Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2014. — Т.11

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2014. — V.11

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ГРУПІ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ

Степан Івасишен[1,3], Галина Пасічник[2,3]

[1]*Національний технічний університет України "КПІ", проспект Перемоги, 37, Київ, 03056*

[2]*Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58000*

[3]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б, Львів, 79060*

С. Івасишен, Г. Пасічник. *Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2014. — Т.11. — С. 73–87.

Доведено теореми про розв'язність у спеціальних вагових L_p-просторах задачі Коші для виродженого параболічного рівняння другого порядку з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших членів.

S. Ivasyshen, H. Pasichnyk, *The Cauchy problem for parabolic equation with growing lowest coefficients*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **11** (2014), 73–87.

We establish the solvability of the Cauchy problem in special weight L_p-spaces for degenerate parabolic equations of second order whose leading coefficients are constants and lowest ones are growing functions.

Вступ

У попередній статті авторів [1] розглянуто ультрапараболічне рівняння типу класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K20, 37K70 *УДК:* 517.956.4

Ключові слова і фрази: Вироджене параболічне рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, задача Коші, інтеграл Пуассона, ваговий простір функцій та узагальнених мір, коректна розв'язність

E-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, pasichnyk@mail.ru

Для такого рівняння знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) та вивчено його властивості. Використовуючи ці властивості, в даній статті досліджуються властивості породжених ФРЗК інтегралів Пуассона та на їх основі доводяться теореми про розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані належать до спеціальних вагових просторів $L_p^{\vec{a}}$ функцій чи просторів $M^{\vec{a}}$ узагальнених мір. Цим самим у цій статті для розглянутого в [1] рівняння реалізується частина описаного у [2, 3] підходу С.Д. Ейдельмана та першого співавтора, який дає можливість отримувати точні результати про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші. Інша частина реалізації цього підходу, яка стосується інтегрального зображення розв'язків, буде опублікована в наступній статті.

1. Основні позначення та означення

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1 + n_2 + n_3$ – їх сума; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $x_1 := (x_1', x_1'', x_1''')$, $\hat{x}_1 := (x_1', x_1'')$, де $x_1' := (x_{11}, \dots, x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, \dots, x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, \dots, x_{1n_1})$; $x_2 := (x_2', x_2'')$, де $x_2' := (x_{21}, \dots, x_{2n_3})$, $x_2'' := (x_{2(n_3+1)}, \dots, x_{2n_2})$.

Розглядатимемо в шарі $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ рівняння

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} - b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}\Big)u(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j,s\} \subset \{1,...,n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, \sigma_1 := (\sigma_{11}, ..., \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta|\sigma_1|^2.$$

У праці [1] знайдено явну формулу для ФРЗК G для рівняння (1), з допомогою якої для довільних мультиіндексів $\{k_l, m_l\} \subset \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$, отримано оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3} G(t,x;\tau,\xi)| \leq C\prod_{l=1}^{3}(p_l(t-\tau))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2} E_c(t-\tau, x, \xi),$$
$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

де C і c – додатні сталі, причому C залежить від k_l і m_l, $l \in \{1,2,3\}$. Тут і далі

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\Big\{ -c\,\Big(\frac{|e^{bt}X_1(t) - \xi_1|^2}{p_1(t)} + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(t) - \xi_l|^2}{p_l(t)} \Big)\Big\}, \tag{3}$$

$$X_1(t) := x_1, \quad X_2(t) := x_2 + \alpha_b(t)\hat{x}_1, \quad X_3(t) := x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t) - t}{b} x_1', \tag{4}$$

де для $t > 0$

$$\alpha_b(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt} - 1}{b}, & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_1(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{2bt} - 1}{2b} & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases},$$

$$p_2(t) := \begin{cases} 12\left(\dfrac{t}{b^2} - \dfrac{2(e^{bt} - 1)}{b^3(e^{bt} + 1)}\right), & b \neq 0, \\ t^3, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_3(t) := \begin{cases} 720\left(\dfrac{t}{b^4} + \dfrac{t^3}{12b^2} - \dfrac{t^2}{b^3}\dfrac{e^{bt} + 1}{2(e^{bt} - 1)}\right), & b \neq 0, \\ t^5, & b = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що функції p_l, $l \in \{1, 2, 3\}$, є монотонно зростаючими і $p_l(0) = 0$, бо $\lim\limits_{t \to 0+} p_l(t) = 0$.

Означимо сімейства банахових просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $t \in [0, T]$, $p \in [1, \infty]$, функцій, швидко зростаючих з ростом просторових змінних. Еволюція розв'язків рівняння (1) буде характеризуватися їх належністю до цих просторів. Наведемо означення як вказаних, так і деяких інших просторів, які далі використовуватимуться. Для цього введемо такі набори функцій, визначених для $t \in [0, T]$:

$$\vec{k}(t, \vec{a}) := (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2), k_3(t, a_3)),$$

$$k_1(t, a_1) := \frac{c_0 a_1 e^{2bt}}{c_0 - a_l p_l(t)}, \qquad k_l(t, a_l) := \frac{c_0 a_l}{c_0 - a_l p_l(t)}, \quad l \in \{2, 3\};$$

$$\vec{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)), \quad \vec{s_l}(t) := (s_{l1}(t), \ldots, s_{ln_l}(t)), \quad l \in \{1, 2, 3\},$$

$$s_{1j}(t) := k_1(t, a_1) + 2\theta(n_2 - j)\alpha_b(t)^2 k_2(t, a_2) + 4\left(\frac{\alpha_b(t) - t}{b}\right)^2 \theta(n_3 - j)k_3(t, a_3), \ 1 \leq j \leq n_1,$$

$$s_{2j}(t) := 2k_2(t, a_2) + 4t^2\theta(n_3 - j)k_3(t, a_3), \quad j \in \{1, \ldots, n_2\},$$

$$s_{3j}(t) := 4k_3(t, a_3), \quad j \in \{1, \ldots, n_3\},$$

де $c_0 \in (0, c)$, c – стала з оцінок (2), $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $p_l(T) < \dfrac{c_0}{a_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$.

Зазначимо, що $\vec{k}(0, \vec{a}) = \vec{a}$ і $k_l(t, a_l) > a_l$, $t \in (0, T]$, $l \in \{1, 2, 3\}$, а також справджуються нерівності

$$
\begin{aligned}
&-c_0\frac{|e^{bt}X_1(t)-\xi_1|^2}{p_1(t)}+a_1|\xi_1|^2\le k_1(t,a_1)\,|X_1(t)|^2,\\
&-c_0\frac{|X_l(t)-\xi_l|^2}{p_l(t)}+a_l|\xi_l|^2\le k_l(t,a_l)\,|X_l(t)|^2,\quad l\in\{2,3\},\\
&\qquad\qquad t\in(0,T],\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.
\end{aligned}\tag{5}
$$

Першу з цих нерівностей доведено в [4], а подібні до інших двох нерівностей – у [2].

Відзначимо також правильність співвідношень

$$
\begin{gathered}
k_1(t-\tau,k_1(\tau,a_1))=k_1(\tau,a_1),\quad k_l(t-\tau,k_l(\tau,a_l))\le k_l(\tau,a_l),\\
0\le\tau\le t\le T,\quad l\in\{2,3\}.
\end{gathered}\tag{6}
$$

Введемо вагові функції

$$
\begin{aligned}
&\Phi_\nu(t,x):=\exp\Big\{\ \nu\sum_{l=1}^{3}k_l(t,a_l)|X_l(t)|^2\ \Big\},\\
&\Psi_\nu(t,x):=\exp\Big\{\ \nu\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}s_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2\ \Big\},\ \ (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\quad \nu\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Поведінка при $|x|\to\infty$ функцій з означених нижче просторів описуватиметься функцією Φ_ν з $\nu\in\{-1,1\}$.

Зауважимо, що на підставі (3), (5), (6) та означення функції Φ_1 справджується нерівність

$$
E_{c_0}(t-\tau,x,\xi)\,\Phi_1(\tau,\xi)\le\Phi_1(t,x),\quad 0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.\tag{7}
$$

Нехай $p\in[1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, — задана комплекснозначна функція, вимірна за x при довільному $t\in[0,T]$. Для кожного $t\in[0,T]$ означимо норми

$$
\begin{aligned}
&\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}:=\|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},\\
&\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}:=\|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Оскільки на підставі означення (4) точок X_l та означення функцій s_{lj}, $j\in\{1,\cdots,n_l\}$, $l\in\{1,2,3\}$, справджується нерівність

$$
\sum_{l=1}^{3}k_l(t,a_l)\,|X_l(t)|^2\le\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}s_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2,
$$

то $\Psi_{-1}(t,x)\le\Phi_{-1}(t,x)$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, й, отже,

$$
\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}\le\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})},\quad t\in[0,T],\ \ p\in[1,\infty].\tag{8}
$$

Зазначимо, що $s_{1j}(t) \geq a_1$, $s_{lj}(t) > a_l$, $l \in \{2,3\}$, $t \in [0,T]$, тому для $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\vec{s}(t)} \leq \|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in [0,T], \quad p \in [1,\infty]. \tag{9}$$

Через $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ позначимо простір вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, зі скінченною нормою $\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, а через $L_p^{\vec{a}}$ – простір $L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$.

Нехай $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борівських множин простору $\mathbb{R}^n$, а M – сукупність усіх зліченно адитивних функцій $\nu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ (узагальнених борелівських мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через $M^{\vec{a}}$ позначимо сукупність усіх узагальнених мір $\mu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int\limits_A \Phi_{-1}(0,x)\; d\mu(x), \quad A \in \mathfrak{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu \in M^{\vec{a}}$

$$\|\mu\|^{\vec{a}} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0,x)\; d|\mu|(x) < \infty.$$

Використовуватимемо ще простір $L_1^{-\vec{s}(T)}$ вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\psi\|_1^{-\vec{s}(T)} := \|\psi(\cdot)\Psi_1(T,\cdot)\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ і простір $C_0^{-\vec{s}(T)}$ неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що $|\psi(x)|\Psi_1(T,x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для $\psi \in C_0^{-\vec{s}(T)}$ покладемо $\|\psi\|_\infty^{-\vec{s}(T)} := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (|\psi(x)|\, \Psi_1(T,x))$.

ФРЗК для рівняння (1) G породжує інтеграл Пуассона функції φ

$$u_1(t,x) := (P\varphi)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{10}$$

та інтеграл Пуассона узагальненої міри μ

$$u_2(t,x) := (P\mu)(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{11}$$

У статті часто однаковими літерами (здебільшого літерою C) позначаються різні сталі, величини яких нас не цікавлять.

2. Властивості інтеграла Пуассона функцій з $L_p^{\vec{a}}$

Вивчимо властивості інтеграла (10) для функцій з просторів $L_p^{\vec{a}}$, $1 \leq p \leq \infty$. При цьому користуватимемось такою властивістю функції E_c, означеної формулою (3): для будь-якого $\gamma > 0$ існує стала $C > 0$ така, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} E_\gamma(t,x,\xi)\, d\xi \leq C, \quad t \in (0,T],\;\; x \in \mathbb{R}^n; \tag{12}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} E_\gamma(t,x,\xi)\,dx \le C, \quad t \in (0,T],\ \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Інтеграли з (12) і (13) обчислюються. У першому інтегралі треба здійснити заміну змінних інтегрування за формулами $\xi_1 = e^{bt}X_1(t) + (p_1(t))^{1/2}\eta_1$, $\xi_l = X_l(t) + (p_l(t))^{1/2}\eta_l$, $l \in \{2,3\}$. Інтеграл із (13) треба записати у вигляді повторного інтеграла та в інтегралах по $\mathbb{R}^{n_3}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ і $\mathbb{R}^{n_1}$ перейти від змінних інтегрування x_3, x_2 і x_1 до змінних y_3, y_2 і y_1 відповідно за допомогою формул $x_3 = -tx_2' - \dfrac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1' + \xi_3 + (p_3(t))^{1/2}y_3$, $x_2 = -\alpha_b(t)\hat{x_1} + \xi_2 + (p_2(t))^{1/2}y_2$ і $x_1 = e^{-bt}(\xi_1 + (p_1(t))^{1/2}y_1)$.

Лема 2.1. *Якщо* $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1,\infty]$, *то для функції* (10) *справджується оцінка*

$$\|u_1(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in (0,T]. \tag{14}$$

Доведення. Нехай спочатку $p = \infty$. На підставі оцінок (2) для G, нерівностей (7) з $\tau = 0$ і (12) для $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$ маємо

$$|u_1(t,x)| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} E_{c-c_0}(t,x,\xi)\, E_{c_0}(t,x,\xi)\, \Phi_1(0,\xi)\, |\varphi(\xi)| \Phi_{-1}(0,\xi)\, d\xi \le$$

$$\le C\|\varphi\|_\infty^{\vec{a}} \Phi_1(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} E_{c-c_0}(t,x,\xi)\, d\xi \le C\|\varphi\|_\infty^{\vec{a}} \Phi_1(t,x),$$

звідки випливає оцінка (14) для $p = \infty$.

Розглянемо випадок, коли $p \in (1,\infty)$. За допомогою оцінок (2) і (7) з $\tau = 0$, нерівностей Гельдера і (12) маємо

$$|u_1(t,x)| \le C \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(|\varphi(\xi)| \Phi_{-1}(0,\xi) E_{(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\big) \times$$
$$\times \big(E_{c-(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\Phi_1(0,\xi)\big) d\xi \le$$
$$\le C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \Phi_{-p}(0,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} E_{p(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\, d\xi\Big]^{\frac{1}{p}} \times$$
$$\times \Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'(c-c_0)/2}(t,x,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} \big(E_{p'c_0}(t,x,\xi)\Phi_{p'}(0,\xi)\big)\, d\xi\Big]^{\frac{1}{p'}} \le$$
$$\le C\Phi_1(t,x)\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \Phi_{-p}(0,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} E_{p(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\, d\xi\Big]^{\frac{1}{p}},$$

де число p' таке, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. На підставі нерівності (13) отримуємо

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\Phi_{-p}(0,\xi)E_{p(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}\,d\xi\,dx\Big]^{\frac{1}{p}}=$$

$$=C\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|^p\Phi_{-p}(0,\xi)\,\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{p(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}dx\Big]\,d\xi\Big]^{\frac{1}{p}}\le C\|\varphi\|_p^{\vec{a}},$$

для $t\in(0,T]$. Якщо $p=1$, то за допомогою оцінок (2) і (7) з $\tau=0$ маємо

$$|u(t,x)|\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi)E_{c-c_0}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}\big(E_{c_0}(t,x,\xi)\Phi_1(0,\xi)\big)\,d\xi\le$$

$$\le C\Phi_1(t,x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi)E_{c-c_0}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}d\xi,\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

звідси, враховуючи нерівність (13), отримуємо для $t\in(0,T]$

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi)\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}dx\Big]d\xi\le C\|\varphi\|_1^{\vec{a}}.$$

□

З'ясуємо, в якому сенсі функція $u_1:=P\varphi$ задовольняє початкову умову.

Лема 2.2. *Нехай $\varphi\in L_p^{\vec{a}}$, $p\in[1,\infty]$. Тоді для функції (10) при $1\le p<\infty$*

$$\lim_{t\to0+}\|u_1(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}=0, \tag{15}$$

а при $p=\infty$ $\quad u_1(t,\cdot)\xrightarrow[t\to0+]{сл}\varphi(\cdot)$, тобто

$$\forall\,\psi\in L_1^{-\vec{s}(T)}:\ \lim_{t\to0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_1(t,x)dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx. \tag{16}$$

Доведення. Нехай $p\in[1,\infty)$. Треба довести, що для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta\in(0,T)$, що для будь-яких $t\in(0,\delta)$ справджується нерівність

$$\|(P\varphi)(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}<\varepsilon. \tag{17}$$

Нехай функція $\varphi^{(R)}$ така, що $\varphi^{(R)}=\varphi$ в B_R і $\varphi^{(R)}=0$ в $\mathbb{R}^n\setminus B_R$, де B_R – куля в просторі $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат. Тоді

$$\|(P\varphi)(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}\le$$
$$\|(P(\varphi-\varphi^{(R)}))(t,\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}+\|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}+\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{\vec{s}(t)}, \tag{18}$$

для $t \in (0,T]$. На підставі леми 2.1 виконується оцінка

$$\|(P(\varphi - \varphi^{(R)}))(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in (0,T]. \tag{19}$$

Використовуючи нерівності (8), (9), (18) і (19), отримуємо

$$\|(P\varphi)(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)} \le (C+1)\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\vec{a}} + \|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)}, \quad t \in (0,T].$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задане. Виберемо $R > 0$ так, щоб

$$\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_p^{\vec{a}} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |\varphi(x)|^p \Phi_{-p}(0,x)\, dx \Bigg)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2(C+1)}.$$

Оскільки

$$\|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\vec{s}(t)} \le \|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot) - \varphi^{(R)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =: I^{1/p},$$

то для доведення (17) досить показати, що

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, t \in (0,\delta): \ I^{1/p} < \varepsilon/2. \tag{20}$$

Зауважимо, що $I = I_1 + I_2$, де

$$I_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \Bigg| \int\limits_{B_R} G(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi \Bigg|^p dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{B_{2R}} \Bigg| \int\limits_{B_R} G(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi - \varphi^{(R)}(x) \Bigg|^p dx.$$

При $p = 1$ одержуємо

$$I_1 \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \Bigg(\int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)| E_c(t,x,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} d\xi \Bigg) dx =$$

$$= C \int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)| \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \Bigg(E_{c-c_0}(t,x,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} \Bigg) E_{c_0}(t,x,\xi) dx \Bigg) d\xi. \tag{21}$$

Зазначимо, що існує таке число $\delta_0 > 0$, що для довільних $t \in (0,\delta_0)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ і $\xi \in B_R$

$$E_{c_1}(t,x,\xi) \le \exp\left\{ -c_1 \frac{(R/2)^2}{q(t)} \right\}, \tag{22}$$

де $c_1 > 0$ і $q(t) := \max\limits_{l \in \{1,2,3\}} p_l(t)$. Справді, маємо

$$\frac{|e^{bt}x_1(t) - \xi_1|^2}{p_1(t)} + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(t) - \xi_l|^2}{p_l(t)} \ge \frac{1}{q(t)} |\tilde{X}(t) - \xi|^2 \ge \frac{1}{q(t)} \Big(|\tilde{X}(t)| - |\xi| \Big)^2, \tag{23}$$

де $\tilde{X}(t) := (e^{bt}x_1, X_2(t), X_3(t))$. Далі, використовуючи позначення

$$Y(t) := (Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)),$$

$$Y_1(t) := (1-e^{bt})x_1, \quad Y_2(t) := -\alpha_b(t)\hat{x}_1, \quad Y_3(t) := -tx_2' - \frac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1',$$

отримуємо

$$|\tilde{X}(t)| = |x - Y(t)| \geq \big||x| - |Y(t)|\big|, \tag{24}$$

$$|Y(t)| \leq \Big[(1-e^{bt})^2|x_1|^2+(\alpha_b(t))^2|\hat{x}_1|^2+t^2|x_2'|^2+\frac{(\alpha_b(t)-t)2}{b^2}|x_1'|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \leq \gamma(t)\,|x|, \tag{25}$$

де $\gamma(t) := \Big((1-e^{bt})^2+(\alpha_b(t))^2+t^2+(\frac{\alpha_b(t)-t}{b})^2\Big)^{\frac{1}{2}} \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0$. Виберемо число $\delta_0 > 0$ так, щоб для всіх $t \in (0,\delta_0)$ $\gamma(t) \leq 1/4$. Тоді з (24) і (25) для довільних $t \in (0,\delta_0)$ і $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ випливають нерівності $|\tilde{X}(t)| \geq (3/4)|x| \geq 3R/2$, звідки з урахуванням (23) випливає потрібна оцінка (22).

Використавши в нерівності (21) оцінку (22), за допомогою нерівності (13) одержуємо

$$I_1 \leq C\exp\Big\{-c_0\frac{(R/2)^2}{q(t)}\Big\}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi^{(R)}(\xi)|\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/2}dx\Big)d\xi \leq$$
$$\leq C\|\varphi^{(R)}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\exp\Big\{-c_0\frac{(R/2)^2}{q(t)}\Big\}, \quad t \in (0,\delta_0). \tag{26}$$

При $p > 1$ за допомогою (2), (12), (22) і нерівності Гельдера для $t \in (0,\delta_0)$ і $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ отримуємо нерівність:

$$\Big|\int\limits_{B_R}G(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)d\xi\Big| \leq C\int\limits_{B_R}E_c(t,x,\xi)\,|\varphi^{(R)}(\xi)|\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}d\xi \leq$$
$$\leq C\Big(\int\limits_{B_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|^p\,E_{p(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{B_R}E_{p'(c+c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}(p_l(t))^{-n_l/2}d\xi\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq$$
$$\leq \exp\Big\{-c_0\frac{(R/2)^2}{q(t)}\Big\}\Big(\int\limits_{B_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|^pE_{p(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\times\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{p'(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p'}} \leq$$
$$\leq C\exp\Big\{-c_0\frac{(R/2)^2}{q(t)}\Big\}\Big(\int\limits_{B_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|^pE_{p(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}d\xi\Big)^{\frac{1}{p}},$$

звідки, використовуючи (13), отримуємо

$$I_1 \leq C \exp\left\{-p\, c_0 \tfrac{(R/2)^2}{q(t)}\right\} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{p(c_0-c_0)/2}(t,x,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}} d\xi dx \leq$$

$$\leq C\, \|\varphi^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \exp\left\{-p\, c_0 \tfrac{(R/2)^2}{q(t)}\right\}, \quad t \in (0, \delta_0). \tag{27}$$

Тепер оцінимо інтеґрал I_2. Нехай $\varphi_h^{(R)}$ – середня функція для $\varphi^{(R)}$. Для неї на підставі властивостей середніх функцій маємо

$$||\varphi^{(R)} - \varphi_h^{(R)}||_{L_p(\mathbb{R}^n)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{28}$$

і при фіксованому $h > 0$ рівномірно стосовно $x \in B_{2R}$ отримуємо

$$\left| (P\varphi_h^{(R)})(t,x) - \varphi_h^{(R)}(x) \right| \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0. \tag{29}$$

Запишемо

$$I_2^{1/p} \leq \Big[\int\limits_{B_{2R}} \big|(P(\varphi^{(R)} - \varphi_h^{(R)}))(t,x)\big|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \Big[\int\limits_{B_{2R}} \big|(P\varphi_h^{(R)})(t,x) - \varphi_h^{(R)}(x)\big|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}} + \Big[\int\limits_{B_{2R}} \big|\varphi_h^{(R)}(x) - \varphi^{(R)}(x)\big|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}}.$$

Повторивши для першого доданка оцінки, аналогічні до проведених при доведенні леми 2.1 (тільки без вагової функції) і використавши співвідношення (28) і (29), одержимо існування такої сталої $\delta_2 > 0$, що для довільних $t \in (0, \delta_2)$ виконується нерівність

$$I_2 < \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big)^p. \tag{30}$$

З нерівностей (26) і (27) випливає існування такого $\delta_1 > 0$, що для довільних $t \in (0, \delta_1)$ справджується нерівність $I_1 < \frac{1}{2}\big(\frac{\varepsilon}{2}\big)^p$. Звідси і з (30) випливає виконання нерівності (20) для всіх $t \in (0, \delta)$, де δ – найменше з чисел δ_1 і δ_2.

Доведемо співвідношення (16). Спочатку зазначимо, що інтеграли з (16) мають сенс при довільних $\varphi \in L_\infty^{\vec{a}}$, $\psi \in L_1^{-\vec{s}(T)}$ і $t \in (0, T]$, оскільки на підставі нерівності (8) і леми 2.1 $\|u(t,\cdot)\|_\infty^{\vec{s}(t)} < \infty$ для довільних $t \in (0, T]$, якщо $\varphi \in L_\infty^{\vec{a}}$. Справді, через те, що $a_l \leq s_{lj}(t) \leq s_{lj}(T)$ для довільних $t \in (0, T]$, $j \in \{1, \ldots, n_l\}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, маємо

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_1(t,x) dx\Big| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(|\psi(x)|\Psi_1(T,x)\big)\big(|u_1(t,x)|\Psi_{-1}(T,x)\big) dx \leq$$

$$\leq \|\psi\|_1^{-\vec{s}(T)} \|u_1(t,\cdot)\|_\infty^{\vec{s}(t)} < \infty,$$

та

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\big(|\psi(x)|\Psi_1(T,x)\big)\big(|\varphi(x)|\Phi_{-1}(0,x)\big)dx \le$$
$$\le \|\psi\|_1^{-\vec{s}(T)}\|\varphi\|_\infty^{\vec{a}} < \infty.$$

На підставі (10) для доведення (16) достаньо встановити, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(v(t,\xi)-\psi(\xi))\varphi(\xi)d\xi \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0,$$

де $v(t,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\psi(x)dx$. Оскільки $\varphi \in L_\infty^{\vec{a}}$, то маємо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(v(t,\xi)-\psi(\xi))\,\varphi(\xi)d\xi\right| \le \|\varphi\|_\infty^{\vec{a}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\,v(t,\xi)-\psi(\xi)\,\Big|\,\Phi_1(0,\xi)\,d\xi$$

і для доведення (16) потрібно перевірити, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\,v(t,\xi)-\psi(\xi)\,\Big|\,\Phi_1(0,\xi)d\xi \underset{t\to 0+}{\to} 0. \tag{31}$$

Оскільки $a_l < k_l(T,a_l)$, $l \in \{1,2,3\}$, то існує таке $\gamma > 0$, що

$$s_{lj}(T) \ge k_l(T,a_l) \ge g_l(t) := \frac{c_0 k_l(T,a_l)}{c_0 - k_l(T,a_l)p_l(t)} \ge a_l,\ \ 1 \le l \le 3,\ 1 \le j \le n_l,\ t \in [0,\gamma].$$

Тому $\Omega_1(t,\xi) \ge \Phi_1(0,\xi)$, $t \in [0,\gamma]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, де $\Omega_\nu(t,\xi) := \exp\{\nu\sum_{l=1}^3 g_l(t)|\xi_l|^2\}$, $\nu \in \{-1,1\}$. Для доведеня (31) досить для довільного $\varepsilon > 0$ довести існування такого $\delta \in (0,\gamma)$, що для всіх $t \in (0,\delta)$ справджується нерівність

$$\|v(t,\cdot)-\psi(\cdot)\|_1^{-\vec{g}(t)} := \|(v(t,\cdot)-\psi(\cdot))\,\Omega_1(t,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \tag{32}$$

де $\vec{g}(t) := (g_1(t),g_2(t),g_3(t))$.

Доведення (32) здійснюється аналогічно до доведення (17). Як і там, розглянемо при $R > 0$ функцію $\psi^{(R)}$ таку, що $\psi^{(R)}(x) = \psi(x)$ при $x \in B_R$ і $\psi^{(R)}(x) = 0$ в інших випадках. Для $t \in (0,\gamma)$ запишемо

$$\|v(t,\cdot)-\psi(\cdot)\|_1^{-\vec{g}(t)} \le \Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;0,\cdot)(\psi-\psi^{(R)})(x)dx\Big\|_1^{-\vec{g}(t)} +$$
$$+\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;0,\cdot)\psi^{(R)}(x)dx - \psi^{(R)}(\cdot)\Big\|_1^{-\vec{g}(t)} + \big\|\psi-\psi^{(R)}\big\|_1^{-\vec{g}(t)} =: \sum_{j=1}^3 J_j. \tag{33}$$

Для одержання оцінки J_1 скористаємось оцінкою (2), нерівністю

$$\Phi_1(T,x) \le \Psi_1(T,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{34}$$

та оцінкою

$$E_{c_0}(t,x,\xi)\,\Phi_{-1}(T,x) \le \Omega_{-1}(t,\xi), \quad t\in(0,\gamma], \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{35}$$

яка доводиться так само, як (7). Маємо

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)(\psi-\psi^{(R)})(x)dx\right| \le \\ &\quad \le C\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_c(t,x,\xi)\,\Phi_{-1}(T,x)\big|(\psi-\psi^{(R)})(x)\big|\,\Phi_1(T,x)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}dx \le \\ &\quad \le C\,\Omega_{-1}(t,\xi)\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,x,\xi)\big(|(\psi-\psi^{(R)})(x)|\,\Psi_1(T,x)\big)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}dx. \end{aligned}\tag{36}$$

Звідси, використавши (13), отримуємо

$$J_1 \le C\,\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{s}(T)}, \quad t\in(0,\gamma). \tag{37}$$

Оскільки $g_l(t)\le s_{lj}(T)$ при $t\in(0,\gamma)$, $j\in\{1,\dots,n_l\}$, $l\in\{1,2,3\}$, то $J_3 \le \|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{s}(T)}$, $t\in(0,\gamma)$, тому $J_1+J_3\le(C+1)\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{s}(T)}$ при $t\in(0,\gamma)$. Через те, що $\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{s}(T)} = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}|\psi(x)|\,\Psi_1(T,x)\,dx \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то

$$J_1+J_3 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad t\in(0,\gamma). \tag{38}$$

Щоб оцінити доданок J_2 з (33), запишемо його у вигляді

$$\begin{aligned}J_2 = &\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\psi^{(R)}(x)\,dx\right|\Omega_1(t,\xi)\,d\xi + \\ &+\int\limits_{B_{2R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\psi^{(R)}(x)dx-\psi^{(R)}(\xi)\right|\,\Omega_1(t,\xi)\,d\xi =: J_2^{'}+J_2^{''}.\end{aligned}$$

Так само, як при доведенні (37), одержуємо

$$\Big\|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\psi^{(R)}(x)dx\,\Big\|_1^{\vec{g}(t)} \le C\|\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{s}(T)}, \quad t\in(0,\gamma),$$

звідки випливає, що

$$J_2^{'} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad t\in(0,\gamma). \tag{39}$$

Для доданку J_2'' маємо

$$J_2'' \le \int\limits_{B_{2R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\psi^{(R)}(x)\,dx-\psi^{(R)}(\xi)\right|\,d\xi.$$

Провівши для останнього інтеграла міркування, аналогічні до проведених для інтеграла I_2, одержуємо $J_2^{''} \underset{t\to0+}{\longrightarrow} 0$, $R>0$, звідки та зі співвідношень (33), (38) і (39) випливає (32). □

3. Властивості інтеграла Пуассона узагальнених мір з $M^{\vec{a}}$

Наведемо деякі властивості функцій, що визначаються формулою (11).

Лема 3.1. *Нехай* $\mu \in M^{\vec{a}}$. *Тоді функція* (11) *має такі властивості:*

1) існує така стала $C > 0$, *що для довільного* $t \in (0, T]$

$$\|u_2(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})} \leq C\|\mu\|^{\vec{a}}, \tag{40}$$

2) $u_2(t,\cdot) \underset{t\to 0+}{\overset{\text{сл}}{\longrightarrow}} \mu$, *тобто*

$$\forall\, \psi \in C_0^{-\vec{s}(T)}: \quad \lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, u_2(t,x)\; dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\; d\mu(x). \tag{41}$$

Доведення. 1) Використовуючи оцінку (2) та нерівність (7) з $\tau = 0$, одержуємо

$$|u_2(t,x)| \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,x,\xi) E_{c_0}(t,x,\xi)\, \Phi_1(0,\xi)\, \Phi_{-1}(0,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}\, d|\mu|(\xi) \leq$$

$$\leq C\Phi_1(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,x,\xi) \prod_{l=1}^{3} p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}\, \Phi_{-1}(0,\xi)\; d|\mu|(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

звідки за допомогою (13) випливає оцінка (40).

2) На підставі означення функцій s_{lj}, $j \in \{1,\ldots,n_l\}$, $l \in \{1,2,3\}$, та оцінки (40) інтеграли з (41) мають сенс для будь-яких $\psi \in C_0^{-\vec{s}(T)}$, $\mu \in M^{\vec{a}}$ і $t \in (0,T]$. Використавши формулу (11) та означення функції v з пункту 2, маємо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, u_2(t,x)\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, d\mu(x) \right| \leq \|v(t,\cdot) - \psi(\cdot)\|_\infty^{-\vec{a}}\, \|\mu\|^{\vec{a}}.$$

Тому так само, як при доведенні співвідношення (16), досить довести, що

$$\|v(t,\cdot) - \psi(\cdot)\|_\infty^{-\vec{g}(t)} \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0, \tag{42}$$

де функция $\vec{g}$ та ж, що й в лемі 2.2.

Нехай $R > 0$ і функція $\theta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ така, що $0 \leq \theta_R \leq 1$, причому $\theta_R(x) = 1$ при $x \in B_{R/2}$, $\theta_R(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R$. Покладемо $\psi^{(R)}(x) := \theta_R(x)\psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Для $t \in (0,\gamma)$ маємо

$$\|v(t,\cdot) - \psi(\cdot)\|_\infty^{-\vec{g}(t)} \leq \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\cdot)(\psi - \psi^{(R)})(x)\, dx\, \Big\|_\infty^{-\vec{g}(t)} +$$

$$+ \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\cdot)\, \psi^{(R)}(x)\, dx - \psi^{(R)}(\cdot)\, \Big\|_\infty^{-\vec{g}(t)} + \big\|\psi^{(R)} - \psi\big\|_\infty^{-\vec{g}(t)} =: \sum_{j=1}^{3} K_j. \tag{43}$$

Як і при доведенні нерівності (36), з допомогою нерівності (13) отримуємо

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)(\psi-\psi^{(R)})(x)\,dx \Big| \le C\,\Omega_{-1}(t,\xi)\ \|\varphi-\varphi^{(R)}\|_{\infty}^{-\vec{s}(T)},$$

звідки випливає нерівність $K_1 \le C\|\psi-\psi^{(R)}\|_{\infty}^{-\vec{s}(T)}$, $\quad t\in(0,\gamma)$. На підставі нерівностей $g_l(t) \le s_{lj}(T)$, $t\in[0,\gamma)$, $j\in\{1,\dots,n_l\}$, $l\in\{1,2,3\}$, маємо $K_3 \le \|\psi-\psi^{(R)}\|_{\infty}^{-\vec{s}(T)}$, $\quad t\in[0,\gamma)$, тому $K_1+K_3 \le (C+1)\|\psi-\psi^{(R)}\|_{\infty}^{-\vec{s}(T)}$ при $t\in[0,\gamma)$. Оскільки $\|\psi-\psi^{(R)}\|_{\infty}^{-\vec{s}(T)} \le \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}} \Big(|\psi(x)|\,\Psi_1(T,x) \Big) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то

$$K_1+K_3 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad t\in(0,\gamma). \tag{44}$$

Далі маємо

$$K_2 \le K_2^{'}+K_2^{''} := \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} \left(\Big|\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\psi^{(R)}(x)\,dx\Big|\,\Omega_1(t,\xi)\right)+$$

$$+\exp\big\{\max_{j,l} g_{lj}(T)(2R)^2\big\}\ \sup_{\xi\in B_{2R}}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\,\psi^{(R)}(x)\,dx-\psi^{(R)}(\xi)\Big| \tag{45}$$

Для оцінки $K_2^{'}$ використовуємо нерівність (22) для довільних $t\in(0,\delta_0)$, $x\in B_R$ і $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}$. Ця нерівність для таких точок доводиться аналогічно до доведеного в лемі 2.2 випадку. Замість нерівностей (23) і (24) використовуються відповідно нерівності

$$\frac{|e^{bt}x_1-\xi_1|^2}{p_1(t)}+\sum_{l=2}^{3}\frac{|X_l(t)-\xi_l|^2}{p_l(t)} \ge \frac{(|\xi|-|\tilde X(t)|)^2}{q(t)} \quad \text{і} \quad |\tilde X(t)| \le |x|+|Y(t)|,$$

далі за допомогою (25), вибираючи δ_0 так, щоб для будь-яких $t\in(0,\delta_0)$ $\gamma(t)\le 1/2$, отримуємо $|\tilde X(t)| \le (3/2)|x| \le 3R/2$, а потім

$$\frac{(|\xi|-|\tilde X(t)|)^2}{q(t)} \ge \frac{(2R-3R/2)^2}{q(t)} = \frac{(R/2)^2}{q(t)}.$$

Використовуючи оцінку (2) , нерівності (22), (34), (35) і (13), маємо

$$K_2^{'} \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}}\Bigg(C\,\Omega_1(t,\xi)\int_{B_R} E_{c-c_0}(t,x,\xi)\,\Big(\,E_{c_0}(t,x,\xi)\,\Phi_{-1}(T,x)\,\Big)\,\times$$

$$\times\Big(\,|\psi^{(R)}(x)|\,\Psi_1(T,x)\,\Big)\prod_{l=1}^{3}p_l(t-\tau)^{-\frac{n_l}{2}}\,dx\Bigg) \le$$

$$\le C\exp\Big\{-\frac{c-c_0}{2}\frac{(R/2)^2}{q(t)}\Big\}\,||\psi^{(R)}||_{\infty}^{-\vec{s}(T)}\int_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)/2}(t,x,\xi)\prod_{l=1}^{3}p_l(t)^{-\frac{n_l}{2}}\,dx \le$$

$$\le C\exp\Big\{-\frac{(c-c_0)R^2}{8q(t)}\Big\}\,||\psi||_{\infty}^{-\vec{s}(T)} \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0, \quad R>0. \tag{46}$$

Оскільки $\varphi^{(R)}$ – неперервна й обмежена функція, то на підставі властивостей ФРЗК для рівняння, спряженого до (1), маємо

$$K_2'' \underset{t\to 0+}{\longrightarrow} 0, \quad R > 0. \tag{47}$$

Із співвідношень (43)–(47) випливає потрібне співвідношення (42). □

4. Коректна розв'язність задачі Коші

Наведемо теорему про розв'язність задачі Коші для рівняння (1), яка випливає із результатів попередніх пунктів.

Теорема. *Для довільної функції $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1,\infty]$, та узагальненої міри $\mu \in M^{\vec{a}}$ формули (10) та (11) визначають єдині розв'язки рівняння (1) в шарі $\Pi_{(0,T]}$, які мають такі властивості: існує не залежна від φ і μ стала $C > 0$ така, що для довільних $t \in (0,T]$ справджуються відповідно нерівності (14) і (40); при $p \in [1,\infty)$ виконується співвідношення (15), а при $p = \infty$ і для функції (11) $u_1(t,\cdot) \underset{t\to 0+}{\overset{сл}{\longrightarrow}} \varphi$, $u_2(t,\cdot) \underset{t\to 0+}{\overset{сл}{\longrightarrow}} \mu$, тобто для довільних ψ з просторів $L_1^{-\vec{s}(T)}$ і $C_0^{-\vec{s}(T)}$ справджуються співвідношення (16) і (41), відповідно.*

Доведення. З лем 2.1, 2.2 та 3.1 випливає, що для функцій (10) та (11) справджуються оцінки (14) і (40) та співвідношення (15), (16) і (41). Оскільки ФРЗК G є розв'язком рівняння (1), то на основі оцінок (2) звідси випливає, що розв'язками цього рівняння є функції (10) та (11). Отже, формули (10) та (11) визначають розв'язки рівняння (1) в шарі $\Pi_{(0,T]}$, які мають вказані в теоремі властивості. Єдиність цих розв'язків випливає з теореми про зображенння у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків задачі Коші, яка буде доведена в наступній статті. □

Зауваження. З теореми випливає, що розв'язки (10) та (11) при кожному фіксованому $t \in (0,T]$ належать відповідно до просторів $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ і $L_1^{\vec{k}(t,\vec{a})}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник, *Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів*, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **11**:2 (2014), 126–153.
2. S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, Operator Theory: Advances and Applications, **152**, Birkhäuser Verlag, Basel, (2004), 390 p.
3. С.Д. Івасишен, *Розв'язки параболічних рівнянь із сімейства банахових просторів, залежних від часу*, Мат. студії, **40**:2 (2013), 172–181.
4. Т.О. Заболотько, С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник, *Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосування*, Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича, сер.: математика, **2**: 2–3 (2012), 81–89.

Надійшло 31.08.2014