Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2014. — Т.11

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2014. — V.11

ПОЛІНОМІАЛЬНІСТЬ НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Анатолій Плічко

Краківська політехніка ім. Тадеуша Костюшка
вул. Варшавська, 24, Краків 31-155, Польща

А. Плічко. *Поліноміальність нарізно поліноміальних операторів* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2014. — Т.11. — С. 33–35.

Доводиться поліноміальність нарізно поліноміальних операторів у дійсних банахових просторах.

A. Plichko, *Polynomiality of separately polynomial operators*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **11** (2014), 33–35.

We show that separately polynomial operators in real Banach spaces are polynomial.

Добре відомо (див. напр. [1, Satz III*], [2, Lemma 1]), що кожна нарізно поліноміальна функція f з $\mathbb{R}^n$ в лінійний простір Z є поліноміальною за сукупністю змінних. Поняття полінома можна перенести на відображення в лінійних просторах, які традиційно називаються *операторами*. А саме, оператор P з лінійного простору X в лінійний простір Y називається *однорідним поліномом* степеня k, якщо існує такий симетричний полілінійний оператор $T : X^k \to Y$, що $P(x) = T(x, \dots, x)$ на X. Довільна сума $P = \sum_{k=0}^{n} P_k$, де кожен $P_k : X \to Y$ – однорідний поліном степеня k, називається *поліномом*. Коли хочемо підкреслити, що відображення P діє з одного лінійного простору в інший, то говоримо про *поліноміальний оператор*, а коли хочемо підкреслити, що воно діє з лінійного простору в поле скалярів, то вживаємо термін *поліноміальний функціонал*. Оператор $U : X \times Y \to Z$, де X, Y, Z – лінійні простори, називаємо *поліномом за першою змінною*, якщо для кожного фіксованого $y \in Y$ оператор $U_y(x) = U(x, y)$ буде поліномом від змінної $x \in X$. Цей оператор називаємо *поліномом за першою змінною степеня не вищого*

2010 *Mathematics Subject Classification:* 46G25, 47H60 *УДК:* 517.98
Ключові слова і фрази: Polynomial operators
E-mail: aplichko@pk.edu.pl

від n, якщо для кожного $y \in Y$ оператор $U_y(x)$ буде поліномом за змінною x степеня не вищого від n. Те ж саме стосується другої змінної.

Косован і Маслюченко [3] довели, що коли відображення $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ на добутку комплексних банахових просторів X, Y є нарізно неперервним поліноміальним функціоналом, то воно буде неперервним поліномом за сукупністю змінних і поставили питання про справедливість цього твердження для просторів над полем дійсних чисел. Подібні питання для поліноміальних операторів розглядали Мазур і Орліч [1]. Ми покажемо, що відповідь на питання Косована і Маслюченка ствердна і що вона значною мірою міститься всередині доведень праці Мазура й Орліча. Для простоти викладу обмежимося банаховими просторами і дійсними скалярами.

Теорема 1. [1, Satz II], [2, Corollary 3]. *Нехай U – оператор з лінійного простору X в лінійний простір Y. Для того, щоб U був поліномом щонайбільше n-го степеня, необхідно і досить, щоб для кожних елементів x, h з X існували елементи $y_0, \dots, y_n$ з Y, для яких $U(x + th) = t^0 y_0 + \cdots + t^n y_n$ для довільного дійсного t.*

Теорема 2. (Пор. [1, Satz III*]). *Нехай U – нарізно неперервний оператор з декартового добутку $X \times Y$ банахових просторів у банахів простір Z. Якщо $U(x, y)$ є поліномом степеня щонайбільше m відносно x і поліномом степеня щонайбільше n відносно y, то він буде неперервним поліномом за сукупністю змінних степеня щонайбільше $m + n$.*

Доведення. Покажемо спочатку поліноміальність U. З цією метою візьмемо довільні елементи $x, h \in X$ і $y, k \in Y$. За теоремою 1, функція $U(x+sh, y+tk)$, $s, t \in \mathbb{R}$, буде поліномом степенів не вище m за змінною s і не вище n за змінною t. За згаданим результатом з [1, Satz III*], [2, Lemma 1] вона буде поліномом степеня не вище $m + n$ за сукупністю змінних. Зокрема, функція $U(x+th, y+tk)$, $t \in \mathbb{R}$, буде поліномом степеня не вище $m+n$. Тоді, внаслідок теореми 1, оператор U буде поліномом степеня не вище $m + n$.

Перевіримо тепер неперервність оператора U. Введемо на $X \times Y$ норму, наприклад $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Неперервність поліноміального оператора на банаховому просторі еквівалентна його обмеженості на одиничній кулі [1, с. 179]. А обмеженість випливає з принципу рівномірної обмеженості [1, Satz VII]. □

Теорема 3. (Пор. [1, Satz IV]). *Нехай U – нарізно неперервний оператор з декартового добутку $X \times Y$ банахових просторів у банахів простір Z. Якщо $U(x, y)$ є поліномом відносно кожної змінної, то він буде неперервним поліномом за сукупністю змінних.*

Доведення. За умовою теореми, для кожного фіксованого $x \in X$, $U_x(y) = U(x, y)$ є неперервним поліномом за змінною y певного степеня $n(x)$. Для кожного цілого $n \geq 0$ розглянемо множину $A_n = \{x \in X : n(x) \leq n\}$. Покажемо, що ця множина замкнена. Справді, нехай $x_k \in A_n$, $k \in \mathbb{N}$, і $x_k \to x$

при $k \to \infty$. Тоді послідовність неперервних поліномів U_{x_k}, $k \in \mathbb{N}$, степеня щонайбільше n поточково збігається до U_x. Унаслідок [1, с. 182], степінь полінома U_x не може бути більшим за n, тобто $x \in A_n$.

Далі, з рівності $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ і теореми Бера про категорії випливає, що одна з множин A_n, містить певну кулю з центром x_0 і радіусом $r > 0$.

Доведемо, що $U(x,y)$ буде поліномом за змінною y степеня щонайбільше n. Унаслідок теореми 1, для перевірки цього твердження досить показати, що для довільних фіксованих елементів $x \in X$ та $y, h \in Y$ функція $U(x, y + th)$ дійсної змінної t буде поліномом степеня не вищого за n. Покладемо

$$V(s,t) = U(x_0 + s(x - x_0), y + th)\,, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

та $S = \{s \in \mathbb{R} : \|s(x - x_0)\| \le r\}$. Для фіксованого $s \in S$, на підставі означень x_0 та r, оператор $U(x_0 + s(x - x_0), y)$ буде поліномом за змінною y степеня не вищого від n. Тоді, за теоремою 1, $V(s,t)$ для цього фіксованого s буде поліномом за змінною t степеня не більшого від n. Тому в Z можна вибрати такі елементи $z_k(s)\,,\ k = 0, \ldots, n$, що

$$V(s,t) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} t^k z_k(s)\,, \quad s \in S\,, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Далі, поклавши послідовно $t = i\,,\ i = 1, \ldots, n+1$, отримаємо в (1) невироджену систему $n+1$ рівнянь, розв'язавши яку дістанемо

$$z_k(s) = \sum\nolimits_{i=1}^{n+1} a_{ki} V(s,i)\,, \quad a_{ki} \in \mathbb{R}\,, \quad k = 0, \ldots, n$$

(див. також доведення леми 1 з [2]).

Оскільки для кожного i функція $V(s,i)$ є поліномом змінної $s \in \mathbb{R}$, то кожна функція $z_k(s)$, початково визначена для $s \in S$, природно розширюється до полінома на $\mathbb{R}$. Коли зафіксувати t, то як з лівого, так і з правого боку (1) дістанемо поліноми змінної s, які для $s \in S$ рівні; отже вони ідентичні. Таким чином, рівність (1) виконана для всіх $s, t \in \mathbb{R}$. Зокрема, $U(x, y + th) = V(1,t)$ також буде поліномом за змінною t степеня не більшого від n. Внаслідок теореми 1, $U(x,y)$ буде поліномом за змінною y степеня не вище n.

Так само можна показати, що $U_y(x)$ буде поліномом за змінною x скінченного степеня, рівномірно обмеженого за $y \in Y$. Тепер для закінчення доведення досить застосувати теорему 2. □

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Mazur, W. Orlicz, *Grandlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen*, Studia Math. **5** (1935), 50–68; 179–189.
2. J. Bochniak, J. Siciak, *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces*, Studia Math. **39** (1971), 59–76.
3. В. Косован, В. Маслюченко, *Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій на добутках комплексних банахових просторів*, Математичний вісник НТШ **5** (2008), 89–96.

Надійшло 31.08.2014