# ПРО ЛОГАРИФМІЧНУ ПОХІДНУ І ЦЕНТРАЛЬНИЙ ПОКАЗНИК РЯДУ ДІРІХЛЕ

*©2005 р. Олег СКАСКІВ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 25 січня 2005 р.

Отримано умови, достатні для асимптотичної рівності зовні виняткових множин логарифмічної похідної максимума модуля суми та центрального показника абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле.

Нехай $S_0(\lambda)$ — клас відмінних від експоненційних поліномів абсолютно збіжних у півплощині $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ є такою, що $0 = \lambda_0 < 1 \le \lambda_n \uparrow +\infty \, (n \uparrow +\infty)$. Для функції $F \in S_0(\lambda)$ при $\sigma < 0$ позначимо

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \ge 0\},$$

$$\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}, \quad \Lambda(\sigma) = \Lambda(\sigma, F) = \lambda_{\nu(\sigma)}.$$

Для абсолютно збіжних рядів Діріхле функція $\ln M(\sigma, F)$ є опуклою, тому для функції $F \in S_0(\lambda)$ правостороння похідна

$$(\ln M(\sigma, F))' = L(\sigma, F) = L(\sigma)$$

існує для всіх $\sigma < 0$ і є зростаючою функцією при $\sigma \to -0$.

---

УДК 517.53; MSC 2000: 30B50
Автор частково підтриманий INTAS, проект 99-00089

У роботах [1, 8] наведено ряд тверджень (теореми 1.5.25 і 1.6.25 з [8], теорема 5 та зауваження на с. 513 із [1]), у яких для рядів Діріхле $F \in S_0(\lambda)$ містяться достатні умови для справедливості при $\sigma \to -0$ зовні виняткових множин асимптотичної рівності

$$L(\sigma) = (1 + o(1))\Lambda(\sigma). \tag{2}$$

У статті [6] побудовано приклад функції $F \in S_0(\lambda)$, для якої умови згаданих вище тверджень з [1, 8] виконуються, проте, висновки — ні. Тобто, показано, що згадані твердження з [1, 8] є неправильними.

У цій статті вкажемо вигляд умов (теорема 4), які забезпечують справедливість асимптотичної рівності (2) при $\sigma \to -0$ зовні деякої виняткової множини. При цьому доведемо теорему про поведінку похідних ряду (1) в околах точок $z$ таких, що значення $|F(z)|$ є близьким до $M(\mathrm{Re}\, z, F)$. Відзначимо також природність задачі про встановлення зв'язку між $L(\sigma, F)$ та $\Lambda(\sigma)$, оскільки $L(\sigma, F)$, з одного боку, відіграє важливу роль у застосуваннях теорії Вімана-Валірона, а з іншого боку, відновити функцію $F$ (а, тим більше, обчислити $L(\sigma, F)$ ) за заданими послідовностями коефіцієнтів $(a_n)$ і показників $(\lambda_n)$ є досить складною задачею, що допускає пряме розв'язання лише у часткових випадках.

Важливу роль при вивченні співвідношення (2) відіграє поведінка залишку збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/(n\lambda_n)$. При цьому виявляється, що, як і у випадку цілих рядів Діріхле (див. [3, 10, 11]), умови, при виконанні яких справджуються зовні виняткових множин співвідношення $\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F)$ і співвідношення (2), в цілому, збігаються.

***Зауваження 1.*** *Співвідношення* (2) *отримується формальним диференціюванням співвідношення*

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F),$$

*і хоча нижче буде наведено (в іншому зв'язку) теорему, у якій стверджується, що нерівності можна, в деякому сенсі, на масивних множинах диференціювати, однак в загальному випадку невідомо, за яких умов нерівність, яка виконується для довільних опуклих функцій зовні малої виняткової множини, можна диференціювати.*

Нехай $L_0$ — клас невід'ємних неспадних на $[0; +\infty)$ функцій $v$ таких, що інтеграл Лебега–Стільтьєса $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dv(y)}{y} < +\infty$. Через $L$ позначимо клас додатних зростаючих до $+\infty$ на $[0;+\infty)$ функцій. Через $L_1$ позначимо клас функцій $l \in L$, для яких виконується умова Карамати $l(2t) = O(l(t))\,(t \to +\infty)$.

Для $\Phi \in L$ через $S_0(\lambda, \Phi)$ позначимо клас функцій $F \in S_0(\lambda)$, для яких

$$(\exists\, b > 0): \quad \varliminf_{\sigma \to -0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(b/|\sigma|)} > 0,$$

а для $\Phi_1 \in L$ через $S_0^*(\lambda, \Phi_1)$ позначимо клас функцій $F \in S_0(\lambda)$, для яких

$$(\exists\, b > 0): \quad \varliminf_{\sigma \to -0} \frac{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}{\Phi_1(b/|\sigma|)} > 0\,.$$

Зауважимо, що $S_0^*(\lambda, \Phi_1) \subset S_0(\lambda, \Phi)$ у випадку $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$. Якщо ж, наприклад, додатково припустити, що функція $\ln \Phi(t)/\ln^2 t$ не спадає при $t \to +\infty$, то й $S_0(\lambda, \Phi) \subset S_0^*(\lambda, \Phi_1)$, тобто $S_0(\lambda, \Phi) = S_0^*(\lambda, \Phi_1)$.

Через $\varphi$ і $\varphi_1$ всюди нижче позначаємо функції, обернені до функцій $\Phi$ і $\Phi_1$, відповідно.

Доведемо спочатку наступну теорему, яка містить оцінки загального члена ряду Діріхле через максимальний.

**Теорема 1.** *Нехай $\varphi_1 \in L_1$, $v \in L_0$ і $F \in S_0^*(\lambda, \Phi_1)$. Якщо*

$$\ln n = o(\lambda_n) \quad (n \to +\infty)$$

*і виконується умова*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int\limits_0^{\Phi_1(t)} \left( \int\limits_u^{+\infty} \frac{dv(x)}{x} \right) du = 0, \tag{3}$$

*то для всіх $n \geq 0$ і всіх $\sigma \in [-1; 0) \setminus E_1$ справджується нерівність*

$$|a_n| e^{\sigma \lambda_n} \leq \mu(\sigma, F) \exp\left( -\int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dv(t) \right), \tag{4}$$

*де $\Phi_1(t) = t\Phi(t)$, $\nu = \nu(\sigma, F)$, а $E_1$ — деяка множина нульової лівосторонньої щільності в точці $\sigma = 0$, тобто*

$$DE_1 \stackrel{\text{def}}{=} \varlimsup_{\sigma \to -0} \frac{1}{|\sigma|} \text{meas}\,(E_1 \cap [\sigma, 0)) = 0$$

*(тут* meas $E$ *— лебегова міра множини $E$ на прямій).*

***Доведення.*** Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $|a_0| = 1$. Тому $0 \le \ln \mu(\sigma, F) = \ln |a_{\nu(\sigma)}| - |\sigma| \lambda_{\nu(\sigma)}$, якщо $\sigma \in (-\infty; 0)$, звідки

$$|\sigma| \le \frac{1}{\lambda_{\nu(\sigma)}} \ln |a_{\nu(\sigma)}|, \quad \sigma \in (-\infty; 0). \tag{5}$$

З умови $F \in S_0^*(\lambda, \Phi_1)$ випливає, що для деякого $\sigma_1 \in [-1; 0)$ і для всіх $\sigma \in [\sigma_1; 0)$ для деякого $b_1 > 0$ виконується нерівність

$$\lambda_{\nu(\sigma - 0)} > b_1 \Phi_1 \left( \frac{b}{|\sigma|} \right). \tag{6}$$

З нерівностей (5), (6) і того, що $\varphi_1 \in L_1$, отримуємо, що для всіх $\sigma \in [\sigma_1; 0)$ і деякого $q > 0$

$$\ln |a_{\nu(\sigma)}| > \frac{b \lambda_{\nu(\sigma)}}{\varphi_1 \left( \frac{\lambda_{\nu(\sigma)}}{b_1} \right)} > \frac{q \lambda_{\nu(\sigma)}}{\varphi_1(\lambda_{\nu(\sigma)})}. \tag{7}$$

Виберемо тепер $\alpha(t) = -\int\limits_t^{+\infty} \frac{dv(u)}{u} \quad (t \ge 0)$, $\alpha_n = \exp \left( -\int\limits_0^{\lambda_n} \alpha(t) dt \right)$, $\tau_n = \alpha(\lambda_n) \quad (n \ge 0)$. Оскільки $\alpha(t) \nearrow 0 \ (t \to +\infty)$, то $(\tau_n)$ — неспадна послідовність і

$$|\tau_n| \le \frac{1}{\lambda_n} \ln \alpha_n \quad (n \ge 1). \tag{8}$$

Розглянемо функцію

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z \lambda_n}.$$

Враховуючи, що $\tau_n \to 0 \ (n \to +\infty)$ і те, що $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \left( -\frac{1}{\lambda_n} \ln |a_n| \right) = 0$ (див. [2, с. 85]), з нерівності (8) для абсциси $\sigma_a$ абсолютної збіжності отримуємо [2, с. 85], що

$$\sigma_a = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \left( -\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{|a_n|}{\alpha_n} \right) \ge \overline{\lim_{n \to +\infty}} \left( -\frac{1}{\lambda_n} \ln |a_n| + \tau_n \right) = 0.$$

Звідси випливає, що $f \in S_0(\lambda)$.

Доведемо тепер, що $\nu(\sigma, f) \to +\infty \ (\sigma \to -0)$. Справді, за умовою (3)

$$\ln \alpha_n = o\left(\Phi(\varphi_1(\lambda_n))\right) = o\left( \frac{\lambda_n}{\varphi_1(\lambda_n)} \right) \quad (n \to +\infty), \tag{9}$$

тому, враховуючи нерівність (7), дістанемо, що $\varliminf\limits_{n\to+\infty} (|a_n|/\alpha_n) = +\infty$. Звідси негайно отримуємо, що $\mu(\sigma, f) \to +\infty$ $(\sigma \to -0)$ і, тим більше, $\nu(\sigma, f) \to +\infty$ $(\sigma \to -0)$.

Нехай $(R_j)$ — послідовність точок стрибка $\nu(\sigma, f)$, занумерована так, що $\nu(\sigma, f) = j$ для $\sigma \in [R_j; R_{j+1})$ і $R_{j+1} = R_{j+2} = \cdots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$ у випадку $\nu(R_{j+1} - 0, f) = j$ та $\nu(R_{j+1}, f) = j + p$ $(p \geq 1)$.

Нехай тепер число $\sigma < 0$ є таким, що $(\sigma - \tau_j) \in [R_j; R_{j+1})$. З означення величини $\mu(\sigma, f)$ випливає, що $|a_n|e^{(\sigma-\tau_j)\lambda_n} \leq \mu(\sigma - \tau_j, f)$ $(n \geq 0)$, звідки, при $n \neq j$ маємо

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j|e^{\sigma\lambda_j}} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_j}\exp\left(\tau_j(\lambda_n - \lambda_j)\right) = \exp\left(-\int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j))dt\right) < 1.$$

Тому $\nu(\sigma, F) = j$ для $\sigma \in [R_j + \tau_j, R_{j+1} + \tau_j)$. Оскільки

$$\int\limits_a^b (\alpha(t) - \alpha(a))dt = \int\limits_a^b \frac{b-t}{t}dv(t),$$

то нерівність (4) справджується для всіх $n \geq 0$ і для всіх $\sigma \in \bigcup\limits_{j\in J}[R_j + \tau_j; R_{j+1} + \tau_j)$ (тут $J$ множина значень $\nu(\sigma, f)$), а тим більше для всіх $\sigma \in [-1; 0) \setminus E_1$, де $E_1 = \bigcup\limits_{j=0}^{+\infty}[R_{j+1} + \tau_j; R_{j+1} + \tau_{j+1})$.

Залишається оцінити міру множини $E_1$. Якщо $R_j < R_{j+1} = \cdots = R_{j+p} < R_{j+p+1}$ $(p \geq 1)$ і $\sigma \in [R_j + \tau_j; R_{j+1} + \tau_j)$, то

$$\text{meas}\ (E_1 \cap [\sigma; 0)) = \sum_{k=j}^{+\infty}(R_{k+1} + \tau_{k+1} - R_{k+1} - \tau_k) = |\tau_j|.$$

Якщо ж $\sigma \in [R_{j+1} + \tau_j; R_{j+1} + \tau_{j+p})$, то

$$\text{meas}\ (E_1 \cap [\sigma; 0)) \leq \text{meas}\ (E_1 \cap [R_{j+1} + \tau_j; 0)) = |\tau_j|.$$

Крім того, при $\sigma \in [R_j + \tau_j; R_{j+1} + \tau_{j+p})$, маємо $|\sigma| \geq |R_{j+1}| + |\tau_{j+p}| \geq |R_{j+1}| = |R_{j+1} + \tau_j| - |\tau_j|$, а тому

$$\frac{1}{|\sigma|}\text{meas}\ (E_1 \cap [\sigma; 0)) \leq \frac{|\tau_j|}{|R_{j+1} + \tau_j| - |\tau_j|}. \tag{10}$$

Пригадуючи, що $\nu(R_{j+1}+\tau_j-0,F)=j$, з нерівності (6) послідовно маємо

$$\frac{1}{|R_{j+1}+\tau_j|}\le\frac{1}{b}\varphi_1\left(\frac{\lambda_j}{b_1}\right)\le c\varphi_1(\lambda_j)\quad (j\to+\infty),$$

де $c\in(0;+\infty)$. Звідси та з (10), застосовуючи нерівності (8), (9), отримуємо

$$DE_1=\overline{\lim_{\sigma\to-0}}\frac{1}{|\sigma|}\mathrm{meas}\ (E_1\cap[\sigma;0))\le\overline{\lim_{j\to+\infty}}\left(\frac{\lambda_j}{c\varphi_1(\lambda_j)\ln\alpha_j}-1\right)^{-1}=0.$$

Теорему доведено.

Через $L_2$ позначимо клас функцій $\varphi_1\in L$ таких, що

$$\int\limits_{t_0}^{t}\frac{dx}{\varphi_1(x)}=O\left(\frac{t}{\varphi_1(t)}\right)\quad (t\to+\infty).$$

**Наслідок 1.** *Якщо $F\in S_0^*(\lambda,\Phi_1)$, $\varphi_1\in L_2$ і виконуються умови*

$$\lim_{t\to+\infty}t\sum_{\lambda_n\ge\Phi_1(t)}\frac{1}{n\lambda_n}=0, \tag{11}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln n(t)}{t}\varphi_1(t)=0, \tag{12}$$

*де $n(t)=\sum\limits_{\lambda_n\le t}1$ — лічильна функція послідовності $(\lambda_n)$, то знайдеться неперервна функція $c(x)\uparrow+\infty$ $(x\to+\infty)$ така, що для всіх $n\ge0$ і всіх $\sigma\in[-1;0)\setminus E_1$, де $DE_1=0$, правильна нерівність*

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\le\mu(\sigma,F)\exp\left(-\int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_n}t^{-2}(\lambda_n-t)c(4t)\ln n(4t)dt\right),\quad \nu=\nu(\sigma,F).$$

***Доведення.*** Перевіримо, чи можна застосувати теорему 1 з функцією $v(t)=\int\limits_0^t\frac{1}{x}c(4x)\ln n(4x)dx$, де $c(x)$ – деяка функція така, як у формулюванні наслідку.

Позначимо $l(t)=\int\limits_t^{+\infty}x^{-2}\ln n(x)dx$. Оскільки, при $A\to+\infty$

$$\sum_{\lambda_n\ge A}\frac{1}{n\lambda_n}=(1+o(1))\sum_{\lambda_n\ge A}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\lambda_n}, \tag{13}$$

$$\sum_{\lambda_n\ge A}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\lambda_n}=\int\limits_A^{+\infty}\frac{d\ln n(t)}{t}=-\frac{\ln n(A)}{A}+\int\limits_A^{+\infty}\frac{\ln n(t)}{t^2}dt,\qquad(14)$$

то завдяки умові (12), з умови (11) отримуємо, що

$$l(t)\varphi_1(t)=o(1)\quad(t\to+\infty).$$

Тому, визначивши функцію $l_\varphi(x)=\sup\{\varphi_1(t)l(t):\ t\ge x\}$ і функцію $c(x)$ так, щоб виконувалась нерівність

$$c(x)\le(\max\{l_\varphi(x);l_1(x)\})^{-1/2},$$

де

$$l_1(x)=\frac{\varphi_1(t)}{t}\int\limits_0^t\frac{\ln n(x)}{x}dx=o(1)\frac{\varphi_1(t)}{t}\int\limits_{t_0}^t\frac{dx}{\varphi_1(x)}=o(1)\quad(t\to+\infty),$$

послідовно при $t\to+\infty$ маємо

$$v(t)\le c(4t)\int\limits_0^{4t}\frac{\ln n(x)}{x}dx=c(4t)l_1(4t)\frac{4t}{\varphi_1(4t)}\le$$

$$\le 4(l_1(4t))^{1/2}\frac{t}{\varphi_1(4t)}=o\left(\frac{t}{\varphi_1(t)}\right),$$

а також

$$\int\limits_t^{+\infty}\frac{dv(x)}{x}=-\int\limits_t^{+\infty}c(4x)dl(4x)\le$$

$$\le-\frac{4}{\sqrt{\varphi_1(4t)}}\int\limits_t^{+\infty}\frac{dl(4x)}{\sqrt{l(4x)}}=\frac{8\sqrt{l(4t)}}{\sqrt{\varphi_1(4t)}}=o\left(\frac{1}{\varphi_1(t)}\right),$$

тому при $t\to+\infty$

$$\int\limits_0^t\left(\int\limits_u^{+\infty}\frac{dv(x)}{x}\right)du=t\int\limits_t^{+\infty}\frac{dv(x)}{x}+v(x)=o\left(\frac{t}{\varphi_1(t)}\right).$$

Отже, умови теореми 1 виконуються.

***Зауваження 2.*** *Оскільки з умови*

$$\lim_{t\to+\infty} t \int\limits_{\Phi_1(t)}^{+\infty} \frac{\ln n(x)}{x^2} dx = 0 \tag{15}$$

*випливає справедливість умови* (12), *а завдяки співвідношенням* (13), (14), *й умови* (11), *то у наслідку 1 замість умов* (11), (12) *можна вимагати лише виконання умови* (15).

***Зауваження 3.*** *Якщо* $c_1 \ln t \le \ln n(t) \le c_2 \ln t$, $c_1, c_2 > 0$, *то умови* (11), (12) *і* (15) *виконуються лише тоді, коли* $\varphi_1(t) = o(t/\ln t)$, *тобто* $t \ln \Phi_1(t) = o(\Phi_1(t))$ *або* $\ln t = o(\Phi(t))$ $(t \to +\infty)$.

Подібно, як у [11], позначимо:

$$T(x) = x\sqrt{\frac{44}{c(x)}}, \quad \mu(\sigma,\tau,F) = |a_\nu|e^{\tau\lambda_\nu}, \quad \nu = \nu(\sigma,F),$$

$$S_m(\sigma,\tau,F) = \sum_{|\lambda_n-\lambda_\nu|\ge T(\lambda_\nu)} \lambda_n^m |a_n| e^{\tau\lambda_n}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Наступна лема доводиться подібними міркуваннями, як аналогічна лема у [11] для цілих рядів Діріхле.

**Лема 1.** *Для всіх* $m \in \mathbb{Z}_+$, $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau - \sigma| < 1/T(\lambda_\nu)$ *при* $\nu \to +\infty$

$$\Sigma_0 \overset{def}{=} \sum_{|\lambda_n-\lambda_\nu|\ge T(\lambda_\nu)} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}\right)^m \exp\left(-I(\lambda_\nu,\lambda_n) + (\lambda_n-\lambda_\nu)(\tau-\sigma)\right) \le$$

$$\le (n(2\lambda_\nu))^{-9},$$

*де* $I(\lambda_\nu, y) = \int\limits_{\lambda_\nu}^{y} t^{-2}(y-t)c(4t)\ln n(4t)dt$, $\nu = \nu(\sigma,F)$.

З леми 1 за допомогою наслідку 1 негайно отримуємо наступну лему.

**Лема 2.** *За умов наслідку 1, при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_1,\ DE_1 = 0)$ *для всіх* $m \in \mathbb{Z}_+, \tau \in \mathbb{R}$ *таких, що виконується нерівність* $|\tau - \sigma| < 1/T(\lambda_\nu)$, *справедлива оцінка*

$$S_m(\sigma,\tau,F) \le \lambda_\nu^m \mu(\sigma,\tau,F)(n(2\lambda_\nu))^{-9}. \tag{16}$$

***Доведення леми 1.*** Оскільки похідна функції

$$\beta(y) = m\ln(y/\lambda_\nu) - I(\lambda_\nu, y) + (y-\lambda_\nu)(\tau-\sigma)$$

на проміжку $[0;\lambda_\nu - T(\lambda_\nu)]$ спадає, то враховуючи, що $T(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$ і $|\tau-\sigma| < 1/T(\lambda_\nu)$, для всіх $y \in [0;\lambda_\nu - T(\lambda_\nu)]$ при $\lambda_\nu \to +\infty$ одержуємо

$$\beta'(y) \ge \beta'(\lambda_\nu - T(\lambda_\nu)) \ge \frac{m}{\lambda_\nu - T(\lambda_\nu)} + \frac{c(2\lambda_\nu)T(\lambda_\nu)\ln n(2\lambda_\nu)}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - T(\lambda_\nu))} + (\tau-\sigma) \ge$$

$$\ge \frac{1}{T(\lambda_\nu)}\left(\frac{mT(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}(1+o(1)) + (44+o(1))\ln n(2\lambda_\nu) - 1\right) > 0.$$

Звідси випливає, що функція $\beta(y)$ зростає на $[0;\lambda_\nu - T(\lambda_\nu)]$. Тому при $\lambda_\nu \to +\infty$ для $|\tau-\sigma| < 1/T(\lambda_\nu)$, $m \in \mathbb{Z}_+$ маємо

$$\Sigma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n \le \lambda_\nu - T(\lambda_\nu)} \exp\left(\beta(\lambda_n)\right) \le n(\lambda_\nu)\exp\left(\beta(\lambda_\nu - T(\lambda_\nu))\right) \le$$

$$\le n(\lambda_\nu)\exp\left(1 - \left(-\ln\left(1 - \frac{T(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}\right) - \frac{T(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}\right)c(2\lambda_\nu)\ln n(2\lambda_\nu)\right) \le$$

$$\le (n(2\lambda_\nu))^{-20}. \tag{17}$$

Оскільки при $\lambda_n > \lambda_\nu$

$$I(\lambda_\nu, \lambda_n) \ge c(4\lambda_\nu)\left(\frac{\lambda_n - \lambda_\nu}{\lambda_\nu} - \ln\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}\right)\ln n(4\lambda_\nu)\ ,$$

то при $\lambda_n \ge \lambda_\nu + T(\lambda_\nu)$, $\lambda_\nu \to +\infty$ для $|\tau-\sigma| < 1/T(\lambda_\nu)$,$m \in \mathbb{Z}_+$ отримуємо

$$m\ln\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu} + (\tau-\sigma)(\lambda_n - \lambda_\nu) \le m\ln\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu} + \frac{\lambda_n - \lambda_\nu}{T(\lambda_\nu)} = o\left(I(\lambda_\nu, \lambda_n)\right).$$

Звідси, враховуючи, що функція $I(\lambda_\nu, y)$ на $[\lambda_\nu + T(\lambda_\nu);+\infty)$ зростає, при $\lambda_\nu \to +\infty$ послідовно одержуємо

$$\Sigma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda_n \ge \lambda_\nu + T(\lambda_\nu)} \exp\left(\beta(\lambda_n)\right) \le \sum_{\lambda_n \ge \lambda_\nu + T(\lambda_\nu)} \exp\left(-\frac{1}{2}I(\lambda_\nu, \lambda_n)\right) \le$$

$$\le \left(\sum_{\lambda_\nu + T(\lambda_\nu) \le \lambda_n \le 2\lambda_\nu} + \sum_{\lambda_n > 2\lambda_\nu}\right)\exp\{-\frac{1}{2}I(\lambda_\nu, \lambda_n)\} \le$$

$$\le n(2\lambda_\nu)\exp\left(-\frac{1}{2}I(\lambda_\nu,\lambda_\nu+T(\lambda_\nu)\right)+$$

$$+\sum_{\lambda_n>2\lambda_\nu}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda_n/2}^{\lambda_n}\frac{\lambda_n-t}{t^2}c(4t)\ln n(4t)dt\right)\le$$

$$\le n(2\lambda_\nu)\exp\left(-\frac{1+o(1)}{4}c(4\lambda_\nu)\left(\frac{T(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}\right)^2\ln n(4\lambda_\nu)\right)+$$

$$+\sum_{\lambda_n>2\lambda_\nu}\exp\left(-\frac{1}{2}(1-\ln 2)c(2\lambda_n)\ln n(2\lambda_n)\right)\le\exp(-(11+o(1))\ln n(4\lambda_\nu)).$$

Оскільки, $\Sigma_0=\Sigma_1+\Sigma_2$, то з отриманої нерівності і з нерівності (17) отримуємо повністю твердження леми 1.

***Зауваження 4.*** *Легко бачити, що нерівність* (16) *виконується при* $\lambda_\nu\to+\infty$, *як тільки виконується нерівність з наслідку 1.*

Нам будуть потрібні також наступні дві леми з [9], які можна сформулювати у наступному вигляді.

**Лема 3.** *Нехай* $0\le\lambda_0<\lambda_1<\dots<\lambda_m<+\infty$,

$$P(z)=\sum_{n=0}^{m}a_ne^{z\lambda_n}.$$

*Тоді нерівність* $M(\tau,P')\le eM(\sigma,P)\lambda_me^{(\tau-\sigma)\lambda_m}$ *виконується для всіх* $\tau,\sigma\in\mathbb{R}$, $\tau\ge\sigma$.

**Лема 4.** *Нехай* $P(z)$ *— квазіполіном такий, як у лемі 3, і для деякої точки* $z_0$, $\operatorname{Re}z_0=\sigma$, *виконується нерівність*

$$|P(z_0)|\ge\theta M(\sigma,P)\quad 0<\theta\le 1.$$

*Тоді для всіх* $z$ *таких, що* $|z-z_0|<\theta/(7\lambda_m)$, *виконуються нерівності*

$$\frac{1}{2}|P(z_0)|\le|P(z)|\le\frac{3}{2}|P(z_0)|.$$

Доведемо тепер наступну теорему.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови наслідку 1. Якщо точки* $z_0$ *і* $\theta=\theta(\sigma)\in[\frac{1}{\nu(\sigma,F)};1]$ *є такими, що*

$$|F(z_0)|\ge\theta M(\sigma,F),\quad \operatorname{Re}z_0=\sigma, \tag{18}$$

*то для всіх близьких до нуля* $\sigma \in [-1;0)\backslash E_1$ *і для всіх* $z = z_0 + s$, $|s| \le r_0$, *справджується рівність*

$$F(z) = F(z_0) \exp\left( (\lambda_\nu + \delta_1)s + \sum_{n=2}^{+\infty} \delta_n s^n \right), \quad \nu = \nu(\sigma, F),$$

*де*

$$|\delta_j| \le \frac{a}{(r_0)^j} \quad (j \ge 1), \tag{19}$$

$a$ *— деяка абсолютна стала,* $r_0 = \min\left\{\frac{\theta}{29T(\lambda_\nu)}; |\sigma|(1-\varepsilon(\sigma))\right\}$, $\varepsilon(\sigma)$ *— довільна функція така, що* $\varepsilon(\sigma) \to +0$, $(\sigma \to -0)$, $E_1$ *— множина з наслідку 1.*

***Доведення.*** Всюди у доведенні вважаємо, що $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_1)$. Позначимо $\lambda_\nu^{(1)} = \min\{\lambda_n : \ \lambda_n > \lambda_\nu - T(\lambda_\nu)\}$, $\lambda_\nu^{(2)} = \max\{\lambda_n : \ \lambda_n < \lambda_\nu + T(\lambda_\nu)\}$. Зауважимо, що $\lambda_\nu^{(1)} < \lambda_\nu \le \lambda_\nu^{(2)}$. Нехай

$$P(z) = \sum_{|\lambda_n - \lambda_\nu| < T(\lambda_\nu)} a_n e^{z(\lambda_n - \lambda_\nu^{(1)})}.$$

Тоді для $\operatorname{Re} z = \tau$, $|\tau - \sigma| < 1/T(\lambda_\nu)$, за лемою 2 маємо

$$F(z) - P(z)e^{z\lambda_\nu^{(1)}} = O\left(\mu(\sigma,\tau,F)(n(2\lambda_\nu))^{-9}\right) = O\left(M(\tau,F)(n(2\lambda_\nu))^{-9}\right), \tag{20}$$

оскільки за нерівністю Коші $M(\tau, F) \ge \mu(\tau, F) \ge \mu(\sigma, \tau, F)$. Звідси, $F(z) = P(z)e^{z\lambda_\nu^{(1)}} + o(M(\sigma, F))$ при $\operatorname{Re} z = \tau = \sigma$, тобто

$$M(\sigma, P) \le (1 + o(1))M(\sigma, F)e^{-\sigma\lambda_\nu^{(1)}}. \tag{21}$$

Зауважимо також, що із (20) при $z = z_0$ і умови (18) отримуємо

$$F(z_0) = P(z_0)e^{z_0\lambda_\nu^{(1)}} + o(F(z_0)).$$

Звідси, знову застосовуючи умову (18) і нерівність (21), маємо

$$|P(z_0)| \ge (1 + o(1))\theta M(\sigma, F)e^{-\sigma\lambda_\nu^{(1)}} \ge \frac{\theta}{2}M(\sigma, P). \tag{22}$$

Застосовуючи лему 4 до $P(z)$, для всіх $z$, $|z - z_0| \le \theta\left(14(\lambda_\nu^{(2)} - \lambda_\nu^{(1)})\right)^{-1}$, одержуємо

$$\frac{1}{2}|P(z_0)| \le |P(z)| \le \frac{3}{2}|P(z_0)|.$$

Оскільки $\lambda_\nu^{(2)} - \lambda_\nu^{(1)} < 2T(\lambda_\nu)$, то остання нерівність виконується для всіх

$$z \in G \stackrel{\text{def}}{=} \{z: \ |z - z_0| < \theta(28T(\lambda_\nu))^{-1}\}.$$

Зауважимо, що якщо $z \in G$ і $\mathrm{Re}\ z = \tau$, то $|\tau - \sigma| < 1/T(\lambda_\nu)$, тобто для $z \in G$ виконується (20). Тому, $P(z) = O(P(z_0))$, $P(z_0) = O(P(z))$, для всіх $z \in G$, $\mathrm{Re}\ z = \tau$, а з (20) і (22) маємо

$$F(z)e^{-z\lambda_\nu} - P(z)e^{z(\lambda_\nu^{(1)} - \lambda_\nu)} = O\left(\mu(\sigma, \tau, F)e^{-\tau\lambda_\nu}\,(n(2\lambda_\nu))^{-9}\right) =$$

$$= O\left(\mu(\sigma, F)e^{-\sigma\lambda_\nu}\,(n(2\lambda_\nu))^{-9}\right) = O\left(\frac{|P(z_0)|}{\theta}e^{-\sigma(\lambda_\nu - \lambda_\nu^{(1)})}\,(n(2\lambda_\nu))^{-9}\right) =$$

$$= O\left(P(s)e^{-\sigma(\lambda_\nu - \lambda_\nu^{(1)})}\,(n(2\lambda_\nu))^{-8}\right).$$

Звідси, при $\sigma \to -0$, $\sigma \notin E_1$, для всіх $z \in G$ виводимо

$$F(z) = P(z)e^{z\lambda_\nu^{(1)}}(1 + o(1)). \tag{23}$$

Враховуючи, що $\lambda_\nu - \lambda_\nu^{(1)} < T(\lambda_\nu)$, і те, що $|\mathrm{Re}\ (z - z_0)| \le \theta(28T(\lambda_\nu))^{-1}$ для $z \in G$, із співвідношення (23), застосовуючи нерівність $|P(z)| \ge \frac{1}{2}|P(z_0)|$, одержуємо

$$|F(z)| \ge \frac{1 + o(1)}{2}|P(z_0)|e^{\mathrm{Re}\ z_0\lambda_\nu^{(1)}}e^{\mathrm{Re}\ (z - z_0)\lambda_\nu^{(1)}} =$$

$$= \frac{1 + o(1)}{2}|F(z_0)|e^{\mathrm{Re}\ (z - z_0)\lambda_\nu^{(1)}} \ge$$

$$\ge \frac{1 + o(1)}{2}|F(z_0)|e^{\lambda_\nu \mathrm{Re}\ (z - z_0) - 1/28} \ge t_1|F(z_0)|e^{\lambda_\nu \mathrm{Re}\ (z - z_0)},$$

де $t_1 = \frac{1}{3}\exp\{-\frac{1}{28}\}$. Подібно, застосовуючи нерівність $|P(z)| \le \frac{3}{2}|P(z_0)|$, одержуємо

$$|F(z)| \le \frac{3 + o(1)}{2}|F(z_0)|e^{\lambda_\nu \mathrm{Re}\ (z - z_0) + 1/28} \le t_2|F(z_0)|e^{\lambda_\nu \mathrm{Re}\ (z - z_0)},$$

де $t_2 = \frac{5}{3}\exp\{\frac{1}{28}\}$. Отже, для всіх $z \in G$

$$|F(z)| = (1 + g(z))|F(z_0)|e^{\lambda_\nu \mathrm{Re}\ (z - z_0)}, \tag{24}$$

де $|g(z)| < \max\{t_2 - 1;\ 1 - t_1\} \stackrel{\text{def}}{=} t_3$, $0 < t_3 < 1$.

Нехай тепер $r_0 > 0$ таке, що якщо $|s| \le r_0$, то $\mathrm{Re}\,(z_0+s) < 0$. Для цього можна вибрати $r_0 = \min\{\theta/(29T(\lambda_\nu));\ |\sigma|(1-\varepsilon(\sigma))\}$, де $\varepsilon(\sigma) \to +0$ $(\sigma \to -0)$ — довільна функція. З рівності (24) випливає, що в крузі $\{s:\ |s| \le r_0\}$ функція $F(z_0+s)$ не має нулів, тому в цьому крузі функція $f(s) = F'(z_0+s)/F(z_0+s)$ — аналітична. Нехай $(n+1)f_n$ — коефіцієнти її розвинення в ряд Тейлора в околі точки $s=0$. Оскільки для $|s| < r_0$: $f_1(s) = \int_0^s f(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n$, а $\int_{[0,s]} \frac{F'(z_0+s)}{F(z_0+s)}ds = \ln F(z_0+s) - \ln F(z_0)$ (тут $\int_{[0,s]}$ означає інтегрування вздовж відрізка, а $\ln w$ — однозначна вітка $\mathrm{Ln}\ w$ $(\ln 1 = 0)$ на $F([z_0, z_0+s])$, то принаймні $\mathrm{Re}\ f_1(s) = \ln\left|\frac{F(z_0+s)}{F(z_0)}\right|$. Тому за модифікованою нерівністю Коші, застосованою до функції $(f_1(s) - s\lambda_\nu)$, маємо

$$|f_1 - \lambda_\nu| \le 2\max\{|\mathrm{Re}\ f_1(s) - \lambda_\nu \mathrm{Re}\ s|:\ |s| = r_0\} r_0^{-1},$$

$$|f_n| \le 2\max\{|\mathrm{Re}\ f_1(s) - \lambda_\nu \mathrm{Re}\ s|:\ |s| = r_0\} r_0^{-n}\ (n \ge 2).$$

Зауважимо тепер, що $\exp\{f_1(s)\} = F(z_0+s)/F(z_0)$ для кожного $|s| \le r_0$, тому $f_0 = 0$, а враховуючи, що завдяки (24) при $|s| \le r_0$

$$|\mathrm{Re}\ f_1(s) - \lambda_\nu \mathrm{Re}\ s| = \left|\ln\left|\frac{F(z_0+s)}{F(z_0)}\right| - \lambda_\nu \mathrm{Re}\ s\right| \le$$

$$\le |\ln(1+g(z_0+s))| < |\ln(1-t_3)| \stackrel{\mathrm{def}}{=} t_4,$$

де $t_4 > 1$, остаточно одержуємо $|\delta_1| = |f_1 - \lambda_\nu| < 2t_4 r_0^{-1}$, $|f_n| \le 2t_4 r_0^{-n}$ $(n \ge 2)$. Теорему доведено.

**Наслідок 2.** *За умов теореми 2, для всіх близьких до нуля $\sigma \in [-1;0) \setminus E_1$ і для всіх $z = z_0 + s$, $|s| \le r_0/2$, справджується рівність*

$$F(z) = F(z_0)\exp\{(\lambda_\nu + \delta_1^*)s + \delta_2^* s^2 + s^3\delta_3^*(s)\}, \quad \nu = \nu(\sigma, F),$$

*де*

$$|\delta_j^*| \le \frac{2a}{r_0^j} \quad (j \in \{1,2,3\}), \tag{25}$$

*$a$ — абсолютна стала з теореми 2.*

***Доведення.*** Досить перевірити, що для $|s| \le r_0/2$ виконується при $j=3$ нерівність (25). Справді, з нерівностей (19) отримуємо

$$|\delta_3^*(s)| = \left|\sum_{n=3}^{\infty} f_n s^{n-3}\right| \le 2t_4 r_0^{-3} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|s|}{r_0}\right)^n \le 4t_4 r_0^{-3}.$$

Остання нерівність завершує доведення наслідку 2, з огляду на рівність

$$\frac{F(z_0+s)}{F(z_0)}=\exp\{((f_1-\lambda_\nu)+\lambda_\nu)s+f_2s^2+s^3\delta_3^*(s)\}.$$

З'ясуємо тепер поведінку похідних функцій $F\in S_0(\lambda)$ в околах точок $z_0$, що визначаються нерівністю (18).

**Теорема 3.** *Нехай для функції $F\in S_0(\lambda)$ виконуються умови теореми 2 і $k\in\mathbb{N}$. Тоді для всіх $z$, $Re\ z=\tau, |\tau-\sigma|<r_1/2$ при $\sigma\to-0$ ($\sigma\notin E_1,\ DE_1=0$) справедливі співвідношення*

$$F^{(k)}(z)=\lambda_\nu^k(F(z)+o(M(\tau,F))),\quad M(\tau,F^{(k)})=(1+o(1))\lambda_\nu^kM(\tau,F),$$

*де $\nu=\nu(\sigma,F)$, $r_1=\min\{(30T(\lambda_\nu))^{-1},\ |\sigma|(1-\varepsilon_1(\sigma))\}$, $\varepsilon_1(\sigma)\to+0(\sigma\to-0)$ — довільна функція.*

***Доведення.*** Всюди у доведенні вважаємо, що $\sigma\to-0$ $(\sigma\notin E_1)$, де $E_1$ — множина з наслідку 1. Використовуємо позначення з доведення теореми 2. Нехай

$$R(z)=F(z)-P(z)e^{z\lambda_\nu^{(1)}},\quad \nu=\nu(\sigma,F).$$

Тоді для $m\ge 0$ за лемою 2 для $|\tau-\sigma|<1/T(\lambda_\nu)$ і $\mathrm{Re}\ z=\tau$ маємо

$$\left|R^{(m)}(z)\right|\le S_m(\sigma,\tau,F)=O\left(\mu(\sigma,\tau,F)\lambda_\nu^m(n(2\lambda_\nu))^{-9}\right). \tag{26}$$

Із нерівності (21), застосовуючи лему 3 для кожного $\tau$, $|\tau-\sigma|<1/T(\lambda_\nu)$, отримуємо

$$M(\tau,P')\le e(\lambda_\nu^{(2)}-\lambda_\nu^{(1)})M(\sigma,P)e^{(\lambda_\nu^{(2)}-\lambda_\nu^{(1)})(\tau-\sigma)}=$$
$$=O\left(T(\lambda_\nu)M(\sigma,F)e^{-\sigma\lambda_\nu^{(1)}}\right).$$

Застосовуючи $(p-1)$ раз лему 3, а також останню нерівність, для кожного $\tau$, $|\tau-\sigma|<1/T(\lambda_\nu)$, дістанемо

$$M(\tau,P^{(p)})=O\left(T^p(\lambda_\nu)M(\sigma,F)e^{-\sigma\lambda_\nu^{(1)}}\right), \tag{27}$$

де $p\in\mathbb{N}$ – довільне. Отже, враховуючи, що $\lambda_\nu^{(1)}=(1+o(1))\lambda_\nu$ та $T(x)=o(x)$, а також використовуючи (26), (27) і нерівність $\mu(\sigma,\tau,F)\le M(\tau,F)$, при $|\tau-\sigma|<1/T(\lambda_\nu)$, $\mathrm{Re}\ z=\tau$ для $k\in\mathbb{N}$ послідовно маємо

$$F^{(k)}(z)=R^{(k)}(z)+e^{z\lambda_\nu^{(1)}}(\lambda_\nu^{(1)})^k\sum_{p=0}^{k}C_k^p(\lambda_\nu^{(1)})^{-p}P^{(p)}(z)=$$

$$= e^{z\lambda_\nu^{(1)}}(\lambda_\nu^{(1)})^k \Big\{ F(z)e^{-z\lambda_\nu^{(1)}} - R(z)e^{-z\lambda_\nu^{(1)}} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{k} O\left( \left( \frac{T(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu^{(1)}} \right)^p M(\sigma, F)e^{-\sigma\lambda_\nu^{(1)}} \right) \Bigg\} +$$

$$+O\Big(\mu(\sigma,\tau,F)\lambda_\nu^k (n(2\lambda_\nu))^{-9}\Big) =$$

$$= (\lambda_\nu^{(1)})^k \left\{ F(z) + O\left( M(\tau,F)(n(2\lambda_\nu))^{-9} \right) + \right.$$

$$\left. + O\left( \frac{T(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu} M(\sigma,F)e^{(\tau-\sigma)\lambda_\nu^{(1)}} \right) \right\}, \tag{28}$$

де $C_k^p = \frac{k!}{p!(k-p)!}$.

Нехай тепер $\varepsilon_1(\sigma) \downarrow 0$ $(\sigma \to -0)$, а точка $z_0$ така, що $\mathrm{Re}\, z_0 = \sigma$ і $|F(z_0)| \geq (1-\varepsilon_1(\sigma))M(\sigma,F)$. Покладемо $s = \tau - \sigma$ і застосуємо наслідок 2 з $\theta(\sigma) = 1 - \varepsilon_1(\sigma)$ при $|\tau - \sigma| \leq \frac{1}{2} r_1$. Оскільки $r_1 \leq r_0$, то

$$\max\{|\tau-\sigma|^2|\delta_2^*|; |\tau-\sigma|^3|\delta_3^*|\} = O(1)$$

та

$$\ln\left( \frac{|F(z_0+\tau-\sigma)|}{|F(z_0)|} \right) = (\tau-\sigma)\lambda_\nu + O(1). \tag{29}$$

Із співвідношення (29), враховуючи, що $|\tau-\sigma||\lambda_\nu^{(1)} - \lambda_\nu| = O(1)$, при $|\tau - \sigma| \leq r_1/2$ маємо

$$M(\sigma,F)e^{(\tau-\sigma)\lambda_\nu^{(1)}} = M(\sigma,F)e^{(\tau-\sigma)\lambda_\nu} e^{(\tau-\sigma)(\lambda_\nu^{(1)}-\lambda_\nu)} = O(M(\tau,F)).$$

Отже, з (28), оскільки $\lambda_\nu^k = (1+o(1))(\lambda_\nu^{(1)})^k$, $|F(z)| \leq M(\tau,F)$, для $z$ таких, що $\mathrm{Re}\, z = \tau$, $|\tau-\sigma| \leq r_1/2$ отримуємо перше співвідношення теореми 3. Друге співвідношення є елементарним наслідком з першого. Теорему 3 повністю доведено.

Безпосереднім наслідком з теореми 3, а також теореми 2.2.25 [8, с.274] є наступна теорема, яка містить умови достатні для справедливості асимптотичної рівності (2).

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови теореми 2, а також*

$$\varliminf_{\sigma\to-0} \frac{\ln L(\sigma,F)}{\ln \frac{1}{|\sigma|}} > 1. \tag{30}$$

*Тоді співвідношення* (2) *справджується при* $\sigma \to -0$ $(\sigma \notin E_2,\ DE_2 = 0)$.

***Доведення.*** Досить скористатись теоремою 3 з $k = 1$, та наступним твердженням, яке отримуємо з теореми 2.2.25 [8, с. 274].

**Твердження 1.** *Якщо $F \in S_0(\lambda)$ і виконується умова (30), то $F'(z) = (1 + o(1))L(\sigma, F)F(z)$ при $\sigma \to -0$ зовні деякої множини $E_3$ скінченної логарифмічної міри, тобто $\int\limits_{E_3\cap[-1;0)} \frac{d\sigma}{|\sigma|} < +\infty$, для всіх $z$ таких, що Re $z = \sigma$ і $F(z) = (1 + o(1))M(\sigma, F)$.*

Звідси випливає, що теорему 4 доведено повністю, оскільки $DE_3 = 0$ і, очевидно, $D(E_1 \cup E_3) = 0$, де $E_1$ — множина з наслідку 1.

***Зауваження 5.*** *Оскільки при $\sigma \to -0$*

$$|\sigma|\lambda_{\nu(2\sigma)} \le \ln \mu(\sigma, F) \le \ln M(\sigma, F) \le L(\sigma, F) + O(1),$$

*то за умов теореми 3 умова* (30) *виконується, як тільки*

$$\varliminf_{t\to+\infty} \frac{\ln \Phi_1(t)}{\ln t} > 2.$$

На те, що умови теореми 4 мають необхідний характер, вказує, зокрема, теорема з [6], в якій побудована функція $F \in S_0(\lambda, \Phi_1)$ з $\Phi_1(t) = t^{2+\beta}$, $\beta > -1$, така, що $c_1 \le \lambda_{\nu(\sigma)}|\sigma|^{2+\beta} \le c_2$, $c_1, c_2 > 0$, $\frac{|\sigma|L(\sigma,F)}{\lambda_{\nu(\sigma)}} \to +\infty$ $(\sigma \to -0)$, $\lambda_n = (\ln n)^{1+\alpha}$ $(n \ge 1)$, $\alpha = (2 + \beta + \beta_1)^{-1}$, $\beta_1 > 0$, та при цьому умова (11) не виконується.

Необхідність умови (11) для справедливості співвідношення (2) при $\sigma \to -0$ зовні деякої множини нульової лінійної лівосторонньої щільності в точці $\sigma = 0$ для кожної функції $F \in S_0(\lambda, \Phi)$ отримаємо з теореми 6 [5] у наступному випадку.

Через $\lambda_\Phi = (\lambda_n)$ позначимо послідовність $\lambda = (\lambda_n)$, для якої існує границя

$$\Delta_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to+\infty} t \sum_{\lambda_n\ge\Phi_1(t)} \frac{1}{n\lambda_n},$$

для фіксованої функції $\Phi_1$, що визначає клас $S_0^*(\lambda, \Phi_1)$.

Нехай $L_3$ — клас функцій $\varphi_1 \in L$ таких, що

$$\varphi_1(t) = O(\varphi(t)) \quad (t \to +\infty),$$

де $\varphi(t)$ — обернена функція до функції $\Phi(t) = t\Phi_1(t)$, а $\Phi_1(t)$ — до функції $\varphi_1(t)$.

**Теорема 5.** *Нехай $\varphi_1 \in L_2 \cap L_3$, а функція $\Phi_1$ обернена до функції $\varphi_1$, $\Phi(t) = t\Phi_1(t)$. Для того щоб для кожної функції $F \in S_0(\lambda, \Phi)$ виконувалось при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_2$, $DE_2 = 0$) співвідношення (2), необхідно і досить, щоб $\Delta_\Phi = 0$.*

***Доведення.*** Достатність отримаємо з теореми 4, оскільки з умови (11), за умови $\varphi_1 \in L_3$, випливає умова (15) і досить скористатись зауваженням 2. Крім того, елементарно перевіряється, що у випадку $\varphi_1 \in L_3$, $F \in S_0^*(\lambda, \Phi_1)$ тоді і тільки тоді, коли $F \in S_0(\lambda, \Phi)$. Для доведення необхідності умови (11) нам потрібне наступне твердження.

**Твердження 2 (теорема 6 у [5]).** *Нехай $\Phi \in L$. Для кожної послідовності $\lambda = (\lambda_n)$ такої, що*

$$\underline{\lim}_{t\to+\infty} t \sum_{\lambda_n \geq \Phi_1(t)} \frac{1}{n\lambda_n} > 0,$$

*існує функція $F \in S_0(\lambda, \Phi)$ така, що для деяких $\sigma_0 < 0$, $h > 0$,*

$$\ln M(\sigma, F) > (1 + h)\ln \mu(\sigma, F) \quad (\sigma \in [\sigma_0; 0)).$$

Необхідність умови (11) випливає тепер з твердження 2 і наступного твердження.

**Твердження 3 [4].** *Нехай $f(x)$ і $g(x) \uparrow +\infty$ ($x \to -0$) — невід'ємні опуклі при $x < 0$ функції такі, що правосторонні похідні $f'_+(x)$, $g'_+(x) \nearrow +\infty$ ($x \to -0$). Якщо $f(x) \leq g(x)$, $x \in [\sigma_0; 0)$, то для довільних $K > 1$ і $\varepsilon > 0$ знайдеться множина $E \subset (-\infty; 0)$,*

$$DE = \overline{\lim_{x\to-0}} \frac{1}{|x|} \text{meas } (E \cap [x; 0)) \geq \frac{K-1}{K},$$

*така, що для всіх $x \in E$ виконується нерівність $f'(x) \leq (1 + \varepsilon)Kg'(x)$.*

Для завершення доведення теореми 5 досить тепер вибрати $f(\sigma) = (1 + h)\ln \mu(\sigma, F)$ і $g(\sigma) = \ln M(\sigma, F)$.

Теореми 4 і 5 раніше анонсовані в [7].

Автор щиро дякує професору М. М. Шереметі, запитання якого стало стимулом до написання цієї статті.

[1] *Дагене Е.* О центральном показателе ряда Дирихле // Литов. мат. сб. – 1968. – Т. 8, № 3. – С. 504–521.

[2] *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

[3] *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Мат. заметки. – 1985. – Т. 37, № 1. – С. 41–47.

[4] *Скасків О.Б.* Диференціювання нерівності між дійсними опуклими функціями // Мат. студії. – 2003. – Т. 19, № 2. – С. 141–148.

[5] *Скасків О.Б.* Про поведінку максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1988. – № 8. – С. 19–21.

[6] *Скасків О.Б.* Про центральний показник абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Мат. студії. Праці Львів. матем. т-ва. – 1993. – Вип. 2. – С. 35–40.

[7] *Скасків О.Б.* Про центральний показник абсолютно збіжних рядів Діріхле // Доп. НАН України. – 2000. – № 10. – С. 36–40.

[8] *Стрелиц Ш.И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 468 с.

[9] *Шеремета М.Н.* Асимптотические свойства целых функций, заданных рядами Дирихле, и их производных // Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31, № 6. – С. 723–730.

[10] *Шеремета М.Н.* Об еквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Мат. заметки. – 1987. – Т. 42, № 2. – С. 215–226.

[11] *Шеремета М.Н.* О производной целого ряда Дирихле // Мат. сб. – 1988. – Т. 137 (179), № 1 (9). – С. 128–139.

## ON THE LOGARITHMIC DERIVATIVE AND CENTRAL EXPONENT DIRICHLET SERIES

*Oleh SKASKIV*

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

We obtain sufficient conditions for an asymptotic equality outside an exeptional set of a logarithmic derivative of the maximum modulus of the sum and the central exponent of an absolutely convergent Dirichlet series in a half-plane.