ПОБУДОВА ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ТРИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У КРИВОЛІНІЙНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

©2005 р. Віктор РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79601

Редакція отримала статтю 21 березня 2005 р.

Проінтегровано рівняння Ляме у декартовій системі координат, знайдено нові розв'язки тривимірної теорії пружності і виражено їх через гармонічні функції. Доведено, що розв'язок містить тільки три незалежні функції. Одержано декілька виразів для вектора пружних переміщень. Побудовано загальне зображення для розв'язку у векторному вигляді у криволінійній ортогональній системі координат. Як частковий випадок, наведено загальний розв'язок рівнянь Ляме у циліндричній і еліптичній системах координат.

ВСТУП

Знаходження напружено-деформованого стану (НДС) конструктивних елементів у криволінійних системах координат є важливою практичною проблемою, якій присвячено велику кількість праць [6, 7, 14]. При розв'язуванні тривимірних задач теорії пружності [6, 13], як правило, задають характер розподілу переміщень, що приводить до знаходження часткових розв'язків рівнянь Ляме. Тому інтегрування рівнянь Ляме і знаходження вектора переміщень в пружному тілі для загального випадку навантаження є дуже важливою задачею. У роботі [14] наведено огляд

УДК 539.3; MSC 2000: 35Q72

робіт і відзначено, що основним способом розв'язку є метод розкладу за власними функціями у криволінійній системі координат. Хоча на даний час відомо декілька зображень загального розв'язку [2, 6, 8, 12, 13] у декартовій системі координат, які використовують від двох до чотирьох незалежних гармонічних функцій, їх не завжди можна застосувати при використанні цього методу у криволінійній системі координат. При використанні методу розвинення розв'язку в ряд за власними функціями потрібно спочатку виділити основний напружений стан, який відповідає заданим головним векторам зусиль і моментів, і вже для збуреної (самозрівноваженої відносно окремої координатної поверхні) частини ставити відповідну крайову задачу для визначення власних функцій, які описують цей збурений напружений стан.

Відзначимо, що виділення збуреного напруженого стану є завжди доцільне і використовується при застосуванні числових та наближених методів розв'язування тривимірних задач теорії пружності [1, 3]. Потрібно використовувати найпростіші зображення загального розв'язку рівнянь Ляме, що дозволяє побудувати повний набір власних функцій, які задовольняють нульові граничні умови на виділеній координатній поверхні. У випадку осесиметричного навантаження циліндра цей підхід знайшов подальший розвиток у роботі [10].

Вважається [7, 13], що одне з найпоширеніших зображень загального розв'язку рівнянь Ляме через гармонічні функції було одержано незалежно Папковичем [8] і Нейбером [15] у вигляді

$$\mathbf{u} = \psi - \frac{1}{4(1-\nu)} grad(\Psi + x\psi_1 + y\psi_2 + z\psi_3), \tag{1}$$

де Ψ, ψ_j, $j = \overline{1,3}$, — гармонічні функції, ν — коефіцієнт Пуассона. У роботі [12] аналізувались питання повноти знайдених розв'язків залежно від зв'язності області. Питання побудови точних розв'язків тривимірної теорії пружності в напруженнях досліджувалися в [2, 5]. При знаходженні розв'язків рівнянь Ляме використовувалися різні підходи, але не було строго доведено, що знайдено загальний розв'язок [7, 13].

Зауваження. *Вектор пружного переміщення* (1) *містить чотири гармонічні тривимірні функції, тоді як граничних умов у теорії пружності — три. Явне входження в нього трьох змінних x, y, z ускладнює розв'язування спектральної задачі і побудову відповідних власних функцій.*

Нижче побудовано розв'язок тривимірних рівнянь Ляме у простому векторному вигляді в декартовій системі координат і доведено його загальність. На основі інваріантності цього векторного зображення знайдено загальний розв'язок тривимірних рівнянь Ляме в криволінійній ортогональній системі координат, а також подано конкретний розв'язок для циліндричної і еліптичної систем координат.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Інтегрування тривимірних рівнянь Ляме у криволінійній ортогональній системі координат є складною проблемою, для розв'язання якої використаємо інваріантність вектора пружних переміщень відносно заміни системи координат [4]. Отже, достатньо побудувати розв'язок рівнянь Ляме у декартовій системі координат в інваріантному вигляді, а потім одержаний розв'язок перевести в задану криволінійну систему координат. Рівняння Ляме в переміщеннях (див. [7, 13]) запишемо в декартовій системі координат у векторному вигляді:

$$\alpha\nabla^2\mathbf{u} \;+\; grad\, e \;=0, \tag{2}$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа; $e = div\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ — об'ємне розширення; $\alpha \;=\; 1-2\nu$, $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ — вектор пружних переміщень; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — одиничні орти декартової системи координат.

Розглянемо тривимірне тіло D. Будемо вважати, що компоненти вектора пружних переміщень в області D мають неперервні частинні похідні до четвертого порядку включно. При побудові тривимірного вектора пружних переміщень необхідно використовувати набір функцій, які можна вважати векторами [4, 14]. Тоді цей розв'язок має фізичний зміст, пов'язаний з інваріантністю відносно заміни системи координат і його можна надалі використовувати в криволінійній системі координат.

2. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ В ІНВАРІАНТНОМУ ВИГЛЯДІ У ДЕКАРТОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

При дослідженні рівнянь Ляме будемо виходити із відомого факту, що кожна компонента вектора пружних переміщень є розв'язком бігармонічного рівняння. Згідно з цим, розв'язок бігармонічного рівняння розділимо на два класи, які відповідно виражаються тільки через: I) гармонічні; II) бігармонічні функції (гармонічні функції домножені на x, y або z). Розглянемо перший клас розв'язків.

2.1. Кожна компонента вектора пружних переміщень є гармонічною функцією. У цьому випадку з рівнянь Ляме (2) випливає, що об'ємне розширення буде сталим, а система рівнянь спрощується

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0, \;\; e = div\, \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = C, \tag{3}$$

де C — стала. Загальний розв'язок системи рівнянь (3) розіб'ємо на частковий поліномний (розглянутий у п. 2.3) та однорідний гармонічний.

Теорема 1. *Якщо вектор пружних переміщень* $\mathbf{u}$ *має нульове об'ємне розширення* ($div\, \mathbf{v} = 0$)*, то його можна зобразити у вигляді*

$$\mathbf{u} = grad\, \Psi + rot\, Q\mathbf{k}, \tag{4}$$

де Ψ *і* Q *— гармонічні функції трьох змінних.*

Доведення. Згідно з означенням, вектор пружних переміщень задовольняє рівнянням Ляме. Рівняння Ляме (2) спрощуються до системи (3), де $C = 0$. Отже, всі компоненти вектора пружних переміщень є гармонічними функціями. Поле пружних переміщень задане у вигляді градієнта

$$\mathbf{w} = grad\, \Psi,$$

де Ψ — довільна гармонічна функція, задовольняє системі рівнянь (3). Довільний розв'язок рівняння Ляме (при виконанні умов теореми) завжди можна подати у вигляді

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}, \tag{5}$$

де ψ_j — гармонічні функції. Внаслідок довільності гармонічної функції Ψ, яка описує градієнтне поле переміщень, покладемо $\Psi = \psi_3$. Віднімаючи від поля переміщень (5) це градієнтне поле, одержимо нове поле переміщень

$$v_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2}, \quad v_3 = 0.$$

Оскільки $div\ \mathbf{v} = 0$, то легко перевірити, що $\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2}$. Отже, існує така гармонічна функція Q, що $v_1 = \frac{\partial Q}{\partial x_2}$, $v_2 = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}$. Звідси випливає, що $\mathbf{v} = rot\, Q\mathbf{k}$. Теорему доведено.

Знайдемо загальне зображення розв'язків другого класу.

2.2. Кожна компонента вектора пружних переміщень є бігармонічною функцією трьох змінних. Будемо використовувати наступне твердження.

Лема. *Якщо компоненти вектора* $\mathbf{W}$ *є гармонічними функціями, то загальний розв'язок рівняння*

$$div\mathbf{W} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} \tag{6}$$

має вигляд

$$\mathbf{W} = grad\, K + rot\, M\mathbf{k} + x_1 rot\left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\mathbf{k}\right) - x_2 rot\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\mathbf{k}\right), \tag{7}$$

де P, K, M *— довільні гармонічні функції.*

Доведення. Випадок, коли $P \equiv 0$, розглянуто в теоремі 1. Отже, нам потрібно знайти частковий розв'язок рівняння (6). Легко перевірити, що гармонічний вектор $\mathbf{B}$

$$B_1 = x_1\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} - x_2\frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad B_2 = x_2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} - x_1\frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad B_3 = 0,$$

є частковим розв'язком. Лему доведено.

Таким чином, ми довели аналог теореми Гельмгольца [4] про розклад гармонічного векторного поля.

Наслідок 1. *Довільне гармонічне векторне поле можна подати у вигляді* (7)*, де окремо виділені дивергентна, градієнтна і роторна частини векторного поля.*

Теорема 2. *Загальне зображення розв'язків рівнянь Ляме другого класу з точністю до гармонічних розв'язків* (4) *має вигляд*

$$\mathbf{u} = x_3 grad\, R - (3 - 4\nu)R\,\mathbf{k}, \tag{8}$$

де R *— гармонічна функція трьох змінних.*

Доведення. Наведемо загальний вигляд бігармонічного розв'язку рівнянь Ляме

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{B_1} + x_2\mathbf{B_2} + x_3\mathbf{B_3} + \boldsymbol{\psi}, \tag{9}$$

де $\boldsymbol{\psi} = \psi_1\mathbf{i} + \psi_2\mathbf{j} + \psi_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B_j} = B_{j1}\mathbf{i} + B_{j2}\mathbf{j} + B_{j3}\mathbf{k}$; ψ_j, B_{jk} — гармонічні функції. Згідно з наслідком 1, одна частина вектора $\boldsymbol{\psi}$ врахована гармонічним розв'язком (4), а другу можна включити у коефіцієнти B_{jk}, отже, його можна не враховувати.

Знайдемо об'ємне розширення

$$e \;=\; div\,\mathbf{u} = N + x_1 div\,\mathbf{B_1} + x_2 div\,\mathbf{B_2} + x_3 div\,\mathbf{B_3}, \tag{10}$$

де $N = B_{11} + B_{22} + B_{33}$, та лапласіани

$$\nabla^2 u_j \;=\; 2\left(\frac{\partial B_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{3j}}{\partial x_3}\right),\;\; j = \overline{1,3}. \tag{11}$$

Покажемо, що $div\,\mathbf{B_j} = 0$. Доведення проведемо методом від супротивного. Якщо підставити співвідношення (10), (11) в рівняння Ляме, то отримаємо визначальне рівняння, до якого, крім гармонічних функцій, входять в якості коефіцієнтів змінні x_1, x_2, x_3. Розв'язки цього рівняння визначали б гармонічні функції. А це не так, оскільки гармонічні функції визначаються тільки як розв'язки рівняння Лапласа. Звідси випливає, що коефіцієнти біля змінних x_1, x_2, x_3 у визначальному рівнянні дорівнюють нулю, тобто

$$div\,\mathbf{B_j} \equiv 0, \tag{12}$$

де $j = \overline{1,3}$, що й треба було довести. Визначальні рівняння після врахування умов (12) мають вигляд

$$2\alpha\left(\frac{\partial B_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial B_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{3j}}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial N}{\partial x_j} = 0,\;\; j = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Виразимо з умов (12) компоненти B_{jj}, $j = \overline{1,3}$, підставимо їх в (13) і після перетворень одержимо векторне рівняння

$$2\alpha\, rot\mathbf{W} = grad\,N, \tag{14}$$

де компоненти вектора $\mathbf{W}$ мають такі значення: $W_1 = B_{23} - B_{32}$, $W_2 = B_{31} - B_{13}$, $W_3 = B_{12} - B_{21}$. Подамо вектор $\mathbf{W}$ у вигляді (7), візьмемо від нього ротор, підставимо у рівняння (14) і після використання векторних формул [4] одержимо, що

$$\begin{gathered} rot\mathbf{W} = grad\frac{\partial M}{\partial x_3} + x_1 rotrot\left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\mathbf{k}\right) - \\ -x_2 rotrot\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\mathbf{k}\right) = \frac{1}{2\alpha} gradN. \end{gathered} \tag{15}$$

Із рівнянь (14), (15) випливає, що

$$P = 0, \quad M = \frac{1}{2\alpha}F, \tag{16}$$

де $\frac{\partial F}{\partial x_3} = N$. Визначальні умови на коефіцієнти B_{jk} приймають вигляд

$$\mathbf{W} = gradK + \frac{1}{2\alpha} rotF\mathbf{k}, \quad B_{11} + B_{22} + B_{33} = \frac{\partial F}{\partial x_3}. \tag{17}$$

Ми одержали сім рівнянь (12), (17) для визначення одинадцяти невідомих функцій. Загальний розв'язок цих рівнянь може містити чотири довільні функції. Із леми, після врахування умов (12), випливає, що коефіцієнти B_{jk} можна подати у вигляді

$$B_{j1} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + \frac{\partial H_j}{\partial x_2}, \quad B_{j2} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} - \frac{\partial H_j}{\partial x_1}, \quad B_{j3} = \frac{\partial \psi_j}{\partial x_3}, \tag{18}$$

де ψ_j, H_j, $j = \overline{1,3}$, — довільні гармонічні функції. Введемо нові позначення

$$G_1 = H_1 + \psi_2,\ G_2 = \psi_1 - H_2,\ G_3 = H_3 - K,\ A_1 = \psi_3 + \frac{1}{2\alpha}F. \tag{19}$$

Після використання рівностей (18), одержимо таку визначальну систему:

$$\begin{gathered} \frac{\partial G_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_1} - \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial x_1} + \frac{\partial G_1}{\partial x_2} + \frac{\partial (\psi_3 - F)}{\partial x_3} = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Розв'язок першого рівняння у системі (20) подамо у вигляді

$$\begin{gathered} G_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \quad A_1 = \psi_3 + \frac{1}{2\alpha}F = \\ = \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \end{gathered} \tag{21}$$

Підставимо ψ_3 в четверте рівняння системи (20), з якого після його розв'язання одержимо

$$\begin{gathered} G_1 = \frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} - \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \quad F = -\frac{2\alpha}{2\alpha + 1}\frac{\partial A}{\partial x_3}, \\ G_2 = \frac{\partial A}{\partial x_1} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} + \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \end{gathered} \tag{22}$$

де Φ, Q, A, χ — чотири довільні гармонічні функції. Із другого і третього рівняння системи (20) та другого рівняння у формулах (21) знаходимо, що

$$\begin{gathered} K = -\frac{\partial Q}{\partial x_2} - \frac{\partial \chi}{\partial x_3} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \psi_1 = -\frac{\partial Q}{\partial x_3}, \\ \psi_3 = \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{1}{2\alpha + 1}\frac{\partial A_2}{\partial x_3}. \end{gathered} \tag{23}$$

Підставимо знайдені функції (21)–(23) у зворотному порядку у співвідношення (18), (19) і знайдемо невідомі $B_{k,j}$:

$$
\begin{gathered}
B_{11}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1\partial x_2},\ \ B_{12}=-\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_1}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2\partial x_3}+\\
+\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2},\quad B_{13}=-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^2},\quad B_{21}=-\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_1}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2},\\
B_{22}=\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1\partial x_2},\quad B_{23}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2},\\
B_{31}=b\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial^2\chi}{\partial x_2\partial x_3},\\
B_{32}=b\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1\partial x_3},\\
B_{33}=b\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right),
\end{gathered}
\tag{24}
$$

де $b=(2\alpha+1)^{-1}=(3-4\nu)^{-1}$. Безпосередньо можна встановити, що функції $B_{k,j}$ задовольняють рівняння (12), (13).

Формули (24) після підстановки у (9) задають нові вектори пружних переміщень

$$
\mathbf{u}=x_3 grad\frac{\partial Q}{\partial x_1}-x_1 grad\frac{\partial Q}{\partial x_3},\quad \mathbf{v}=x_2 grad\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}-x_3 grad\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} \tag{25}
$$

для функцій Q, Φ і

$$
\mathbf{w}=x_1 rot\,\mathbf{k}\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}+x_2 rot\,\mathbf{k}\frac{\partial\Pi}{\partial x_2}+x_3 rot\,\mathbf{k}\frac{\partial\Pi}{\partial x_3} \tag{26}
$$

для функції Π. Зазначимо, що поля переміщень (25), (26) задають нові розв'язки рівнянь Ляме. Ці гармонічні вектори переміщень мають нульову дивергенцію, отже, згідно з теоремою 1, їх (після перевизначення) можна подати у вигляді (4).

Тільки функція A задає бігармонічний вектор переміщень у вигляді

$$
\mathbf{u}=\frac{x_3}{3-4\nu}grad\frac{\partial A}{\partial x_3}+x_1 rot\left(\mathbf{k}\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)-x_2 rot\left(\mathbf{k}\frac{\partial A}{\partial x_1}\right), \tag{27}
$$

і його об'ємне розширення відмінне від нуля. Вектор переміщень (27) з точністю до гармонічних розв'язків рівнянь Ляме можна подати

$$
\mathbf{u}=\frac{x_3}{3-4\nu}grad\frac{\partial A}{\partial x_3}-\frac{\partial A}{\partial x_3}\mathbf{k}, \tag{28}
$$

і після введення позначення $R = \frac{1}{3-4\nu}\frac{\partial A}{\partial x_3}$ він набуде вигляду (8). Розв'язок (8) циклічною заміною змінних можна виразити ще у двох симетричних формах. Наведемо ці форми

$$\mathbf{v} = x_2 grad\, H - (3-4\nu)H\mathbf{j}, \tag{29}$$

$$\mathbf{w} = x_1 grad\, G - (3-4\nu)G\mathbf{i}, \tag{30}$$

де H, G — довільні гармонічні вектори. Вектор переміщень (29) переходить з точністю до гармонічного вектора (4) в розв'язок (8), якщо вибрати функцію H з умови $\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial R}{\partial x_3}$, отже, вони є взаємозамінні з точністю до гармонічного вектора. Аналогічно, для розв'язку (30) потрібно покласти $\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{\partial R}{\partial x_3}$. Теорему доведено.

Розглянувши спільно теореми 1, 2, сформулюємо загальну теорему.

Теорема 3. *Загальний розв'язок рівнянь Ляме через гармонічні функції від трьох змінних має вигляд*

$$\mathbf{u} = x_3 grad\, R - (3-4\nu)R\mathbf{k} + grad\, \Psi + rot\, Q\mathbf{k}, \tag{31}$$

де три гармонічні функції R, Ψ, Q є незалежними.

Доведення. При доведенні теореми 2 була використана рівність $div\, \mathbf{B_j} \equiv 0$. Покажемо, що загальну теорему 3 можна довести без посилань на теорему 2.

Для вектора пружних переміщень (31) знайдемо об'ємне розширення

$$div\, \mathbf{u} = -2(1-2\nu)\frac{\partial R}{\partial x_3}.$$

Розглянемо довільний тривимірний розв'язок рівнянь Ляме $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, для якого об'ємне розширення дорівнює $e(x_1, x_2, x_3)$. Для цього розв'язку завжди можна підібрати таку гармонічну функцію

$$R(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2(1-2\nu)}\int e(x_1, x_2, x_3)dx_3, \tag{32}$$

для якої вектор пружних переміщень заданий формулою (8) має об'ємне розширення e. Віднімемо від довільного вектора пружних переміщень $\mathbf{u}$ переміщення, задане формулами (8), (32), і одержимо вектор пружних переміщень, який має нульову дивергенцію. Згідно з теоремою 1, його можна подати у вигляді (4). Отже, довільний розв'язок рівнянь Ляме можна записати у вигляді (31). Теорему доведено.

2.3. Розв'язки рівнянь Ляме як поліноми трьох змінних. Часткові розв'язки рівнянь Ляме у цьому випадку залежать від того, які зусилля прикладені до межі області D. У загальному випадку переміщення можна подати у вигляді (31), де гармонічні функції R, Ψ, Q треба шукати у вигляді поліномів

$$P_j = \sum_{k+m+n<5} a^j_{k,m,n} x_1^k x_2^m x_3^n, \quad j = \overline{1,3}.$$

У роботі [9] знайдено конкретні значення коефіцієнтів $a^j_{k,m,n}$ для тривимірної задачі згину призматичного бруса поперечною силою. Для цієї задачі головний вектор і момент зовнішніх зусиль зрівноважується зусиллями, які створюють переміщення P_j, після перерахунку деформацій у напруження. Об'ємне розширення визначається тільки поліномним розв'язком і приймає таке значення $e = \frac{P(1-2\nu)}{2aEJ_x}(z-c)y$ у позначеннях роботи [9].

3. ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОСТІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ У ФОРМІ ПАПКОВИЧА–НЕЙБЕРА

Розв'язок у формі Папковича–Нейбера або його аналоги [7, 12, 13] широко використовуються у лінійній теорії пружності і є основними при дослідженні тривимірних задач. Тому питання щодо його загальності і необхідної кількості незалежних функцій широко обговорювалися в 30-ті — 50-ті роки минулого століття. Проаналізуємо формули Папковича–Нейбера (1). Після диференціювання вони набувають вигляду

$$4(1-\nu)\mathbf{u} = (3-4\nu)\boldsymbol{\psi} - grad\Psi + x\, grad\psi_1 + y\, grad\psi_2 + z\, grad\psi_3.$$

Нами було показано, що вклад функцій ψ_1, ψ_2 у вектор пружних переміщень можна виразити через ψ_3 і гармонічний вектор (4). Отже, зображення Папковича–Нейбера (1) зводиться до формул (31) і в ньому існує тільки три незалежних гармонічних функції.

Покажемо, що із зображення Папковича–Нейбера без врахування функції Ψ випливають формули (31). Нехай $\boldsymbol{\psi} = gradU$. Врахуємо, що скалярний добуток $\mathbf{X} \cdot gradU$, де $\mathbf{X} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$, є гармонічною функцією. Одержимо, що такий вектор $\boldsymbol{\psi}$ у зображенні (1) утворює градієнтну частину гармонічного вектора. Якщо покласти $\boldsymbol{\psi} = rot(M\mathbf{k})$, то цей вектор задасть роторну частину переміщень (31).

Наслідок 2. *Зображення Папковича–Нейбера* (1) *містять одну зайву функцію* ψ_1 *(або будь-яку іншу).*

4. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ У КРИВОЛІНІЙНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Розглянемо криволінійну ортогональну систему координат $\xi_j(x_1, x_2, x_3)$, $j = \overline{1,3}$. Оскільки вектор пружних переміщень теорії пружності знайдено в інваріантному вигляді (31), то в криволінійній системі ξ_j його позначимо $\mathbf{u}_\xi$, і компоненти згідно з формулами векторних перетворень [4], будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}
u_{\xi 1} &= \frac{x_3}{h_1}\frac{\partial R}{\partial \xi_1} - (3-4\nu)\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}h_1 R + \frac{1}{h_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} + \\
&+ \frac{1}{h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}h_3^2 Q\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}h_2^2 Q\right)\right\}, \\
u_{\xi 2} &= \frac{x_3}{h_2}\frac{\partial R}{\partial \xi_2} - (3-4\nu)\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}h_2 R + + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_2} + \\
&+ \frac{1}{h_1 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}h_1^2 Q\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}h_3^2 Q\right)\right\}, \\
u_{\xi 3} &= \frac{x_3}{h_3}\frac{\partial R}{\partial \xi_3} - (3-4\nu)\frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}h_3 R + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_3} + \\
&+ \frac{1}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}h_2^2 Q\right) - \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}h_1^2 Q\right)\right\},
\end{aligned} \tag{33}$$

де $h_j = \sqrt{(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_j})^2 + (\frac{\partial x_2}{\partial \xi_j})^2 + (\frac{\partial x_3}{\partial \xi_j})^2}$ — метричні коефіцієнти Ляме. Формули (33) дають можливість знайти розв'язок рівнянь Ляме у довільній ортогональній криволінійній системі координат. Відзначимо, що для цього нам не потрібно записувати рівняння Ляме в заданій криволінійній системі координат.

4.1. Циліндрична система координат. Циліндричні координати $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \varphi$, $\xi_3 = x$ зв'язані з декартовими координатами рівняннями [4]:

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = x,$$

а метричні коефіцієнти Ляме набувають значень $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = 1$. Отже, компоненти вектора пружних переміщень (33) у циліндричній системі координат виражаються через три гармонічні функції

$$\begin{gathered}
u_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial Q}{r\partial \varphi} + x\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_\varphi = \frac{\partial \Psi}{r\partial \varphi} - \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{x}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\
u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + x\frac{\partial \Phi}{\partial x} - (3-4\nu)\Phi.
\end{gathered} \tag{34}$$

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що вектор пружних переміщень (34) задовольняє рівняння Ляме [11] в циліндричній системі координат.

4.2. Еліптична система координат. Еліптичні координати $\xi_1 = \lambda$, $\xi_2 = \mu$, $\xi_3 = x$ зв'язані з декартовими координатами рівняннями [4]:

$$x_1 = c\lambda\mu,\ x_2 = c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)},\ x_3 = x,$$

а метричні коефіцієнти Ляме набувають значень $h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}$, $h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}$, $h_3 = 1$. Отже, компоненти вектора пружних переміщень (33) у еліптичній системі координат мають вигляд

$$\begin{gathered} u_\lambda = \frac{x}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial Q}{\partial\mu}, \quad u_\mu = \frac{x}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial Q}{\partial\lambda}, \\ u_x = x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} - (3-4\nu)\Phi, \end{gathered} \tag{35}$$

де Φ, Ψ, Q — три незалежні гармонічні функції у еліптичній системі координат.

ВИСНОВКИ

Систематизовано відомі зображення для вектора пружних переміщень й одержано нові. Знайдено загальний розв'язок рівнянь Ляме і виражено його через гармонічні функції. Доведено, що існує тільки три незалежних функції у поданні розв'язку. Наявність трьох незалежних гармонічних функцій дає змогу однозначно задовольнити три граничні умови на поверхні тривимірного тіла. Відзначено, що потрібно розглядати основні роліноміальні розв'язки, які враховують дію головного вектора і моменту зусиль, прикладених до тіла.

Розбиття розв'язку рівнянь Ляме пов'язано з тим, що загальний розв'язок складається з основного і збуреного. Компоненти НДС збуреного стану заникають при віддаленні від границі тіла і описуються відповідними гармонічними функціями. Основний розв'язок не заникає при віддаленні від границі тіла і описується поліномами, які враховують дію головних векторів сил і моментів прикладених до поверхні тривимірного тіла.

Одержано нові вирази вектора пружних переміщень, які знайдуть широке застосування при розв'язуванні конкретних задач механіки деформівного твердого тіла у декартовій і криволінійній системі координат (циліндрична, еліптична, сферична та ін.).

[1] *Березюк Т.Б., Григоренко А.Я., Дыяк И. И.* Решение задачи о напряженном состоянии цилиндра конечной длины методом Шварца с использованием гибридных аппроксимаций // Прикл. механика. – 2003. – **39,** № 10. – С. 69–74.

[2] *Бородачев Н.М.* О построении точных решений трехмерных задач теории упругости в напряжениях // Прикл. механика. – 2001. – **37,** № 6. – С. 67–73.

[3] *Гузь А.Н.* О расчетных схемах в линеаризированной механике деформируемых тел // Прикл. механика. – 2004. – **40,** № 5. – С. 30–47.

[4] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – М.: Наука, 1974. – 831 с.

[5] *Крутков Ю.А.* Тензор функции напряжений и общие решения в статике теории упругости. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – 200 с.

[6] *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

[7] *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

[8] *Папкович П. Ф.* Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции // Известия АН СССР. Сер. матем. и естеств. наук. – 1932, № 10. – С. 1425–1435.

[9] *Revenko V.P.* The Three-Dimensional Stress State of an Orthotropic Prism of Rectangular Cross-Section under Action of a Transverse Force Applied to the Face// Int. Appl. Mech. – 2005, № 4, P. 367–373.

[10] *Ревенко В.П.* Знаходження напружено-деформованого стану товстостінного циліндра, навантаженого довільними торцевими зусиллями // Доп. НАН України. – 2004, № 1. – С. 55–61.

[11] *Рекач В.Г.* Руководство к решению задач по теории упругости. – М.: Высшая школа, 1977. – 216 с.

[12] *Слободянский М.Г.* Общие формы решения уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18,** № 1. – С. 55–74.

[13] *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

[14] *Улитко А.Ф.* Векторные разложения в пространственной теории упругости. – К: Академпериодика, 2002. – 342 с.

[15] *Neuber H.* Ein neuer Ansatz zur Lösung raämlicher Probleme der Elastizitätstheorie // ZAMM. – 1934. – **14,** № 4.

CONSTRUCTION OF THE GENERAL SOLUTION TO THE LAME THREE-DIMENSIONS EQUATIONS OF ELASTICITY THEORY

Victor REVENKO

Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine

The Lame equation is integrated, new solutions for three-dimensions elasticity theory are found. They are expressed in terms of harmonic functions. It is proved that exist only three independent functions. A general equation is proposed to define the presentation of displacement vector. Several forms of the displacement vector expression in terms of harmonic functions are obtained. The solution is constructed in the curvilinear coordinate system in terms of three independent harmonic functions. As a special case the general solution of the Lame equations is presented in a cylindrical and elliptical coordinate system.