ЗАДАЧА З РОЗПОДІЛЕНИМИ ДАНИМИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

©2005 р. Оксана МЕДВІДЬ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів 79601

Редакція отримала статтю 25 липня 2005 р.

Досліджено коректність задачі з інтегральними умовами для факторизованих рівнянь з частинними похідними. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Багато задач, які виникають при дослідженні процесів теплопровідності, теплопружності, динаміки підземних вод зводяться до задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними. Такі задачі, які ще називають задачами з розподіленими даними, досліджувались у [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11]. Зокрема, у роботах [7, 8, 9] встановлено умови коректної розв'язності задач з інтегральними умовами для еволюційних систем рівнянь в безмежному шарі, вивчено залежність коректності таких задачі від товщини розглядуваного шару. Дослідження інтегральних задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях пов'язане з проблемою малих знаменників; у працях [3, 4] на основі метричного підходу, використаного для оцінок знизу малих знаменників, встановлено розв'язність таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел, які є значеннями верхньої межі інтегрування в інтегральних умовах.

УДК 517.95+511.2; MSC 2000: 11K60, 35A05, 35B10, 35B30, 42B05
Робота виконана при фінансовій подтримці ДФФД України (проект № 10.01/053)

Дана робота продовжує і розвиває дослідження, розпочаті у [3, 4]. Її основною метою є встановлення результату про існування для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ розв'язку інтегральної задачі для факторизованих рівнянь із частинними похідними, де $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — коефіцієнти факторизації.

1. Використовуємо такі позначення: Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_p = (0,T) \times \Omega_p$, $T > 0$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \ldots, -i\partial/\partial x_p)$, $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $\|k\| = 1+|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x) = k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $\Pi_n = \{\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n : \lambda_1 < \ldots < \lambda_n\}$, H_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik,x)$ за нормою

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 \|k\|^{2\alpha}};$$

$C^n([0,T]; H_\alpha)$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $j = 0, 1, \ldots, n$, належать до простору H_α і як елементи цього простору є неперервними за $t \in [0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T]; H_\alpha)$ задаємо формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; H_\alpha)\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}; H_\alpha \right\|.$$

2. Розглядаємо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t,x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j A(D_x)\right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_p, \quad (1)$$

$$\int_0^T t^{j-1} u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad x \in \Omega_p, \quad (2)$$

де $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Pi_n$, $A(D_x)$ — такий диференціальний вираз, що

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad a_1\|k\|^N \leq |A(k)| \leq a_2\|k\|^N, \quad a_1, a_2 > 0. \quad (3)$$

Означення 1. *Задачу* (1), (2) *назвемо* (α_0, α)*-коректною, якщо для довільних* $\varphi_j \in H_\alpha$, $j = 1, \ldots, n$, *у просторі* $C^n([0,T]; H_{\alpha_0})$ *існує єдина функція* $u(t,x)$, *яка є розв'язком рівняння* (1), *справджує умови* (2) *та умову*

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; H_{\alpha_0})\| \leq C_1 \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j(x); H_\alpha\|, \quad (4)$$

де стала $C_1 > 0$ *не залежить від вибору* $\varphi_j \in H_\alpha$, $j = 1, \dots, n$.

Позначимо: $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$\Delta(k, \vec{\lambda}) = \det \left\| \int_0^T t^{j-1} \exp(\lambda_q A(k) t) dt \right\|_{j,q=1}^n, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{5}$$

$$\delta_1(\vec{\lambda}) = \begin{cases} \sum\limits_{j\,:\,\lambda_j<0} \lambda_j, & \text{якщо } \exists\, j \in \{1, \dots, n\} : \lambda_j < 0, \\ 0, & \text{якщо } \forall\, j \in \{1, \dots, n\} : \lambda_j \geq 0, \end{cases}$$

$$\delta_2(\vec{\lambda}) = \begin{cases} \sum\limits_{j\,:\,\lambda_j>0} \lambda_j, & \text{якщо } \exists\, j \in \{1, \dots, n\} : \lambda_j > 0, \\ 0, & \text{якщо } \forall\, j \in \{1, \dots, n\} : \lambda_j \leq 0. \end{cases}$$

Означення 2. *Вектор* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ *назвемо* ω*-нормальним, якщо існують такі сталі* $C_2, C_3 > 0$, *що виконуються нерівності*

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq \begin{cases} C_2 \|k\|^{-\omega} \exp(\delta_1(\vec{\lambda}) \operatorname{Re} A(k) T), & k \in K_1, \\ C_3 \|k\|^{-\omega} \exp(\delta_2(\vec{\lambda}) \operatorname{Re} A(k) T), & k \in K_2, \end{cases}$$

де $K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : \operatorname{Re} A(k) \leq 0\}$, $K_2 = \{k \in \mathbb{Z}^p : \operatorname{Re} A(k) > 0\}$.

Лема 1. *Якщо* $A(k) \neq 0$, *то для довільних* $\mu \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ *виконуються рівності*

$$\int\limits_0^T t^m \exp(\mu A(k) t) dt = \begin{cases} \dfrac{P_m(\mu A(k)) \exp(\mu A(k) T) + (-1)^{m+1}}{\mu^{m+1} A(k)^{m+1}}, & \mu \neq 0, \\ \dfrac{T^{m+1}}{m+1}, & \mu = 0, \end{cases} \tag{6}$$

де $P_m(\xi) = (-1)^m m! \sum\limits_{q=1}^{m+1} (-1)^{q-1} (T\xi)^{m+1-q} / (m+1-q)!$.

Доведення леми проводиться інтегруванням частинами.

3. Встановимо достатні умови коректності задачі (1), (2).

Теорема 1. *Якщо для виразу* $A(D_x)$ *виконується умова* (3), *а вектор* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ *є* ω*-нормальним, то задача* (1), (2) *є* $(\alpha, \alpha + \omega + N)$*-коректною,* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $\varphi_j \in H_{\alpha+\omega+N}$, $j = 1, \dots, n$. Покажемо, що в просторі $C^n([0, T]; H_\alpha)$ існує єдина функція, яка є розв'язком рівняння (1) і справджує умови (2), (4). Оскільки вектор $\vec{\lambda}$ є ω-нормальним, то $\Delta(k,\vec{\lambda}) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок інтегральної задачі

$$L\left(\frac{d}{dt},k\right)u_k(t)=0, \quad \int_0^T t^{j-1}u_k(t)dt=\varphi_{jk}, \quad j=1,\dots,n; \tag{7}$$

цей розв'язок зображується рівністю

$$u_k(t)=\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})}{\Delta(k,\vec{\lambda})}\varphi_{jk}\exp(\lambda_q A(k)t), \tag{8}$$

де φ_{jk}, $k\in\mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\dots,n$, відповідно, а $\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})$ — алгебричне доповнення елемента $\int_0^T t^{j-1}\exp(\lambda_q A(k)t)dt$, $j,q=1,\dots,n$, у визначнику $\Delta(k,\vec{\lambda})$.

Із формул (5), (6) та умови (3) отримуємо, що

$$\begin{gathered}|\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})|\cdot|\exp(\lambda_q A(k)t)|\le C_4\|k\|^{-(n-1)N}\exp(\delta_1(\vec{\lambda})\operatorname{Re}A(k)T),\\ j,q=1,\dots,n,\quad k\in K_1,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}|\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})|\cdot|\exp(\lambda_q A(k)t)|\le C_5\|k\|^{-(n-1)N}\exp(\delta_2(\vec{\lambda})\operatorname{Re}A(k)T),\\ j,q=1,\dots,n,\quad k\in K_2.\end{gathered} \tag{10}$$

Враховуючи, що вектор $\vec{\lambda}$ є ω-нормальним, з оцінок (9), (10) дістаємо

$$\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(r)}(t)|\le C_6\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|\cdot\|k\|^{\omega+N}, \quad r=0,1,\dots,n. \tag{11}$$

Розглянемо функцію

$$u(t,x)=\sum_{|k|\ge 0}u_k(t)\exp(ik,x), \tag{12}$$

коефіцієнти $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, якої визначені формулою (8). З нерівностей (11) випливає, що

$$\begin{gathered}\|u(t,x);C^n([0,T];H_\alpha)\|\le\\ \le C_7\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}|\varphi_{jk}|^2\|k\|^{2(\alpha+\omega+N)}}=C_7\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j(x);H_{\alpha+\omega+N}\|<\infty,\end{gathered}$$

тобто ряд (12) належить до простору $C^n([0,T];H_\alpha)$ і для нього виконується умова (4). Оскільки коефіцієнти $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є розв'язками задачі

(7), то ряд (12) є розв'язком задачі (1), (2). Єдиність цього розв'язку випливає з того, що $\Delta(k,\vec{\lambda}) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$.

Теорему доведено.

4. З'ясуємо питання про міру множини ω-нормальних векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$. Для цього використаємо таке допоміжне твердження.

Лема 2. *Нехай* $f(t) = \exp(\mu t)p(t) + q(t)$, $\mu \neq 0$, *де* $p(t), q(t)$ *— многочлени степенів* $(n-1), (m-1)$ *відповідно,* $n, m \in \mathbb{N}$. *Якщо для деяких комплексних чисел* a_j, $j = 1, \ldots, N$, *виконується умова*

$$|f^{(N)}(t) + a_1 f^{(N-1)}(t) + \ldots + a_N f(t)| \geq \delta > 0, \quad t \in [a,b],$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ *виконується нерівність*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [a,b] : |f(t)| \leq \varepsilon\} \leq C_8\,(1+|\mu|)(\varepsilon/\delta)^{1/N},$$

де $\varepsilon_3 = \delta/(2(N+1)A^N)$, $A \equiv 1 + \max\limits_{1\leq j\leq N} |a_j|^{1/j}$, $C_8 = C_8(N, n, m, b-a) > 0$.

Теорема 2. *Якщо для виразу* $A(D_x)$ *виконується умова* (3), *то майже всі (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) вектори* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ *є* ω*-нормальними, де* $\omega > n^2 N + (3n-1)np/2$.

Доведення. Розглянемо таку функцію:

$$\Delta_1(k,\vec{\lambda}) = \begin{cases} (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)^n A^{n^2}(k) \exp(-\delta_1(\vec{\lambda})A(k)T)\Delta(k,\vec{\lambda}), & k \in K_1, \\ (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n)^n A^{n^2}(k) \exp(-\delta_2(\vec{\lambda})A(k)T)\Delta(k,\vec{\lambda}), & k \in K_2. \end{cases}$$

Доведемо спочатку, що при $\omega_1 > (3n-1)np/2$ нерівність

$$|\Delta_1(k,\vec{\lambda})| \geq \|k\|^{-\omega_1} \tag{13}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. З огляду на лему Бореля–Кантеллі [6], для цього досить довести, що для довільного $\rho > 1$ є збіжним ряд

$$\sum_{|k|\geq 0} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} M(k,\rho), \tag{14}$$

де $M(k,\rho)$ — множина тих векторів $\vec{\lambda} \in [-\rho,\rho]^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n}\{\vec{\lambda} : |\lambda_j| < \rho^{-1}\}$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (13), виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. Позначимо: $J_0 = [-\rho, -\rho^{-1}]$, $J_1 = [\rho^{-1}, \rho]$. Оскільки

$$[-\rho,\rho]^n \setminus \bigcup_{j=1}^{n}\{\vec{\lambda} : |\lambda_j| < \rho^{-1}\} = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{0,1\}^n} J_{i_1} \times \ldots \times J_{i_n},$$

то
$$M(k,\rho) = \bigcup_{\sigma=(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} M_\sigma(k,\rho), \tag{15}$$

де $M_\sigma(k,\rho) = (J_{i_1}\times\ldots\times J_{i_n}) \cap M(k,\rho)$. Доведемо, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, $\sigma\in\{0,1\}^n$ виконується оцінка
$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} M_\sigma(k,\rho) \le C_9\|k\|^{-p-\varepsilon}, \tag{16}$$

де додатна стала C_9 незалежить від k. Очевидно, що з рівності (15) та оцінок (16) випливає збіжність ряду (14).

Щоб не ускладнювати позначень, оцінку (16) встановимо для випадку, коли $k\in K_2$, а $\sigma=\sigma_0=(\underbrace{0,\dots,0}_{l},\underbrace{1,\dots,1}_{n-l})$, де l — фіксоване натуральне число, $1\le l\le n-1$.

Якщо $\vec\lambda\in M_{\sigma_0}(k,\rho)$, $k\in K_1$, то $\Delta_1(k,\vec\lambda)$ співпадає з визначником матриці $\|\delta_{j,q}(k,\vec\lambda)\|_{j,q=1}^n$, елементи якої обчислюються за формулами
$$\delta_{j,q}(k,\vec\lambda) = Q_j(\lambda_q A(k)T)\exp(\lambda_q A(k)T) + (-1)^j(\lambda_q A(k)T)^{n-j},$$
$$j=1,\dots,n,\quad q=1,\dots,l,$$
$$\delta_{j,q}(k,\vec\lambda) = Q_j(\lambda_q A(k)T) + (-1)^j(\lambda_q A(k)T)^{n-j}\exp(-\lambda_q A(k)T),$$
$$j=1,\dots,n,\quad q=l+1,\dots,n,$$

де
$$Q_j(\xi) = \sum_{i=1}^{j}\frac{(-1)^{i-1}(j-1)!\xi^{j-i}}{(j-i)!},\quad j=1,\dots,n.$$

Легко перевірити, що існує матриця M розміру $(n-l)\times(n-l)$, елементи якої не залежать від k, $\vec\lambda$, така, що $\det M=1$ і
$$\begin{Vmatrix}\mathbf{1}_l & \mathbf{0}_{l\times(n-l)}\\ \mathbf{0}_{(n-l)\times l} & M\end{Vmatrix}\cdot\|\delta_{j,q}(k,\vec\lambda)\|_{j,q=1}^n = \|\gamma_{j,q}(k,\vec\lambda)\|_{j,q=1}^n \tag{17}$$

де $\mathbf{1}_l$ — одинична матриця розміру $l\times l$, $\mathbf{0}_{l\times(n-l)}$, $\mathbf{0}_{(n-l)\times l}$ — нульові матриці розмірів $l\times(n-l)$, $(n-l)\times l$ відповідно.

Згідно з вибором матриці M, з рівності (17) випливає, що
$$\Delta_1(k,\vec\lambda) = \det\|\gamma_{j,q}(k,\vec\lambda)\|_{j,q=1}^n,$$

Елементи матриці $\|\gamma_{j,q}(k,\vec{\lambda})\|_{j,q=1}^{n}$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
\gamma_{j,q}(k,\vec{\lambda}) &= \delta_{j,q}(k,\vec{\lambda}),\\
&\quad j=1,\dots,l,\quad q=1,\dots,n,\\
\gamma_{j,q}(k,\vec{\lambda}) &= R_j(\lambda_q A(k)T)\exp(\lambda_q A(k)T)+S_j(\lambda_q A(k)T),\\
&\quad j=l+1,\dots,n,\quad q=1,\dots,l,\\
\gamma_{j,q}(k,\vec{\lambda}) &= R_j(\lambda_q A(k)T)+S_j(\lambda_q A(k)T)\exp(-\lambda_q A(k)T),\\
&\quad j=l+1,\dots,n,\quad q=l+1,\dots,n,
\end{aligned}$$

де $R_j(\xi)$ — многочлен степеня $(n+l-j)$, $S_j(\xi)$ — многочлен степеня не вищого за $(n-l)$.

Через $\Delta_j(k,\vec{\lambda})$, $j=1,\dots,n$, позначимо визначник матриці, яка отримується з матриці $\|\gamma_{j,q}(k,\vec{\lambda})\|_{j,q=1}^{n}$ викреслюванням перших $(j-1)$ рядків та перших $(j-1)$ стовпців, покладемо також $\Delta_{n+1}(k,\vec{\lambda})=1$.

Для кожного $j=1,\dots,n$ розглянемо такі множини:

$$M_{\sigma_0,j}(k,\rho)=\{\vec{\lambda}\in J_0^l\times J_1^{n-l}:|\Delta_j(k,\vec{\lambda})|<\nu_j(k),|\Delta_{j+1}(k,\vec{\lambda})|\geq\nu_{j+1}(k)\},$$

де $\nu_j(k)=\|k\|^{-\omega_j}$, $\omega_{n+1}=1$,

$$\omega_j=(n-j+1)(3n-j)[p/2+\varepsilon/((3n-1)n)],\quad j=1,\dots,n,$$

$\varepsilon=\omega_1-(3n-1)np/2>0$. Легко перевірити, що

$$M_{\sigma_0}(k,\rho)\subset\bigcup_{j=1}^{n}M_{\sigma_0,j}(k,\rho). \tag{18}$$

Тому

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}M_{\sigma_0}(k,\rho)\leq\sum_{j=1}^{n}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}M_{\sigma_0,j}(k,\rho). \tag{19}$$

За теоремою Фубіні

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}M_{\sigma_0,j}(k,\rho)=\int_{I_j}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}M_{\sigma_0,j}(k,\rho,\vec{\lambda}_j)d\vec{\lambda}_j,\quad j=1,\dots,n, \tag{20}$$

де $I_j = J_0^{l-1} \times J_1^{n-l}$, $j = 1, \ldots, l$, $\quad I_j = J_0^{l} \times J_1^{n-l-1}$, $j = l+1, \ldots, n$,

$$\vec{\lambda}_j = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$d\vec{\lambda}_j = d\lambda_1 \ldots d\lambda_{j-1} d\lambda_{j+1} \ldots d\lambda_n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$M_{\sigma_0,j}(k, \rho, \vec{\lambda}_j) = \{\lambda_j \in J_0 : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n) \in \\ \in M_{\sigma_0,j}(k, \rho)\}, \quad j = 1, \ldots, l,$$

$$M_{\sigma_0,j}(k, \rho, \vec{\lambda}_j) = \{\lambda_j \in J_1 : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n) \in \\ \in M_{\sigma_0,j}(k, \rho)\}, \quad j = l+1, \ldots, n.$$

Розкладаючи кожен із визначників $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$, $j = 1, \ldots, n$, за елементами його першого стовпця, легко перевірити, що

$$P_j\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k\right) \Delta_j(k, \vec{\lambda}) = c_j A^{2n-j}(k) \Delta_{j+1}(k, \vec{\lambda}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

де c_j, $j = 1, \ldots, n$, — додатні сталі, які не залежать від $k, \vec{\lambda}$,

$$P_j\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} - A(k)T\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\right)^{n-j}, \quad j = 1, \ldots, l,$$

$$P_j\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j} + A(k)T\right)^{n-l} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\right)^{n-j+l}, \quad j = l+1, \ldots, n.$$

Для оцінки зверху мір Лебега множин $M_{\sigma_0,j}(k, \rho, \vec{\lambda}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, $k \in K_1$, застосуємо лему 2. Для цього зазначимо, що для фіксованих λ_q, $j \neq q$, визначник $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$ є квазімногочленом змінної λ_j. Якщо $\vec{\lambda} \in M_{\sigma_0,j}(k, \rho)$, то з формул (21) та означення множини $M_{\sigma_0,j}(k, \rho)$ випливає, що

$$|P_j(\partial/\partial \lambda_j, k) \Delta_j(k, \vec{\lambda})| \geq d_j |A(k)|^{2n-j} \nu_{j+1}(k), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{22}$$

де додатні сталі d_j, $j = 1, \ldots, n$, не залежать від $k, \vec{\lambda}$. Оскільки степінь многочлена $P_j(\xi, k)$, $j = 1, \ldots, n$, за змінною ξ дорівнює $2n - j$, а модуль коефіцієнта при ξ^{2n-j-q} у многочлені $P_j(\xi, k)$ не перевищує $C_{10}|A(k)|^q$, $q = 1, \ldots, n$, то з оцінок (22) на підставі леми 2 отримуємо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} M_{\sigma_0,j}(k, \rho, \vec{\lambda}_j) \leq C_{11}|A(k)| \left(\frac{\nu_j(k)}{|A(k)|^{2n-j} \nu_{j+1}(k)}\right)^{1/(2n-j)} \leq \\ \leq C_{12} \|k\|^{-p-2\varepsilon/(n(3n-1))}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{23}$$

де стала C_{12} не залежить від вибору значень $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n$. Інтегруючи оцінки (23), з рівностей (20) отримаємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} M_{\sigma_0,j}(k,\rho) \leq C_{13}\|k\|^{-p-2\varepsilon/(n(3n-1))}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \in K_2. \quad (24)$$

Враховуючи нерівності (19), з оцінок (24) дістаємо, що оцінка (16) виконується для $k \in K_2$, $\sigma = \sigma_0$. Для $k \in K_1$ та решти значень $\sigma \in \{0,1\}^n$ оцінка (16) доводиться аналогічно.

З наведених міркувань випливає, що при $\omega_1 > (3n-1)np/2$ нерівність

$$|\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n|^n |A(k)|^{n^2} |\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq \|k\|^{-\omega_1} \exp(\delta_1(\vec{\lambda}) \operatorname{Re} A(k)T), \qquad (25)$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in K_1$, а нерівність

$$|\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n|^n |A(k)|^{n^2} |\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq \|k\|^{-\omega_1} \exp(\delta_2(\vec{\lambda}) \operatorname{Re} A(k)T), \qquad (26)$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in K_2$. Враховуючи те, що для виразу $A(D_x)$ виконується умова (3), і те, що міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини $\{\vec{\lambda} \in \Pi_n : (\exists k^0 \in \mathbb{Z}^p)\, \Delta(k^0, \vec{\lambda}) = 0\}$ дорівнює нулю, з нерівностей (25), (26) тримуємо твердження теореми.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (3). *Якщо* $A(k) \in \mathbb{R}$, $A(k) \geq 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}^p$, *то кожний вектор* $\vec{\lambda} \in \Pi_n \cap \mathbb{R}^n_-$ *є* $n(n+1)N/2$*-нормальним, кожний вектор* $\vec{\lambda} \in \Pi_n \cap \mathbb{R}^n_+$ *є* nN*-нормальним.*

Для доведення цієї теореми встановимо спочатку таке твердження.

Лема 3. *Якщо* $A(k) \in \mathbb{R}$, *то для довільного* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ *визначник* $\Delta(k, \vec{\lambda})$ *є відмінним від нуля.*

Доведення. Відомо [5, ч. 1, задача 68 на с. 72], що

$$\Delta(k, \vec{\lambda}) = \frac{1}{n!} \int_{[0,T]^n} \delta(k; \tau_1, \ldots, \tau_n) V(\tau_1, \ldots, \tau_n) d\tau_1 \ldots d\tau_n.$$

де

$$\delta(k; \tau_1, \ldots, \tau_n) = \det \| \exp(\lambda_q A(k) \tau_j) \|_{j,q=1}^n,$$
$$V(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\tau_j - \tau_q).$$

Через I_ω, $\omega = (i_1, \ldots, i_n) \in S_n$, де S_n — симетрична група перестановок елементів множини $\{1, \ldots, n\}$, позначимо симплекс $\{(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in [0,T]^n :$

$\tau_{i_1} \leq \ldots \leq \tau_{i_n}\}$. Розбиваючи куб $[0,T]^n$ на $n!$ симплексів I_ω, $\omega \in S_n$, дістанемо, що

$$\Delta(k,\vec{\lambda}) = \frac{1}{n!}\sum_{\omega\in S_n}\int_{I_\omega}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n. \tag{11}$$

Із того, що $A(k)\in\mathbb{R}$, та теореми Пойя [10, с. 87] про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для звичайного диференціального оператора, який розкладається у композицію диференціальних операторів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, випливає, що визначник $\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)$ є відмінним від тотожного нуля у симплексі I_σ, де $\sigma=(1,\ldots,n)$, і не може набувати у ньому значень різних знаків. Оскільки $V(\tau_1,\ldots,\tau_n)\geq 0$ для всіх $(\tau_1,\ldots,\tau_n)\in I_\sigma$, то звідси випливає, що

$$\int_{I_\sigma}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n\neq 0. \tag{12}$$

Зауважимо, що для довільної перестановки $\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_n$

$$\delta(k;\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n),$$

$$V(\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega}V(\tau_1,\ldots,\tau_n),$$

де ρ_ω — кількість інверсій у перестановці $\omega\in S_n$. Враховуючи ці формули і замінюючи змінні під знаком інтеграла, дістанемо, що

$$\int_{I_\omega}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n =$$

$$= \int_{I_\sigma}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n.$$

Тоді з формул (11), (12) випливає, що

$$\Delta(k,\vec{\lambda}) = \int_{I_\sigma}\delta(k;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n\neq 0.$$

Доведення теореми 3. Застосовуючи лему 1 для обчислення елементів визначника $\Delta(k,\vec{\lambda})$, дістанемо, що для досить великих $|k|$ правильними є нерівності

$$|\Delta(k,\vec{\lambda})| \geq \frac{1}{2}\left|\det\|(-1)^j\lambda_q^{-j}A^{-j}(k)\|_{j,q=1}^n\right| \geq C_{14}|A(k)|^{-n(n+1)/2}\geq$$
$$\geq C_{14}b_1^{-n(n+1)/2}\|k\|^{-n(n+1)N/2}, \tag{27}$$

якщо $\vec{\lambda} \in \Pi_n \cap \mathbb{R}^n_-$, та нерівності

$$|\Delta(k,\vec{\lambda})| \geq \frac{1}{2}\Big| \det \big\|\exp(\lambda_q A(k)T) P_{j-1}(\lambda_q A(k))\lambda_q^{-j} A^{-j}(k)\big\|^n_{j,q=1} \Big| =$$
$$= \frac{1}{2}\exp(\delta_2(\vec{\lambda})A(k)T)\Big| \det \|P_{j-1}(\lambda_q A(k)T)\lambda_q^{-j}A^{-j}(k)\|^n_{j,q=1}\Big| \geq$$
$$\geq C_{15}|A(k)|^{-n}\exp(\delta_2(\vec{\lambda})A(k)T), \quad (28)$$

якщо $\vec{\lambda} \in \Pi_n \cap \mathbb{R}^n_+$. Оскільки, згідно з лемою 3, $\Delta(k,\vec{\lambda}) \neq 0$, то з оцінок (27), (28) дістаємо твердження теореми 1.

5. Із теорем 1, 2, 3 випливають такі наслідки про розв'язність задачі з інтегральними умовами (2) для рівнянь (1), які відповідають векторові $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Pi_n$.

Наслідок 1. *Якщо виконується умова* (3)*, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ *задача* (1), (2) *є*

$$(\alpha, \alpha + (3n-1)np/2 + (n^2+n)N + \varepsilon) - \textit{коректною}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Наслідок 2. *Якщо виконується умова* (3)*, то:*
1) для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n \cap \mathbb{R}^n_-$ *задача* (1), (2) *є*

$$(\alpha, \alpha + n(n+1)N/2 + N + \varepsilon) - \textit{коректною}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

2) для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n \cap \mathbb{R}^n_+$ *задача* (1), (2) *є*

$$(\alpha, \alpha + (n+1)N + \varepsilon) - \textit{коректною}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

[1] *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами// Доп. АН України. – Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.

[2] *Иванчов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 4. – С. 547–564.

[3] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 92–101.

[4] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Задача з розподіленими даними для рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 155–159.

[5] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с. – Ч. 2. – 432 с.

[6] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[7] *Фардигола Л.В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.

[8] *Фардигола Л.В.* Интегральная краевая задача в слое // Матем. заметки. – 1993. – **53**, вып. 6.– С. 122–129.

[9] *Фардигола Л.В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Матем. сборник. – 1995. – **186**, № 11. – С. 123–144.

[10] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

[11] *Штабалюк П.И.* Почти-периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов // Дисс. ... канд. физ.– мат. наук. – Львов. – 1984. – 146 с.

THE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR FACTORIZED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Oksana MEDVID

Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine

The correctness of the problem with integral conditions for factorized linear partial differential equations with constant coefficients is investigated. The sufficient conditions of existence of an unique periodic solution of the problem are established. In exploring the possibility of the realization of these conditions the metric approach and Lebesgue measure are used.