $c_6=c_1(2(r+1)\sigma_1\sigma_5 L+\overline{\sigma}_5+(1+\sigma_2)\sigma_3\sigma_5)$, $c_7=c_5c_6$.

Нехай $R_1(\varepsilon)=c_8\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, $c_8=2c_6$, $\varepsilon\le\overline{\varepsilon}_2=\min(\varepsilon_1,(4c_6c_7)^{-p})$. Тоді

$$\|M_1(\mu,\xi,\varepsilon)\|\le R_1(\varepsilon)$$

для всіх $\mu\in S_1:=\{\mu:\ \|\mu\|\le R_1(\varepsilon)\}$ і $\xi\in\mathbb{R}^m$.

Покажемо, що M_1 – відображення стиску. Маємо

$$\frac{\partial M_1}{\partial\mu}=-D^{-1}(\varepsilon)\Big[\sum_{\nu=0}^{r}\int_0^L \frac{\partial f_0}{\partial x^{(\nu)}}(s,\overline{x}_\Theta,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\mu}(x^{(\nu)}-\tilde{x}^{(\nu)})+A_2(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\mu}(x-\tilde{x})|_{\tau!=L}+$$

$$+\int\limits_0^L \Big(\frac{\partial f(s,x_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon)}{\partial x_\Theta}-\frac{\partial f(s,\tilde{x}_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon)}{\partial x_\Theta}\Big)\frac{\partial\varphi_\Theta}{\partial\overline{\mu}}ds+\frac{\partial R_1(\mu)}{\partial\mu}\Big].$$

Умова 2 дозволяє отримати оцінку, аналогічну (7) і для похідних за $\overline{y}$ і $\overline{\psi}$ для відхилення розв'язків $x-\overline{x}$ і $\varphi-\overline{\varphi}$ [7]. Тому, врахувавши таку оцінку та нерівність

$$\Big\|\frac{\partial R_1(\mu)}{\partial\mu}\Big\|\le c_9\|\mu\|,$$

одержимо

$$\Big\|\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\Big\|\le c_{10}\varepsilon^{\frac{1}{p}}+c_{11}\|\mu\|=(c_{10}+c_{11}c_8)\varepsilon^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{2},\varepsilon\in(0,\overline{\overline{\varepsilon}}_2)$$

де $\overline{\overline{\varepsilon}}_2=\min(\overline{\varepsilon}_2,2(c_{10}+c_8c_{11})^{-p})$.

Таким чином, на підставі теореми про стискаючі відображення, для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і $\xi\in\mathbb{R}^m$ існує єдина нерухома точка $\mu=\mu(\xi,\varepsilon)$ і задовольняється крайова умова (11).

Аналогічно, із крайових умов (15) і (17) знаходимо

$$\xi=M_2(\xi,\varepsilon),$$

$$M_2(\xi,\varepsilon):=-Q^{-1}(\varepsilon)\Big[B_2(\varepsilon)\Big((\varphi-\tilde{\varphi})|_{\tau=L}+\overline{\varphi}(L,\overline{y}+\mu,0,\varepsilon)-\overline{\varphi}(L,\overline{y},0,\varepsilon)\Big)+$$

$$+\int\limits_0^L C(\tau)(\varphi-\tilde{\varphi})ds+\int\limits_0^L C(s)(\overline{\varphi}(s,\overline{y}+\mu,0,\varepsilon)-\overline{\varphi}(s,\overline{y},0,\varepsilon))ds+$$

$$+\int\limits_0^L(g(\tau,x_\theta,\varphi_\theta,\varepsilon)-g(\tau,\tilde{x}_\theta,\varphi_\theta,\varepsilon))ds+\int\limits_0^L(g_0(\tau,\tilde{x}_\Theta,\varepsilon)-g_0(\tau,\overline{x}_\Theta,\varepsilon))ds+$$

$$+\sum_{\overline{l}\ne0}\int\limits_0^L g_{\overline{l}}(\tau,\tilde{x}_\Theta,\varepsilon)\exp[i(\overline{l},\varphi_\Theta)]ds\Big].$$

З умов 2, 4 теореми і нерівностей (6) і (8) маємо $\|M(\xi,\varepsilon)\|\le c_{13}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, де $c_{13}=[(c_2+c_{12})(\overline{\sigma}_6+\sigma_6\|\int\limits_0^L C(\tau)d\tau\|)+\sigma_6(c_{12}+c_1(1+\sigma_2))\sigma_3]$.

Нехай $\|\xi\|\le c_{13}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Тоді, для кожного $\varepsilon\in(0,\overline{\overline{\varepsilon}}_2]$ M_2: $S_2\to S_2$, де S_2 – куля з радіусом $R_2(\varepsilon)=c_{13}\varepsilon^{1/p}$.

Тепер нескладно одержується й оцінка

$$\Big\|\frac{\partial M_2(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}\Big\| \le c_{14}\varepsilon^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{2}, \tag{19}$$

якщо $\varepsilon \le \tilde{\varepsilon}_2 = (2c_{14})^{-p}$. Справді,

$$\frac{\partial M_2}{\partial\xi} = -Q^{-1}(\varepsilon)\Big[B_2(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi-\tilde{\varphi})|_{\tau=L} + \int\limits_0^L C(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}(\varphi-\tilde{\varphi})d\tau +$$

$$+\int\limits_0^L\Big(\frac{\partial}{\partial\xi}(g(\tau,x_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon)-g(\tau,\tilde{x}_\Theta,\varphi_\Theta,\varepsilon))\Big)ds+$$

$$+i\sum_{\bar{l}\ne 0}\int\limits_0^L g_{\bar{l}}(\tau,\overline{x}_\Theta,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\xi}(\bar{l},\varphi_\Theta)\exp[i(\bar{l},\varphi_\Theta)]ds\Big].$$

Скориставшись нерівностями (6), (7), одержимо оцінку (19). Отже, для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$, де $\varepsilon_2 = \min(\overline{\overline{\varepsilon}}_2;\tilde{\varepsilon}_2)$ існує єдина нерухома точка $(\mu(\xi(\varepsilon)\varepsilon),\xi(\varepsilon))$, звідки й випливає існування єдиного розв'язку задачі (1), (11), (12). Із (16), (17) одержимо

$$\|v(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{v}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\| \le \|v(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{v}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\|+$$

$$+\|\overline{v}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{v}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)\| \le c_2\varepsilon^{\frac{1}{p}} + c_4(\|\mu\|+\|\xi\|) \le c_3\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

де $c_3 = c_1 + c_4(c_8 + c_{13})$. Теорему доведено.

[1] Арнольд В.И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс // Докл. АН СССР. – 1965. – 161, № 1. – С. 9 – 12.

[2] Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 431 с.

[3] Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

[4] Самойленко А.М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 2. – С. 267 – 278.

[5] Самойленко А.М. Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

[6] Бигун Я.И., Самойленко А.М. Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8 – 14.

[7] Бігун Я.Й. Усереднення коливних систем із запізненням та інтегральними крайовими умовами // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 257 – 263.

[8] Бігун Я.Й. Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. – 2007. – 59, №4. - С. 435–446.

[9] Бігун Я.Й. Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 5 – 10.

[10] Lipovan O. A Retarded Gronwall-Like Inequality and Its Applications // J. of Math. Anal. and Appl. – 2000. – 252. – P.389—401.

[11] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука. – Том 2, 1974. – 295 с.

THE AVERAGING OF INITIAL AND BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH LINEARLY TRANSFORMED ARGUMENT

Yaroslav BIGUN

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

The system of initial and boundary-value problems with linearly transformed argument is being considered. The estimate for the appropriate system of oscillation integrals is being built. Under derived estimate, the averaging method of variable frequencies for the system of elementary and boundary-value conditions is being justified.