ДІОФАНТОВІ НАБЛИЖЕННЯ ВИЗНАЧНИКА ЗАДАЧІ З ДВОМА КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

©2005 р. Михайло СИМОТЮК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79601

Редакція отримала статтю 25 серпня 2005 р.

Встановлено метричні оцінки знизу для характеристичного визначника задачі з двома кратними вузлами для лінійного рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розглянемо таку задачу з двома кратними вузлами:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D) \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0, \ (t,x) \in (0,T) \times \Omega_p, \quad (1)$$

$$\begin{cases} U_j[u] \equiv \dfrac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,r}, \quad x \in \Omega_p, \\ U_{r+j}[u] \equiv \dfrac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_{r+j}(x), \quad j = \overline{1, n-r}, \quad x \in \Omega_p, \end{cases} \quad (2)$$

де $D = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$, Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $1 \le r < n$, $A_j(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, — многочлен з комплексними

УДК 517.95+511.2; MSC 2000: 11J83, 11K60, 35C10
Робота виконана при фінансовій подтримці ДФФД України проект № 10.01/053)

коефіцієнтами степеня N_j, $N_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{0, n-1}$. Нехай $W^{\gamma}_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \equiv \max\limits_{1\le j\le n} \{N_{n-j}/j\}$, — простір 2π-періодичних за змінними $x_1, \ldots, x_p$ функцій $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik_1x_1 + \ldots + ik_px_p)$ зі скінченною нормою

$$\|\varphi; W^{\gamma}_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2\alpha} \exp(2\beta|k|^{\gamma})}.$$

При дослідженні розв'язності задачі (1), (2) в просторах функцій, 2π-періодичних за змінними $x_1, \ldots, x_p$, виникає такий визначник:

$$\Delta(k,T) = \det \|U_j[f_q(t,k)]\|^n_{j,q=1}, \quad k \equiv (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p, \tag{3}$$

де $f_1(t,k), \ldots, f_n(t,k)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt}, k\right) y(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

така, що $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $j, q = \overline{1,n}$ ($\delta_{j,q}$ — символ Кронекера). Якщо $\Delta(k,T) \ne 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, то задача (1), (2) має єдиний формальний розв'язок, який зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(k,T)}{\Delta(k,T)} f_q(t,k) \varphi_{jk} \exp(ik_1x_1 + \ldots + ik_px_p), \tag{5}$$

де $\Delta_{j,q}(k,T), j, q = \overline{1,n}$, — алгебричне доповнення елемента $U_j[f_q(t,k)]$ у визначнику $\Delta(k,T)$, а $\varphi_{j,k}$ — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,n}$.

Якщо $\Delta(k,T) \ne 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, і, крім того, існують $\omega, \delta \in \mathbb{R}$ такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується оцінка знизу

$$|\Delta(k,T)| \ge (1+|k|)^{-\omega} \exp(-\delta|k|^{\gamma}), \quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|, \tag{6}$$

то на основі відомих оцінок [12, с. 162] для функцій $f_1(t,k), \ldots, f_n(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, в шкалі просторів $C^n([0,T]; W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, можна встановити збіжність ряду (5), якщо $\varphi_j \in W^{\gamma}_{\alpha_0,\beta_0}$, $j = \overline{1,n}$, для деяких дійсних α_0, β_0. Тому важливим є дослідження питання про можливість виконання нерівності (6). Це і є завданням даної роботи.

Для формулювання отриманих результатів введемо наступні позначення: $C(n,l)$, $1 \le l \le n$, — множина всіх наборів $\omega = (i_1, \ldots, i_l)$, складених з n натуральних чисел $i_1, \ldots, i_l$ таких, що $1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n$; $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_{m(k)}(k)$, $m(k) \le n$, — різні корені рівняння

$$L(\lambda, k) = 0, \tag{7}$$

кратностей $n_1(k),\ldots,n_{m(k)}(k)$ відповідно, $\sum_{j=1}^{m(k)} n_j(k) = n$; $m_0(k) = 0$, $m_j(k) = \sum_{q=1}^{j} n_q(k)$, $j = \overline{1, m(k)}$;

$$g_q(t,k) = t^{\alpha(q)} \exp(\lambda_{\beta(q)}(k)t), \quad \alpha(q) = q - m_{\beta(q)-1}(k) - 1, \quad q = \overline{1,n}, \quad (8)$$

де індекс $\beta(q)$ однозначно визначається з умови $m_{\beta(q)-1}(k) < q \le m_{\beta(q)}(k)$.

Основними результатами даної роботи є наступні твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність* (6) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при*

$$\omega > p(\sigma - 1) + \gamma(\sigma + r(n-r)), \quad \delta \ge \Lambda_{n-r}T, \quad \gamma = \max_{1\le j\le n}\{N_{n-j}/j\},$$

де $\sigma = C_n^{n-r}\,(1 + (n-r)(\nu - 1))$, $\nu = \max\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\max\limits_{1\le j\le m(k)} n_j(k)$,

$$\Lambda_{n-r} = -\inf_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}} |k|^{-\gamma} \min_{(i_1,\ldots,i_{n-r})\in C(n,n-r)} \Big\{\sum_{j=1}^{n-r} \operatorname{Re}\lambda_{\beta(i_j)}(k)\Big\}.$$

Зауважимо [11, розд. 5, § 7], що точна нижня грань у попередній формулі для Λ є скінченним числом.

Теорема 2. *Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені рівняння* (7) *є дійсними, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ нерівність* (6) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > p(\sigma - 1) + \gamma(r(n-r)+1)$, $\delta \ge \Lambda_{n-r}T$, $\gamma = \max\limits_{1\le j\le n}\{N_{n-j}/j\}$.*

Діофантові властивості характеристичних визначників задач з умовами (2) для гіперболічних рівнянь, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку, досліджувались у роботах [7], [13, § 2.2]; для безтипних рівнянь, однорідних стосовно диференціювання за змінними t та $x_1,\ldots,x_p$, — у роботах [2, §4], [3]. У цитованих роботах встановлено, що метричні оцінки знизу для визначників задач (1), (2) виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо певний симетричний многочлен від коренів рівняння (7) справджує додаткову умову обмеженості знизу; при цьому у [2, 3, 7, 13] показано, що така додаткова умова виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння (1).

У роботі [8] запропоновано нову, відмінну від [2, 3, 7, 13], методику доведення оцінок знизу для характеристичних визначників задач з умовами (2) і встановлено, що для довільного рівняння вигляду (1) (без будь-яких додаткових умов) нерівність (6) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0, T_0]$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > p(\sigma - 1) + \gamma(\sigma + r(n-r))$, $\delta \geq n\Lambda_0 T_0$, $\gamma = \max\limits_{1\leq j\leq n} \{N_{n-j}/j\}$, де $\Lambda_0 = -\min\Big\{0, \inf\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \min\limits_{1\leq j\leq m(k)} (1+|k|^\gamma)^{-1}\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)\Big\}$, а σ — стала з теореми 1.

Зауважимо, що теореми 1, 2 даної роботи є посиленням (стосовно нижньої межі для показника δ) результатів, отриманих у [8, 9], і є точними в класі рівнянь вигляду (1) в сенсі наступного твердження.

Теорема 3. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існують рівняння* (1) *і множина $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ додатної лебегової міри такі, що для всіх $T \in E_\varepsilon$ нерівність* (6) *не може виконуватися для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при жодному дійсному значенні ω, якщо $\delta = \Lambda_{n-r}T - \varepsilon$.*

2. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Для доведення теорем 1, 2 використаємо деякі допоміжні твердження.

Лема 1. [1, 10] *Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — така дійснозначна функція, що $f \in C^n[a,b]$ і для всіх $t \in [a,b]$ виконується умова $|f^{(n)}(t)| > \delta$, $\delta > 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність*

$$\mathrm{meas}\{t \in [a,b] : |f(t)| \leq \varepsilon\} \leq 2n(n!\varepsilon/\delta)^{1/n}.$$

Нехай $f(t)$ — квазімногочлен вигляду

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j(t)\exp(\mu_j t), \tag{9}$$

де $\mu_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,m}$, $\mu_j \neq \mu_r$, $j \neq r$, $p_j(t)$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня $(n_j - 1)$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,m}$.

Лема 2. *Кількість нулів квазімногочлена* (9)*, які потрапляють на $[a,b]$, не перевищує $C_1(b-a)(1+\max\limits_{1\leq j\leq m}\{|\mu_j|\})$, де стала $C_1 > 0$ залежить тільки від n, $n = n_1 + \ldots + n_m$. Якщо ж всі числа μ_j та коефіцієнти многочленів $p_j(t)$, $j = \overline{1,m}$, є дійсними, то кількість дійсних нулів квазімногочлена* (9) *не перевищує* $(n-1)$.

Доведення першого твердження леми випливає з теореми Валле Пуссена [6, с. 29]; друге ж твердження — добре відомий факт (див. задачу 75 з [5, с. 58]).

Нижче розглядатимемо звичайне диференціальне рівняння зі сталими комплексними коефіцієнтами $a_1, \dots, a_n$

$$R\left(\frac{d}{dt}\right) y(t) \equiv y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t) = 0. \tag{10}$$

Використовуватимемо такі позначення: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корені многочлена $R(\lambda)$, $\Lambda_R = \min\limits_{1\le j\le n}\{\operatorname{Re}\lambda_j\}$, $B_R = 1 + \max\limits_{1\le j\le n}\{|\lambda_j|\}$, $\psi_R = \max\limits_{t\in[0,T]} \exp(-\Lambda_R t)$, $G_{R,f}(t) \equiv \max\limits_{1\le j\le n}\left\{B_R^{-j}|f^{(j-1)}(t)|\right\}$, де $f \in C^{n-1}[0,T]$.

Лема 3. [8] *Нехай функція* $f(t)$ *є розв'язком рівняння* (10). *Тоді для довільного* $t\in[0,T]$ *виконується нерівність*

$$G_{R,f}(0) \le e^T n(2^n-1) B_R^n \exp(-\Lambda_R t)\, G_{R,f}(t). \tag{11}$$

Лема 4. *Нехай функція* $f(t)$ *є нетривіальним розв'язком рівняння* (10). *Тоді для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ *виконується оцінка*

$$\operatorname{meas}\{t\in[0,T] : |f(t)| \le \varepsilon\} \le C_2 B_R \big(\varepsilon\psi_R/G_{R,f}(0)\big)^{1/(n-1)},$$

де $\varepsilon_1 = G_{R,f}(0)/(2e^T n(2^n-1)\psi_R B_R^{n-1})$, $C_2 = C_2(n,T) > 0$.

Доведення. Згідно з лемою 3, в кожній точці $t\in[0,T]$ виконується нерівність

$$G_{R,f}(t) \ge \frac{G_{R,f}(0)}{e^T n(2^n-1) B_R^n \psi_R} \equiv \eta. \tag{12}$$

Розглянемо функції

$$y_j(t) = B_R^{-j}\operatorname{Re} f^{(j-1)}(t), \quad y_{n+j}(t) = B_R^{-j}\operatorname{Im} f^{(j-1)}(t), \quad j = \overline{1,n},$$

та функції $z_{jq}^+(t) = y_j(t) + y_q(t)$, $z_{jq}^-(t) = y_j(t) - y_q(t)$, $1 \le j < q \le 2n$. Очевидно, що функції $z_{jq}^+(t)$, $z_{jq}^-(t)$ $(1\le j<q\le 2n)$ є квазімногочленами, модулі показників експонент яких не перевищують B_R. Згідно з лемою 2, кількість нулів на $[0,T]$ кожної з функцій $z_{jq}^+(t)$, $z_{jq}^-(t)$ (якщо вона відмінна від тотожного нуля) не перевищує $C_3 B_R$, $C_3 = C_3(n,T)$. Нехай $J = \{\, J_r : r = \overline{1,M}\,\}$ — розбиття відрізка $[0,T]$ на відрізки $J_r = [\xi_{r-1}, \xi_r]$, утворене точками 0, T та всіма нулями всіх нетривіальних функцій $z_{jq}^+(t)$, $z_{jq}^-(t)$ $(1\le j<q\le 2n)$. Очевидно, що для кількості M відрізків розбиття J виконується нерівність $M \le C_4 B_R$, де $C_4 = C_4(n,T)$. Згідно з побудовою розбиття J, кожна з функцій $z_{jq}^+(t)$ $z_{jq}^-(t)$, $1\le j<q\le 2n$, на кожному з відрізків J_r цього розбиття не

може набувати значень різних знаків. Тому на кожному з відрізків J_r для довільних j, q виконується нерівність $|y_j(t)| \geq |y_q(t)|$, $t \in J_r$, або ж нерівність $|y_q(t)| \geq |y_j(t)|$, $t \in J_r$. Звідси отримуємо, що для кожного r, $1 \leq r \leq M$, знайдеться таке $q(r)$, $1 \leq q(r) \leq 2n$, що в кожній точці $t \in J_r$ справджується рівність $|y_{q(r)}(t)| = \max\limits_{1\leq j\leq 2n} |y_j(t)|$. Оскільки $|f^{(j-1)}(t)|B_R^{-j} \leq 2\max\{|y_j(t)|, |y_{n+j}(t)|\}$, то з нерівності (12) випливає, що на кожному відрізку J_r, $r = \overline{1, M}$, виконується нерівність

$$|y_{q(r)}(t)| \geq \eta/2, \quad t \in J_r,$$

тобто

$$|\mathrm{Re}\, f^{(q(r)-1)}(t)| \geq \eta B_R^{q(r)}/2, \quad t \in J_r, \tag{13}$$

якщо $1 \leq q(r) \leq n$, або

$$|\mathrm{Im}\, f^{(q(r)-n-1)}(t)| \geq \eta B_R^{q(r)-n}/2, \quad t \in J_r, \tag{14}$$

якщо $n + 1 \leq q(r) \leq 2n$. Зауважимо, що

$$\{t \in J_r : |f(t)| \leq \varepsilon\} \subset \{t \in J_r : |\mathrm{Re}\ f(t)| \leq \varepsilon\},$$

$$\{t \in J_r : |f(t)| \leq \varepsilon\} \subset \{t \in J_r : |\mathrm{Im}\ f(t)| \leq \varepsilon\}.$$

Тому з нерівностей (13), (14) випливає, що при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ множина $\{t \in J_r : |f(t)| \leq \varepsilon\}$ є порожньою, якщо $q(r) = 1$ або $q(r) = n + 1$. Якщо ж $2 \leq q(r) \leq n$, то за лемою 1 з нерівностей (13), (14) випливає, що при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ виконується оцінка

$$\mathrm{meas}\{t \in J_r : |\mathrm{Re}\ f(t)| \leq \varepsilon\} \leq C_5\big(\varepsilon/(\eta B_R^{q(r)})\big)^{1/(q(r)-1)} \leq$$

$$\leq C_5 B_R^{-1}\big(\varepsilon/(\eta B_R)\big)^{1/(n-1)} \leq C_6\big(\varepsilon\psi_R/G_{R,f}(0)\big)^{1/(n-1)},$$

де $C_6 = C_6(n, T) > 0$. Аналогічно, якщо $n + 2 \leq q(r) \leq 2n$, то з леми 1 при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ отримуємо оцінку

$$\mathrm{meas}\{t \in J_r : |\mathrm{Im}\ f(t)| \leq \varepsilon\} \leq C_7\big(\varepsilon\psi_R/G_{R,f}(0)\big)^{1/(n-1)}, C_7 = C_7(n, T) > 0.$$

Для завершення доведення леми залишається врахувати, що кількість M проміжків розбиття J не перевищує $C_4 B_R$. Лему доведено.

Лема 5. *Якщо функція $f(t)$ є ненульовим розв'язком рівняння* (10) *і корені многочлена $R(\lambda)$ є дійсними, то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$*

$$\mathrm{meas}\{t \in [0, T] : |f(t)| \leq \varepsilon\} \leq C_8\big(\varepsilon\psi_R/G_{R,f}(0)\big)^{1/(n-1)},$$

де ε_1 *— стала з леми 4,* $C_8 = C_8(n,T) > 0$.

Доведення леми є аналогічним до доведення попередньої леми; при цьому слід врахувати, що згідно з лемою 3 кількість M відрізків розбиття J не перевищує деякої сталої, яка залежить тільки від n.

Лема 6. *Нехай функція* $f(t)$ *є нетривіальним розв'язком рівняння* (10) *і точка* $t = 0$ *є її нулем кратності* s, *тобто* $f^{(j-1)}(0) = 0$, $j = \overline{1,s}$, $f^{(s)}(0) \neq 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується оцінка*

$$\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : |f(t)| \leq \varepsilon \exp(\Lambda_R t)\} \leq C_9 B_R \big(\varepsilon |f^{(s)}(0)| B_R^{s+1}\big)^{1/(n-1)},$$

де $\varepsilon_2 = |f^{(s)}(0)|/(2e^T n(2^n - 1)(2B_R)^{n+s})$, $C_9 = C_9(n,T) > 0$.

Доведення. Очевидно, що функція $g(t) = f(t)\exp(-\Lambda_R t)$ є розв'язком рівняння

$$Q\left(\frac{d}{dt}\right) g(t) \equiv R\left(\frac{d}{dt} + \Lambda_R\right) g(t) = 0. \tag{15}$$

Оскільки коренями многочлена $Q(\mu)$ є числа $\mu_j = \lambda_j - \Lambda_R$, $j = \overline{1,n}$, де λ_j, $j = \overline{1,n}$, — корені многочлена $R(\lambda)$, то

$$B_Q \equiv 1 + \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j - \Lambda_R| \leq 2B_R, \quad \Lambda_Q \equiv \min_{1\leq j\leq n} \mathrm{Re}\,(\lambda_j - \Lambda_R) \geq 0,$$

$$\psi_Q \equiv \max_{t\in[0,T]} \exp(-\Lambda_Q t) = 1.$$

Застосовуючи до функції $g(t)$, як розв'язку рівняння (15), лему 4, дістанемо, що для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$, $\varepsilon_3 = G_{Q,g}(0)/(2e^T n(2^n - 1)B_Q^{n-1})$, виконується оцінка

$$\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : |g(t)| \leq \varepsilon\} \leq C_2 B_Q \big(\varepsilon / G_{Q,g}(0)\big)^{1/(n-1)}.$$

Для завершення доведення леми залишається врахувати нерівності

$$B_Q \leq 2B_R, \quad G_{Q,g}(0) \geq B_Q^{-s-1} |f^{(s)}(0)| \geq (2B_R)^{-s-1} |f^{(s)}(0)|$$

і те, що $\{t \in [0,T] : |g(t)| \leq \varepsilon\} = \{t \in [0,T] : |f(t)| \leq \varepsilon \exp(\Lambda_R t)\}$.

Лема 7. *Нехай функція* $f(t)$ *є розв'язком рівняння* (10) *і корені рівняння* $R(\lambda) = 0$ *є дійсними. Якщо* $f^{(j-1)}(0) = 0$, $j = \overline{1,s}$, $f^{(s)}(0) \neq 0$, *то для довільного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ *виконується оцінка*

$$\mathrm{meas}\{t \in [0,T] : |f(t)| \leq \varepsilon \exp(\Lambda_R t)\} \leq C_{10} \big(\varepsilon |f^{(s)}(0)| B_R^{s+1}\big)^{1/(n-1)},$$

де ε_2 *— стала з леми 6,* $C_{10} = C_{10}(n,T) > 0$.

Доведення базується на лемі 5 і проводиться за схемою доведення леми 6.

Наступні два твердження описують структуру визначника (3) як функції змінної T.

Лема 8. *Для визначника* (3) *виконуються такі рівності:*

$$\frac{\partial^q \Delta(k,T)}{\partial T^q}\Big|_{T=0} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0 \le q < r(n-r), \\ C_{11}, & \text{якщо} \quad q = r(n-r), \end{cases}$$

де $C_{11} = (r(n-r))!\frac{1!2!\cdot\ldots\cdot(n-r-1)!}{r!(r+1)!\cdot\ldots\cdot(n-1)!} \in \mathbb{N}$.

Доведення. Оскільки $f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{j,q}$, $j,q = \overline{1,n}$, то з формули Тейлора для функцій $f_1(t,k),\ldots,f_n(t,k)$ випливають такі розвинення:

$$f_q(t,k) = \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} + \beta_q(t,k)t^n, \quad q = \overline{1,n}, \tag{16}$$

де $\beta_q(t,k)$, $q = \overline{1,n}$, — аналітичні в околі точки $t = 0$ функції (аналітичність функцій $\beta_q(t,k)$, $q = \overline{1,n}$, є наслідком аналітичності функцій $f_1(t,k),\ldots,f_n(t,k)$).

Для m гладких функцій $h_1(t),\ldots,h_m(t)$ символом $W_m(h_1,\ldots,h_m)$ будемо позначати вронскіан $\det \|h_q^{(j-1)}(t)\|_{j,q=1}^m$. Нам знадобиться така властивість вронскіана (див. задачу 57 у [5, с. 126]): для довільних $(m-1)$ раз неперервно диференційовних функцій $h(t), y_1(t),\ldots,y_m(t)$ виконується рівність

$$W_m(h(t)y_1(t),\ldots,h(t)y_m(t)) = h^n(t)W_m(y_1(t),\ldots,y_m(t)).$$

Легко перевірити, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ визначник $\Delta(k,T)$ дорівнює значенню у точці $t = T$ вронскіана $W_{n-r}(f_{r+1}(t,k),\ldots,f_n(t,k))$ системи функцій $f_{r+1}(t,k),\ldots,f_n(t,k)$. Враховуючи наведену властивість вронскіана, з розвинень (16) отримаємо, що в околі точки $T = 0$

$$\Delta(k,T) = W_{n-r}\left(\tfrac{T^r}{r!} + \beta_{r+1}(T,k)T^n,\ldots,\tfrac{T^{n-1}}{(n-1)!} + \beta_n(T,k)T^n\right) =$$

$$= T^{r(n-r)}W_{n-r}\left(\tfrac{1}{r!} + \beta_{r+1}(T,k)T^{n-r},\ldots,\tfrac{T^{n-r-1}}{(n-1)!} + \beta_n(T,k)T^{n-r}\right) =$$

$$= T^{r(n-r)}W_{n-r}\left(\tfrac{1}{r!},\ldots,\tfrac{T^{n-r-1}}{(n-1)!}\right) + \beta(T,k)T^{r(n-r)+1},$$

тобто

$$\Delta(k,T) = C_{12}T^{r(n-r)} + \beta(T,k)T^{r(n-r)+1}, \tag{17}$$

де $C_{12} = \frac{1!2!\cdot\ldots\cdot(n-r-1)!}{r!(r+1)!\cdot\ldots\cdot(n-1)!}$, а $\beta(T,k)$ — аналітична функція в околі точки $T=0$. З розвинення (17) випливає твердження леми.

Лема 9. *Визначник $\Delta(k,T)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, як функція змінної T, є розв'язком звичайного диференціального рівняння*

$$\prod_{\omega=(i_1,\ldots,i_{n-r})\in C(n,n-r)} \left(\frac{d}{dT} - \Lambda_{\beta(\omega)}(k)\right)^{\gamma(\omega)+1} \Delta(k,T) = 0, \qquad (18)$$

де $\Lambda_{\beta(\omega)}(k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{\beta(i_j)}(k)$, $\gamma(\omega)$ *— степінь многочлена* $P_{k,\omega}(T)$, $P_{k,\omega}(T) \equiv \det\left\|(d/dT + \lambda_{\beta(i_j)})^{q-1}[T^{\alpha(i_j)}]\right\|_{j,q=1}^{n-r}$, *а індекси* $\beta(i_1),\ldots,\beta(i_n)$ *і степені* $\alpha(i_1),\ldots,\alpha(i_n)$ *визначаються формулами* (8).

Доведення. Нехай $\Delta_1(k,T) \equiv \det\|U_j[g_q(t,k)]\|_{j,q=1}^n$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Визначники $\Delta(k,T)$ та $\Delta_1(k,T)$ пов'язані рівністю $\Delta(k,T) = \Delta_1(k,T)/\det J_k$, $k\in\mathbb{Z}^p$, де J_k — матриця переходу від фундаментальної системи розв'язків $f_1(t,k),\ldots,f_n(t,k)$ рівняння (4) до фундаментальної системи розв'язків $g_1(t,k),\ldots,g_n(t,k)$. Розкриваючи визначник $\Delta_1(k,T)$ за правилом Лапласа за мінорами останніх $(n-r)$ рядків, дістаємо, що

$$\Delta_1(k,T) = \sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_{n-r})\in C(n,n-r)} (-1)^{l_\omega} M_\omega(k) \exp(\Lambda_{\beta(\omega)}(k)T) P_{k,\omega}(T), \quad (19)$$

де $l_\omega = i_1+\ldots+i_{n-r}+(r+1)+\ldots+n$, $M_\omega(k)$ — мінор n-го порядку визначника $\Delta_1(k,T)$, який відповідає першим r рядкам та r стовпцям, номери яких не дорівнюють числам $i_1,\ldots,i_{n-r}$. З рівності (19) випливає, що визначник $\Delta_1(k,T)$, а, отже, й визначник $\Delta(k,T)$, є розв'язком диференціального рівняння (18). Лему доведено.

3. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Доведення теореми 1. Нехай $E(T_0)$ — множина тих чисел T, які належать до нескінченної кількості множин $E(k,T_0) := \{T\in(0,T_0] : |\Delta(k,T)| < (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\Lambda_{n-r}T|k|^\gamma)\}$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Для доведення теореми досить перевірити, що $\operatorname{meas} E(T_0) = 0$ для довільного $T_0>0$. З огляду на лему Бореля–Кантеллі [6, с. 13], для цього досить встановити збіжність ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} E(k,T_0)$.

Нехай $N(k) = \deg_\lambda S(\lambda,k)$, $B_S(k) = 1+\max\{|\lambda| : S(\lambda,k)=0\}$, де $S(\lambda,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — характеристичний многочлен диференціального рівняння (18). Правильними є такі нерівності:

$$N(k) \le C_n^{n-r}\left(1+(n-r)(n^+(k)-1)\right), \quad |B_S(k)| \le C_{13}(1+|k|)^{\gamma}, \quad (20)$$

де $n^+(k) = \max\limits_{1\le j\le m(k)} n_j(k)$ — максимальна кратність коренів полінома $L(\lambda,k)$. Дійсно, оцінка для $N(k) = \sum\limits_{\omega\in C(n,n-r)} (\gamma(\omega)+1)$ випливає з того, що кількість елементів множини $C(n,n-r)$ дорівнює C_n^{n-r} і того, що для довільного набору $\omega \in C(n,n-r)$ степінь $\gamma(\omega)$ многочлена $P_\omega(k,T)$ у формулі (19) не перевищує $(n-r)(n^+(k)-1)$. Друга оцінка у формулі (20) випливає з того, що будь-який корінь многочлена $S(\lambda,k)$ є сумою $(n-r)$ коренів многочлена $L(\lambda,k)$.

З оцінок (20) на підставі тверджень лем 6, 8, 9 дістаємо, що при $\omega > p(\sigma-1)+\gamma(\sigma+r(n-r))$ для мір Лебега множин $E(k,T_0)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, виконуються нерівності

$$\begin{aligned}\operatorname{meas} E(k,T_0) \le C_{14}B_S(k)\left((1+|k|)^{-\omega}B_S^{r(n-r)+1}(k)\right)^{1/(N(k)-1)} \le\\ \le C_{15}(1+|k|)^{\gamma+\frac{\gamma(r(n-r)+1)-\omega}{\sigma-1}} \le C_{15}(1+|k|)^{-p-\varepsilon_4}, \quad k\in\mathbb{Z}^p,\end{aligned} \quad (21)$$

де $\varepsilon_4 = (\omega - p(\sigma-1) - \gamma(\sigma + r(n-r)))/(\sigma-1) > 0$. З нерівностей (21) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} E(k,T_0)$. Теорему доведено.

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно до доведення теореми 1; при цьому для оцінок мір множин $E(k,T_0)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, слід використати леми 7, 8, 9.

Доведення теореми 3. Зафіксуємо числа $\varepsilon, T_0 > 0$. Розглянемо задачу з умовами (2) для рівняння з однією просторовою змінною ($p=1$)

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mu_j\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(t,x) = 0, \quad (t,x)\in(0,T)\times\Omega_1,$$

де числа $\mu_1,\ldots,\mu_n$ є такими, що виконуються нерівності

$$-\mu-\varkappa \le \operatorname{Re}\mu_1 < \ldots < \operatorname{Re}\mu_n \le -\mu < 0, \quad \varkappa = \varepsilon/(3(n-r)T_0).$$

Для даного випадку $\gamma = 2$, $\Lambda_{n-r} = -(\operatorname{Re}\mu_1+\ldots+\operatorname{Re}\mu_{n-r})$. Нехай $E_\varepsilon = [T_0 - \varepsilon/(3\mu(n-r), T_0] \cap (0,T_0]$. Очевидно, що множина E_ε має додатну лебегову міру. Припустимо, що існує $T\in E_\varepsilon$ таке, що для деякого $\omega\in\mathbb{R}$ нерівність

$$|\Delta(k,T)| \ge (1+|k|)^{-\omega}\exp((\varepsilon - \Lambda_{n-r}T)k^2) \quad (22)$$

виконується для нескінченної кількості цілих чисел k. Легко перевірити, що для кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконується оцінка

$$|\Delta(k,T)| \leq C_{16}(1+|k|)^{\omega_0} \exp(-(n-r)\mu T k^2), \tag{23}$$

де $\omega_0 = 2(C_r^2 + C_{n-r}^2 - C_n^2)$, а стала $C_{16} > 0$ не залежить від k. Тоді з оцінок (22), (23) випливає, що для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}$ виконується нерівність

$$C_{16} \exp\left((\Lambda_{n-r}T - (n-r)\mu T)k^2\right) \geq (1+|k|)^{-\omega-\omega_0} \exp(\varepsilon k^2). \tag{24}$$

Оскільки $\Lambda_{n-r}T - (n-r)\mu T \leq 2\varepsilon/3$ для всіх $T \in E_\varepsilon$, то ліва частина нерівності (24) оцінюється зверху числом $C_{16} \exp(2\varepsilon k^2/3)$, а, отже, для нескінченної кількості чисел $k \in \mathbb{Z}$ виконується суперечлива нерівність $C_{16} \exp(2\varepsilon k^2/3) \geq (1+|k|)^{-\omega-\omega_0} \exp(\varepsilon k^2)$. З отриманої суперечності випливає твердження теореми 3.

4. ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ ЗАДАЧІ (1), (2)

Розглянемо часткові випадки, коли в умовах (2) $r = 1$ або $r = n-1$. У цих випадках твердження теорем 1, 2 можна уточнити (стосовно нижньої межі для показника ω).

Теорема 4. *Якщо $r = n-1$, то нерівність* (6) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > p(n-1) + \gamma(2n-1)$, $\delta \geq \Lambda_1 T$, $\gamma = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \{N_{n-j}/j\}$.*

Доведення. Якщо $r = n-1$, то $\Delta(k,T) = f_n(T,k)$. Нехай $E(T_0)$, де $T_0 > 0$, — множина тих чисел T, які належать до нескінченної кількості множин $E(k,T_0) = \{T \in (0,T_0] : |f_n(T,k)| \leq (1+|k|)^{-\omega} \exp(-\Lambda_1 T|k|^\gamma)\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Для доведення теореми досить перевірити, що $\operatorname{meas} E(T_0) = 0$ для всіх $T_0 > 0$. За лемою Бореля–Кантеллі [6, с. 13] для цього досить встановити збіжність ряду $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} E(k,T_0)$.

Функція $f_n(t,k)$ є розв'язком рівняння (4) і точка $t = 0$ є її нулем кратності $(n-1)$. Тоді з леми 6 для мір Лебега множин $E(k,T_0)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, при $\omega > p(n-1) + \gamma(2n-1)$ дістанемо, що

$$\operatorname{meas} E(k,T_0) \leq C_{17}(1+|k|)^{\gamma + (\gamma n - \omega)/(n-1)} \leq C_{17}(1+|k|)^{-p-\varepsilon_5},$$

де $\varepsilon_5 = (\omega - p(n-1) - \gamma(2n-1))/(n-1) > 0$. Отже, ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{meas} E(k,T_0)$ є збіжним. Теорему доведено.

Теорема 5. *Якщо $r = 1$, то нерівність* (6) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > p(n-1) + \gamma(2n-1)$, $\delta \geq \Lambda_{n-1}T$, $\gamma = \max\limits_{1\leq j\leq n}\{N_{n-j}/j\}$.*

Доведення. Якщо $r = 1$, то визначник $\Delta(k,T)$ є вронскіаном системи функцій $f_2(T,k),\ldots,f_n(T,k)$. Відомо [4, § 17.7], що в цьому випадку визначник $\Delta(k,T)$, як функція змінної T, є розв'язком рівняння

$$L_*\big(d/dT + A_1(k), k\big)\Delta(k,T) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $L_*(\lambda,k) = \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}A_j(k)\lambda^j$. Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ позначимо:

$$B_*(k) = 1 + \max\{\,|\lambda| : L_*(\lambda + A_1(k),k) = 0\,\},$$
$$\Lambda_*(k) = -\min\{\,\mathrm{Re}\,\lambda : L_*(\lambda + A_1(k),k) = 0\,\},$$
$$E(k,T_0) = \{T \in (0,T_0] : |f_n(T,k)| \leq (1+|k|)^{-\omega}\exp(-\Lambda_{n-1}T|k|^{\gamma})\},$$

де $T_0 > 0$. Число μ є коренем рівняння $L_*(\lambda + A_1(k),k) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, тоді і тільки тоді, коли число $-\mu - A_1(k)$ є коренем рівняння (7). Враховуючи теорему Вієта, дістанемо, що

$$B_*(k) \leq C_{18}(1+|k|)^{\gamma}, \quad \Lambda_*(k) \geq -\Lambda_{n-1}|k|^{\gamma}, \quad k \neq \vec{0}.$$

Тоді з леми 6 при $\omega > p(n-1) + \gamma(2n-1)$ для мір множин $E(k,T_0)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, отримуємо такі оцінки:

$$\mathrm{meas}\,E(k,T_0) \leq C_{19}B_*^{2n/(n-1)}(k)(1+|k|)^{-\omega/(n-1)} \leq C_{20}(1+|k|)^{-p-\varepsilon_5},$$

де $\varepsilon_5 > 0$ — стала із доведення теореми 4. Тому ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\mathrm{meas}\,E(k,T_0)$ є збіжним. Із леми Бореля–Кантеллі дістаємо твердження теореми.

Теорема 6. *Якщо $r = n-1$ і для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені рівняння* (7) *є дійсними, то нерівність* (6) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > p(n-1)+\gamma(n-1)$, $\delta \geq \Lambda_1 T$, $\gamma = \max\limits_{1\leq j\leq n}\{N_{n-j}/j\}$.*

Теорема 7. *Якщо $r = 1$ і для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені рівняння* (7) *є дійсними, то нерівність* (6) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\omega > p(n-1) + \gamma(n-1)$, $\delta \geq \Lambda_{n-1}T$, $\gamma = \max\limits_{1\leq j\leq n}\{N_{n-j}/j\}$.*

Доведення теорем 6, 7 базується на лемі 7 і проводиться за схемою доведення теорем 4, 5 відповідно.

Зауваження. Результати роботи можна перенести на випадок задачі з умовами (2) для систем лінійних рівнянь із частинними похідними.

[1] *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4.– С. 637–645.

[2] *Бобик І.О.* Крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Дис. ... канд. фіз.–мат. наук. – Львів. – 1994. – 130 с.

[3] *Бобик І.О., Пташник Б.Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7.– С. 795–802.

[4] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, 1971. – 576 с.

[5] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – Ч. 2. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

[6] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[7] *Пташник Б.И., Штабалюк П.И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 4. – С. 669–678.

[8] *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.

[9] *Симотюк М.* Задача з двома кратними вузлами для рівнянь з частинними похідними // Тези доп. 9-ої Міжн. конф. імені академіка Кравчука. – Київ, 16–19 травня 2002 р. – С. 364.

[10] *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999.– **42**, № 4. – С. 90–95.

[11] *Фаддеев Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.

[12] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.

[13] *Штабалюк П.И.* Почти–периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов // Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. – Львов, 1984. – 146 с.

DIOPHANTINE APPROXIMATIONS OF THE DETERMINANT OF THE TWO-POINT PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Mykhaylo SYMOTYUK

Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine

The metric theorems of an estimations of the characteristic determinant of the two-point problem for linear partial differential equations with constant coefficients are proved.