БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ ВІДОБРАЖЕНЬ, НЕПЕРЕРВНИХ ВІДНОСНО ПЕРШОЇ ЗМІННОЇ І ФУНКЦІОНАЛЬНОГО КЛАСУ α ЛЕБЕҐА ВІДНОСНО ДРУГОЇ

©2005 р. Олена КАРЛОВА

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58012

Редакція отримала статтю 23 лютого 2005 р.

Встановлено, що кожне відображення $f : X \times T \to Y$, неперервне відносно першої змінної і функціонального класу α Лебеґа відносно другої, належить до α+1-го класу Бера у випадку, коли X – метризовний (чи навіть PP-) простір, T – топологічний простір, а Y – досконалий ліндслефовий простір, який слабко накривається деяким сепарабельним метризовним топологічним векторним простором.

Систему всіх функціонально відкритих множин топологічного простору X будемо позначати $\mathcal{G}_0^*$, систему всіх функціонально замкнених підмножин будемо позначати $\mathcal{F}_0^*$, а елементи цих систем називатимемо множинами *нульового функціонально адитивного класу* та *нульового функціонально мультиплікативного класу* відповідно. Далі, якщо вже визначені класи $\mathcal{G}_\xi^*$ і $\mathcal{F}_\xi^*$ для всіх порядкових чисел $\xi < \alpha$ для деякого $0 < \alpha < \omega_1$, то для непарних ординалів α клас $\mathcal{G}_\alpha^*$ ($\mathcal{F}_\alpha^*$) складається з усіх зліченних перетинів (об'єднань) множин з нижчих класів, а для парного α — з усіх зліченних об'єднань (перетинів) множин з нижчих класів. Класи $\mathcal{F}_\alpha^*$ для непарних α і $\mathcal{G}_\alpha^*$ для парних α назвемо *функціонально адитивними*, а класи $\mathcal{F}_\alpha^*$ для парних α і $\mathcal{G}_\alpha^*$ для непарних α назвемо *функціонально мультиплікативними*. Множини, які одночасно є функціонально адитивного і функціонально мультиплікативного класу α, будемо називати *функціонально двосторонніми класу* α.

УДК 517.51; MSC 2000: 26B05

Для топологічних просторів X, Y, Z і зліченного порядкового числа α позначимо через $H^*_\alpha(X,Y)$ клас усіх відображень $f : X \to Y$ *функціонального α-го класу Лебеґа*, тобто таких, для яких прообраз $f^{-1}(F)$ є множиною функціонально мультиплікативного класу α для довільної замкненої множини F в Y, через $CH^*_\alpha(X \times Y, Z)$ — сукупність усіх відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно першої змінної і функціонального класу α Лебеґа відносно другої. Будемо позначати через $C\overline{H}^*_\alpha(X \times Y, Z)$ сукупність усіх відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно першої змінної і $\overline{X_{H_\alpha}(f)} = X$, де $X_{H_\alpha}(f) = \{x \in X : f^x \in H_\alpha(Y,Z)\}$. Сукупність всіх неперервних відображень $f : X \to Y$ будемо позначати символом $B_o(X,Y)$. Нехай класи $B_\xi(X,Y)$ вже визначені для всіх $\xi < \alpha$. Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$ належить до *α-го класу Бера*, якщо існують така послідовність порядкових чисел $\xi_n < \alpha$ і послідовність відображень $f_n \in B_{\xi_n}(X,Y)$, яка поточково на X збігається до відображення f.

Згідно з класичною теоремою Лебеґа–Гаусдорфа [2], якщо X — метричний простір, а $Y = [0,1]^n$, де $n \leq \aleph_o$, то $H_\alpha(X,Y) \subseteq B_\alpha(X,Y)$ для скінченного ординалу α і $H_\alpha(X,Y) \subseteq B_{\alpha+1}(X,Y)$ для нескінченного α. У [1] з'ясовано, що справджується включення $H^*_1(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$, якщо X — топологічний простір, а Y — метризовний сепарабельний топологічний векторний простір.

Лебеґівську класифікацію нарізно неперервних відображень та їх аналогів досліджували К. Куратовський і Д. Монтґомері. Відому теорему Куратовського–Монтґомері [2] узагальнив В. Маслюченко [3], показавши, що $C\overline{H}_\alpha(X \times Y, Z) \subseteq H_{\alpha+1}(X \times Y, Z)$, якщо X — метризовний простір, Y — досконалий простір і Z — досконало нормальний простір. У роботі [1], автор, розвиваючи метод В. Маслюченка, зокрема, встановив включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq H^*_1(X \times Y, Z)$, якщо X — метризовний, Y — топологічний і Z — досконало нормальний простори.

Крім того, у [1] введено поняття слабкого локального гомеоморфізму (див. означення в п.3) і клас $\mathcal{K}$ просторів Y, для яких існують метризовний сепарабельний топологічний векторний простір Z і слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi : Z \to Y$, і з'ясовано, що для топологічного простору X, ліндeлефового простору Y, топологічного простору Z, слабкого локального гомеоморфізму $\varphi : Z \to Y$ і $f \in H^*_1(X,Y)$ існує $g \in H^*_1(X,Z)$ таке, що $f = \varphi \circ g$. На основі цих результатів встановлено, що включення $H^*_1(X,Y) \subseteq B_1(X,Y)$ виконується, якщо X — топологічний простір, Y — ліндeлефовий простір з класу $\mathcal{K}$, а включення $CC(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z)$ виконується, якщо X — метризовний простір, Y — топологічний простір і Z — досконалий ліндeлефовий простір з класу $\mathcal{K}$.

У даній роботі ми узагальнюємо теореми з [1] на випадок довільного зліченного ординалу α.

1. У цьому пункті роботи встановимо, що кожне відображення

$$f : X \times T \to Z,$$

неперервне відносно першої змінної і функціонального класу α Лебеґа відносно другої належить до $\alpha+1$-го функціонального класу Лебеґа, коли X — метризовний простір, T — топологічний простір і Z — досконало нормальний простір.

Лема 1.1. *Нехай α — зліченний граничний ординал, $\alpha_n \nearrow \alpha$, і A — множина функціонально адитивного (мультиплікативного) класу α в топологічному просторі X. Тоді існує зростаюча (спадна) послідовність множин A_n функціонально мультиплікативного (адитивного) класу α_n така, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ($A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$).*

Доведення. Нехай A — множина функціонально адитивного класу α. Тоді існує послідовність таких множин $B_n \in \mathcal{F}^*_{\beta_n}$, що $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Оскільки $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, то існує зростаюча послідовність номерів n_k така, що $\alpha_{n_k} \geq \beta_k$. Покладемо $A_n = \emptyset$ при $n < n_1$ і $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки $\beta_k \leq \alpha_{n_k}$, то $B_i \in \mathcal{F}^*_{\alpha_{n_k}}$, $i = \overline{1,k}$, отже, $A_n \in \mathcal{F}^*_{\alpha_n}$ для кожного n.

Якщо A — множина функціонально мультиплікативного класу α, то $X \setminus A$ — множина функціонально адитивного класу α і за доведеним вище, існує зростаюча послідовність множин B_n функціонально мультиплікативного класу α_n така, що $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Покладемо $A_n = X \setminus B_n$. Тоді $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — спадна послідовність множин функціонально адитивного класу α_n і $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Лема 1.2. *Нехай α — зліченний ординал, A і B — множини функціонально адитивного (мультиплікативного) класу α в топологічних просторах X і Y відповідно. Тоді $A \times B$ — множина функціонально адитивного (мультиплікативного) класу α в $X \times Y$.*

Доведення. Нехай $\alpha = 0$. Множини A та B функціонально відкриті, тому існують неперервні функції $f : X \to [0,1]$ і $g : Y \to [0,1]$ такі, що

$A = f^{-1}((0,1])$ і $B = g^{-1}((0,1])$. Покладемо $h(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ для всіх $(x,y) \in X \times Y$. Зрозуміло, що $A \times B = h^{-1}((0,1])$, отже, множина $A \times B$ є функціонально відкритою в $X \times Y$, адже функція $h : X \times Y \to [0,1]$ неперервна. Якщо множини A і B функціонально замкнені, то існують неперервні функції $f : X \to [0,1]$ і $g : Y \to [0,1]$ такі, що $A = f^{-1}(0)$ і $B = g^{-1}(0)$. Покладемо $h(x,y) = (f(x) + g(y))/2$ для всіх $(x,y) \in X \times Y$. Легко бачити, що $A \times B = h^{-1}(0)$, отже, множина $A \times B$ є функціонально замкненою в $X \times Y$.

Нехай твердження виконується для всіх $\xi < \alpha$ і множини $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ функціонально адитивного класу α. Якщо $\alpha = \beta + 1$, то існують зростаючі послідовності множин A_n і B_n функціонально мультиплікативного класу β в X та Y відповідно. Оскільки

$$A \times B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \times \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)$$

і за індуктивним припущенням множини $A_n \times B_n$ функціонально мультиплікативного класу β, то $A \times B$ є множиною функціонально адитивного класу α. Якщо $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$, то, згідно з лемою 1.1, існують зростаючі послідовності множин A_n і B_n функціонально мультиплікативного класу α_n в X та Y відповідно. Тоді, за індуктивним припущенням, $A_n \times B_n$ — множини функціонально мультиплікативного класу α_n в $X \times Y$, отже, $A \times B$ — множина функціонально адитивного класу α в $X \times Y$. Якщо ж $A \subseteq X$ та $B \subseteq Y$ — множини функціонально мультиплікативного класу α, то за доведеним вище, множини $(X \setminus A) \times Y$ і $X \times (Y \setminus B)$ належать до функціонально адитивного класу α, тоді $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ — множина функціонально адитивного класу α в $X \times Y$, а тоді множина $A \times B$ належить до функціонально мультиплікативного класу α.

Лема 1.3. *Нехай X — топологічний простір, $(U_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я функціонально відкритих множин в X, $(F_i : i \in I)$ — сім'я функціонально замкнених множин в X така, що $F_i \subseteq U_i$ для всіх $i \in I$. Тоді множина $F = \bigcup\limits_{i\in I} F_i$ — функціонально замкнена в X.*

Доведення. З того, що для кожного $i \in I$ множини F_i та $X \setminus U_i$ диз'юнктні і функціонально замкнені, випливає, що існують неперервні функції $f_i : X \to [0,1]$ такі, що $F_i = f_i^{-1}(0)$ і $X \setminus U_i = f_i^{-1}(1)$. Для кожного $x \in X$ покладемо $f(x) = \min\limits_{i\in I} f_i(x)$. Покажемо, що функція $f : X \to [0,1]$ неперервна. Справді, нехай $x_0 \in X$. Оскільки $(U_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я, то існує окіл U точки x_0 в X такий, що множина $I_0 = \{i \in I : U \cap U_i \neq \emptyset\}$ скінченна. Тоді, якщо $I_0 \neq \emptyset$, звуження $f|_U(x) = \min\limits_{i \in I_0} f_i(x)$ неперервне, як мінімум скінченної кількості неперервних функцій, і $f|_U(x) = 1$, якщо множина I_0 порожня. Зрозуміло, що $F = f^{-1}(0)$, отже, множина F — функціонально замкнена в X.

Твердження 1.4. *Нехай α — зліченний ординал, X — топологічний простір, $(U_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я функціонально відкритих множин в X, $(B_i : i \in I)$ — сім'я множин функціонально адитивного (мультиплікативного) класу α в X така, що $B_i \subseteq U_i$ для кожного $i \in I$. Тоді множина $B = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$ є функціонально адитивного (мультиплікативного) класу α в X.*

Доведення. При $\alpha = 0$ твердження випливає з леми 1.3 і з того, що об'єднання локально скінченної сім'ї функціонально відкритих множин є функціонально відкритим.

Припустимо, що твердження виконується для всіх ординалів $\xi < \alpha$, і доведемо, що воно виконується для α. Якщо α — граничне порядкове число, то виберемо деяку зростаючу послідовність ординалів α_n, яка прямує до α. Якщо $\alpha = \beta + 1$, то покладемо $\alpha_n = \beta$.

Нехай $B_i \in \mathcal{G}^*_\alpha$ для кожного $i \in I$. Тоді з леми 1.1 випливає, що існує послідовність множин $B_{i,n} \in \mathcal{F}^*_{\alpha_n}$ така, що $B_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{i,n}$. Оскільки $B_i \subseteq U_i$, то й $B_{i,n} \subseteq U_i$ для кожного $i \in I$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді за індуктивним припущенням множина $F_n = \bigcup\limits_{i \in I} B_{i,n}$ є функціонально мультиплікативного класу α_n. Отже, множина $B = \bigcup\limits_{i \in I} B_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ є функціонально адитивного класу α.

Нехай тепер $B_i \in \mathcal{F}^*_\alpha$ для кожного $i \in I$. Тоді на основі леми 1.1 існує послідовність множин $B_{i,n} \in \mathcal{G}^*_{\alpha_n}$ така, що $B_i = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{i,n}$. Покладемо $G_{i,n} = B_{i,n} \cap U_i$, тоді множини $G_{i,n}$ є функціонально адитивного класу α_n, причому $G_{i,n} \subseteq U_i$ і $B_i = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{i,n}$ для кожного $i \in I$. Покладемо $G_n = \bigcup\limits_{i \in I} G_{i,n}$, тоді G_n — множина функціонально адитивного класу α_n. Покажемо, що $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Включення $B \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ очевидне, покажемо, що виконується обернене включення. Дійсно, нехай x належить правій частині рівності і нехай U — окіл точки x такий, що множина $I_0 = \{i \in I : U \cap U_i \neq \emptyset\}$ скінченна. Тоді

$$x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\in I} G_{i,n}\right)\bigcap U = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i\in I}(G_{i,n}\cap U)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\in I_0}(G_{i,n}\cap U) =$$

$$= \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\in I_0} G_{i,n}\right)\bigcap U = \left(\bigcup_{i\in I_0}\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{i,n}\right)\bigcap U =$$

$$= \left(\bigcup_{i\in I_0} B_i\right)\bigcap U \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)\bigcap U.$$

Отже, $B \in \mathcal{F}^*_\alpha$.

Теорема 1.5. *Нехай α — зліченний ординал, X, Y — топологічні простори, $(V_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я функціонально відкритих множин в X, $(A_i : i \in I)$ — сім'я множин функціонально адитивного класу α в Y. Тоді $A = \bigcup\limits_{i\in I}(V_i \times A_i)$ — множина функціонально адитивного класу α в $X \times Y$.*

Доведення. Для кожного $i \in I$ покладемо $U_i = V_i \times Y$, тоді множини U_i функціонально відкриті в $X \times Y$ і сім'я $(U_i : i \in I)$ локально скінченна в $X \times Y$. Позначимо $B_i = V_i \times B_i$, тоді, згідно з лемою 1.2, B_i — множини функціонально адитивного класу α в $X \times Y$, причому $B_i \subseteq U_i$ для кожного $i \in I$. Тоді з твердження 1.4 випливає, що множина $A = \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ буде функціонально адитивного класу α в $X \times Y$.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *PP-простором*, якщо існує послідовність локально скінченних покриттів $((U_i^{(n)} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ цього простору функціонально відкритими множинами і існує послідовність сімей точок $((x_i^{(n)} : i \in I_n))_{n=1}^{\infty}$ з X такі, що для довільного $x \in X$ і для довільного околу U точки x існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geq n_0$ і для всіх $i \in I_n$ з умови $x \in U_i^{(n)}$ випливає, що $x_i^{(n)} \in U$.

Зауважимо, що наведене означення рівносильне означенню PP-просторів із [5].

Твердження 1.6. *Нехай α — зліченний ординал, X — PP-простір, T — топологічний простір, Z — досконало нормальний простір і відображення $f : X \times T \to Z$ таке, що відображення $f_t : X \to Z$ неперервне для кожного $t \in T$ і відображення $f^{x_i^{(n)}} : T \to Z$ належить до функціонального класу α Лебеґа для всіх $x_i^{(n)}$ з означення PP-простору. Тоді $f \in H^*_{\alpha+1}(X \times T, Z)$.*

Доведення. Нехай F — замкнена в Z множина. Простір Z є досконало нормальним, тому множина F подається у вигляді $F = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G_m$, де G_m — відкриті в Z множини такі, що $\overline{G}_{m+1} \subseteq G_m$ для кожного m. Згідно з твердженням 2.1 з [1], виконується включення

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{i \in I_n} U_i^{(n)} \times (f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m). \qquad (*)$$

Оскільки для точок $x_i^{(n)}$ відображення $f^{x_i^{(n)}} : T \to Z$ належать до функціонального класу α Лебеґа, то множини $(f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m)$ належать до функціонально адитивного класу α в T. Множини $U_i^{(n)}$ є функціонально відкритими в X. Згідно з теоремою 1.5, множини $E_n = \bigcup\limits_{i \in I_n} U_i^{(n)} \times (f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m)$ належать до функціонально адитивного класу α для кожного n, тоді і $\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} E_n$ є множиною функціонально адитивного класу α, отже, прообраз $f^{-1}(F)$ є множиною функціонально мультиплікативного класу $\alpha + 1$.

З твердження 1.6 безпосередньо випливає

Теорема 1.7. *Нехай X — PP-простір, T — топологічний простір, Z — досконало нормальний простір. Тоді*

$$CH_\alpha^*(X \times T, Z) \subseteq H_{\alpha+1}^*(X \times T, Z).$$

Теорема 1.8. *Нехай X — метризовний простір, T — топологічний простір, Z — досконало нормальний простір. Тоді*

$$C\overline{H}_\alpha^*(X \times T, Z) \subseteq H_{\alpha+1}^*(X \times T, Z).$$

Доведення. Нехай $| \cdot - \cdot |$ — метрика на X, яка породжує його топологічну структуру. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in X$ покладемо $U_{\frac{1}{3n}} = \{x' \in X : |x - x'| < \frac{1}{3n}\}$. Сім'я множин $(U_{\frac{1}{3n}}(x) : x \in X)$ утворює відкрите покриття простору X для кожного n. Згідно з теоремою Стоуна [4], простір X є паракомпактним, тому в кожне таке покриття можна вписати відкрите локально скінченне покриття $(U_i^{(n)} : i \in I_n)$ простору X. Оскільки множина $X_{H_\alpha^*}(f)$ всюди щільна в X, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ і кожного $i \in I_n$ існує $x_i^{(n)} \in X_{H_\alpha^*}(f) \cap U_i^{(n)}$. Як відомо з [3], виконується включення (*). Множини $U_i^{(n)}$ є відкритими, а отже, і функціонально відкритими в X, оскільки X — метризовний простір. Тоді з теореми 1.5 випливає, що множини $\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}\bigcup\limits_{i\in I_n} U_i^{(n)}\times (f^{x_i^{(n)}})^{-1}(G_m)$ є функціонально адитивного класу α в $X\times T$. Отже, прообраз $f^{-1}(F)$ буде множиною функціонально мультиплікативного класу $\alpha+1$, тобто, $f\in H^*_{\alpha+1}(X\times T,Z)$.

2. Легко бачити, що $\mathcal{G}^*_0,\mathcal{F}^*_0\subseteq\mathcal{G}^*_1\cap\mathcal{F}^*_1$. Індукцією за α можна показати, що $\mathcal{G}^*_\beta,\mathcal{F}^*_\beta\subseteq\mathcal{G}^*_\alpha\cap\mathcal{F}^*_\alpha$ для всіх $0\le\beta<\alpha<\omega_1$, тобто довільна множина з класу $\mathcal{G}^*_\beta$ або з класу $\mathcal{F}^*_\beta$ є функціонально двосторонньою множиною класу α.

Лема 2.1. *Нехай X — топологічний простір, $\alpha>0$ — зліченне порядкове число, $A\subseteq X$ — множина функціонально адитивного класу α. Тоді існує послідовність (A_n) диз'юнктних функціонально двосторонніх множин класу α в X таких, що $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.*

Доведення. Оскільки A — множина функціонально адитивного класу α, то $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$, де B_n — множини функціонально мультиплікативних класів, менших α. Множини B_n є функціонально двосторонніми класу α. Покладемо $A_1=B_1$, $A_2=B_2\setminus B_1,\dots,A_n=B_n\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}B_k,\dots$. Множини A_n є диз'юнктними і функціонально двосторонніми класу α, причому $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

Лема 2.2. *Нехай X — топологічний простір, α — зліченне порядкове число, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність множин функціонально адитивного класу α в X, причому $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. Тоді існує послідовність $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин класу α в X таких, що $B_n\subseteq A_n$ і $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.*

Доведення. З леми 2.1 випливає, що для кожного $n\in\mathbb{N}$ існує послідовність $(F_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин класу α таких, що $A_n=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}F_{n,m}$. Перенумеруємо подвійну послідовність (n,m) в звичайну послідовність. Нехай $k=k(n,m)$ — ціле число, яке відповідає парі (n,m). Покладемо

$$C_{n,m}=F_{n,m}\setminus\bigcup_{k(p,s)<k(n,m)}F_{p,s}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} C_{n,m} = \bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} F_{n,m} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Покладемо $B_n = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} C_{n,m}$. Тоді $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$ і $B_n \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_{n,m} = A_n$. Зрозуміло, що оскільки множини $C_{n,m}$ є диз'юнктними функціонально двосторонніми класу α, то такими будуть і множини B_n, адже $X \setminus B_n = \bigsqcup\limits_{k\neq n}^{\infty} B_k$ — множини функціонально адитивного класу α, отже, B_n — множини функціонально мультиплікативного класу α.

Лема 2.3. *Нехай X — топологічний простір, $\alpha > 0$ — зліченне порядкове число, $A, B \subseteq X$ — диз'юнктні множини функціонально мультиплікативного класу α. Тоді існує функціонально двостороння множина C класу α така, що $A \subseteq C$ і $C \cap B = \emptyset$.*

Доведення. З леми 2.2 випливає, що існують диз'юнктні функціонально двосторонні множини E_1 і E_2 класу α такі, що $E_1 \subseteq X \setminus A$, $E_2 \subseteq X \setminus B$ і $E_1 \cup E_2 = X$. Покладемо $C = E_2$. Тоді $A \subseteq X \setminus E_1 = E_2$ і $E_2 \cap B = \emptyset$.

Лема 2.4. *Нехай X — топологічний простір, $\alpha > 1$ — зліченне порядкове число, $A \subseteq X$ — функціонально двостороння множина класу α. Тоді існує послідовність (A_n) функціонально двосторонніх множин класів, менших α, така, що $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_{n+k} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_{n+k}$.*

Доведення. Оскільки $A \subseteq X$ — функціонально двостороння множина класу α, то $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ і $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} C_n$, де (B_n) і (C_n) — зростаючі послідовності множин функціонально мультиплікативних класів менших α. З леми 2.3 і того, що $B_n \cap C_n = \emptyset$, випливає, що існує послідовність (A_n) функціонально двосторонніх множин класів, менших α, така, що $B_n \subseteq A_n$ і $A_n \cap C_n = \emptyset$. Тоді $B_n \subseteq A_n \subseteq (X \setminus C_n)$. Послідовності (B_n) і (C_n) зростають, тому $B_n = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} B_{n+k}$ і $C_n = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_{n+k}$ для кожного n. Тоді

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=0}^{\infty} B_{n+k} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n+k} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{\infty}(X \setminus C_{n+k}) =$$

$$= \bigcap_{k=0}^{\infty}(X \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} C_{n+k}) = \bigcap_{k=0}^{\infty}(X \setminus C_k) = X \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k = A,$$

звідки й випливає твердження леми.

Лема 2.5. *Нехай X — топологічний простір, $\alpha > 0$ — зліченне порядкове число, $A_1, \dots, A_n$ — диз'юнктні множини функціонально мультиплікативного класу α в X. Тоді існують диз'юнктні функціонально двосторонні множини $B_1, \dots, B_n$ класу α такі, що $A_i \subseteq B_i$, $1 \le i \le n$ і $X = B_1 \cup \dots \cup B_n$.*

Доведення. Випадок $n = 2$ доведений у лемі 2.3. Нехай твердження леми виконується для всіх $k < n$. Існують диз'юнктні функціонально двосторонні множини $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_{n-1}$ класу α, такі, що $A_i \subseteq \tilde{B}_i$ при $1 \le i \le n-2$, $A_{n-1} \cup A_n \subseteq \tilde{B}_{n-1}$ і $X = \bigcup_{i=1}^{n-1} \tilde{B}_i$. З леми 2.3. випливає, що існують диз'юнктні функціонально двосторонні множини C і D класу α такі, що $A_{n-1} \subseteq C$ і $A_n \subseteq D$. Покладемо $B_i = \tilde{B}_i$ для $i = 1, \dots, n-2$, $B_{n-1} = \tilde{B}_{n-1} \cap C$, $B_n = \tilde{B}_{n-1} \cap D$.

Лема 2.6. *Нехай X, Y — топологічні простори, $\alpha > 0$ — зліченне порядкове число, $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність множин функціонально адитивного класу α в X така, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ і $f : X \to Y$ — таке відображення, що для довільної відкритої в Y множини G множина $f^{-1}(G) \cap F_n$ належить до функціонально адитивного класу α в X для всіх $n \ge 1$. Тоді $f \in H^*_\alpha(X, Y)$.*

Доведення. Нехай G — відкрита в Y множина, тоді

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{-1}(G) \cap F_n),$$

де множини $f^{-1}(G) \cap F_n$ є функціонально адитивними класу α в X, отже, і множина $f^{-1}(G)$ є функціонально адитивною класу α в X.

Лема 2.7. *Нехай X, Y — топологічні простори, $\alpha > 0$ — зліченне порядкове число, $F_1, \dots, F_n$ — диз'юнктні множини функціонально мультиплікативного класу α в X, $y_1, \dots, y_n \in Y$. Тоді існує відображення $f \in H^*_\alpha(X, Y)$ таке, що $f(x) = y_i$ для $x \in F_i$.*

Доведення. Згідно з лемою 2.5, існують диз'юнктні функціонально двосторонні множини $A_1, \dots, A_n$ класу α в X такі, що $F_i \subseteq A_i$ і $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Покладемо $f(x) = y_i$ для $x \in A_i$, $i = 1, \dots, n$. Зрозуміло, що для довільної відкритої в Y множини G і для кожного i множини $f^{-1}(G)\cap A_i$ належать до функціонально адитивного класу α в X. Тоді з леми 2.6 випливає, що $f\in H^*_\alpha(X,Y)$.

Теорема 2.8. *Нехай X, Y — топологічні простори, $\alpha>1$ — зліченне порядкове число, $\{y_1,\dots,y_n\}$ — підпростір Y, $f\in H^*_\alpha(X,Y)$, $\operatorname{im} f=\{y_1,\dots,y_n\}$. Тоді існує послідовність функцій $f_k\in H^*_{\alpha_k}(X,Y)$, $\alpha_k<\alpha$, $\operatorname{im} f_k\subseteq \operatorname{im} f$, яка поточково збігається до f.*

Доведення. Для кожного $i=1,\dots,n$, множини $A_i=f^{-1}(y_i)$ є функціонально двосторонніми множинами класу α. Тоді, згідно з лемою 2.4, для кожного i існує послідовність $(A_{i,k})_{k=1}^\infty$ функціонально двосторонніх множин класів $\alpha_{i,k}<\alpha$ така, що

$$A_i=\bigcup_{k=0}^\infty\bigcap_{m=0}^\infty A_{i,k+m}=\bigcap_{k=0}^\infty\bigcup_{m=0}^\infty A_{i,k+m}. \tag{1}$$

Для кожного $k\in\mathbb{N}$ покладемо

$$F_{1,k}=A_{1,k},\quad F_{2,k}=A_{2,k}\setminus A_{1,k},\quad F_{n,k}=A_{n,k}\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}A_{i,k}.$$

Позначимо $\alpha_k=\max\{\alpha_{1,k},\dots,\alpha_{n,k}\}$. Оскільки при фіксованому k множини $F_{i,k}$, $i=1,\dots,n$, диз'юнктні і належать до функціонально мультиплікативного класу α_k, то, згідно з лемою 2.7, існує відображення $f_k\in H^*_{\alpha_k}(X,Y)$ таке, що $f_k(x)=y_i$ для $x\in F_{i,k}$. Покажемо, що $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$. Дійсно, нехай $x_0\in X$. Оскільки $X=\bigsqcup\limits_{i=1}^n A_i$, то існує i таке, що $x_0\in A_i$ і $x_0\notin A_j$ при $i\neq j$. З (1) випливає, що існує k_0 таке, що для всіх $k\geq k_0$

$$x_0\in A_{i,k}\quad \text{і}\quad x_0\notin A_{j,k}.$$

Тому $x_0\in F_{i,k}$, звідки $f_k(x_0)=y_i=f(x_0)$ для всіх $k\geq k_0$.

Лема 2.9. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — сепарабельний метричний простір, $\alpha>0$ — зліченне порядкове число, $f_1\in H^*_\alpha(X,Y)$, $f_2\in H^*_\alpha(X,Y)$ і $g(x)=d(f_1(x),f_2(x))$. Тоді $g\in H^*_\alpha(X,\mathbb{R})$.*

Доведення. Покладемо $h(x)=(f_1(x),f_2(x))$ і покажемо, що $h\in H^*_\alpha(X,Y\times Y)$. Справді, нехай $(U_n)_{n=1}^\infty$ — база в Y і G — відкрита в Y^2 множина. Тоді $G=\bigcup\limits_{k=1}^\infty U_{n_k}\times U_{m_k}$ і

$$h^{-1}(G)=\bigcup_{k=1}^\infty h^{-1}(U_{n_k}\times U_{m_k})=\bigcup_{k=1}^\infty(f_1^{-1}(U_{n_k})\cap f_2^{-1}(U_{m_k})).$$

Оскільки $f_1^{-1}(U_{n_k})$ і $f_2^{-1}(U_{m_k})$ є множинами функціонально адитивного класу α в X, то їх перетин також є функціонально адитивною множиною класу α в X, тому і прообраз $h^{-1}(G)$ є функціонально адитивною множиною класу α. Отже, оскільки $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ — неперервне відображення, то $g = d \circ h \in H^*_\alpha(X, Y)$ як композиція неперервного відображення і відображення з функціонального класу $H^*_\alpha(X, Y)$.

Теорема 2.10. *Нехай X — топологічний простір, (Y, d) — метричний простір, $\alpha > 0$ — зліченне порядкове число, (f_n), (g_n) — послідовності відображень функціональних класів Лебеґа менших α, $f_n, g_n : X \to Y$, кожне з яких набуває значень в деякому скінченному підпросторі простору Y, і*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x), \quad \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)) < c. \tag{2}$$

Тоді існує послідовність (h_n) відображень $h_n : X \to Y$ функціональних класів менших α, множина значень яких міститься в деякому скінченному підпросторі простору Y і

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = g(x), \qquad d(h_n(x), f_n(x)) \le c. \tag{3}$$

Доведення. Згідно з лемою 2.9, відображення $d(g_n(x), f_n(x))$ є функціонального класу менше α і набуває значень в скінченному підпросторі числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді множина $A_n = \{x \in X : d(g_n(x), f_n(x)) \le c\}$ є функціонально двосторонньою класу менше α. Покладемо

$$h_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{якщо} \quad x \in A_n, \\ f_n(x), & \text{якщо} \quad x \notin A_n. \end{cases}$$

Нехай G — відкрита підмножина Y і $n \in \mathbb{N}$. Тоді множина $h_n^{-1}(G) \cap A_n = g_n^{-1}(G) \cap A_n$ належить до функціонально адитивного класу менше α в X і $h_n^{-1}(G) \cap (X \setminus A_n) = f_n^{-1}(G) \cap (X \setminus A_n)$ також є множиною функціонально адитивного класу менше α в X. З леми 2.6 випливає, що $h_n : X \to Y$ є відображенням функціонального класу Лебеґа менше α. Покажемо, що виконуються співвідношення (3). Справді, нехай $x_0 \in X$, тоді з (2) випливає, що існує n_0 таке, що для всіх $n \ge n_0$ виконується нерівність $d(g_n(x_0), f_n(x_0)) \le c$. Тому $x_0 \in A_n$ для $n \ge n_0$ і $h_n(x_0) = g_n(x_0)$, отже,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0).$$

Теорема 2.11. *Нехай X — топологічний простір, (Y,d) — метричний цілком обмежений простір, $\alpha>0$ — зліченне порядкове число і $f\in H^*_\alpha(X,Y)$. Тоді існує рівномірно збіжна до функції f послідовність функцій $f_n\in H^*_\alpha(X,Y)$ така, що* $\operatorname{im} f$ *— скінченний підпростір простору Y.*

Доведення. Оскільки простір Y цілком обмежений, то для кожного $n\in\mathbb{N}$ існує скінченна множина $Y_n=\{y_i^{(n)}\in Y : i\in I_n\}$ така, що для довільного $y\in Y$ існує $i\in I_n$ таке, що $d(y,y_i^{(n)})<1/n$. Покладемо

$$A_i^n=\{x\in X : d(f(x),y_i^{(n)})<1/n\},\quad n\in\mathbb{N},\quad i\in I_n.$$

Множини A_i^n належать до функціонально адитивного класу α в X, причому $\bigcup\limits_{i\in I_n} A_i^n=X$. Тоді за лемою 2.2 існує послідовність F_i^n диз'юнктних функціонально двосторонніх множин класу α в Xтака, що $F_i^n\subseteq A_i^n$, $\bigcup\limits_{i\in I_n} F_i^n=X$. Означимо функції f_n наступним чином:

$$f_n(x)=y_i^{(n)},\quad \text{якщо}\quad x\in F_i^n,\quad i\in I_n.$$

Зрозуміло, що всі відображення $f_n : X\to Y$ є функціонального класу α Лебеґа. Покажемо, що послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ рівномірно збігається до f. Справді, нехай $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$. Тоді існує $i\in I_n$ таке, що $x\in F_i^n$, $f_n(x)=y_i^{(n)}$. Оскільки $x\in F_i^n\subseteq A_i^n$, то $d(f(x),f_n(x))=d(f(x),y_i^{(n)})<1/n$.

Теорема 2.12. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний сепарабельний простір, $\alpha>1$ — зліченне порядкове число і $f\in H^*_\alpha(X,Y)$. Тоді існує послідовність відображень $g_n\in H^*_{\alpha_n}(X,Y)$, $\alpha_n<\alpha$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=f(x)$.*

Доведення. Нехай d — метрика на Y, з якою простір Y є цілком обмеженим. З теореми 2.11 випливає, що існує послідовність відображень $f_m\in H^*_\alpha(X,Y)$, які набувають скінченної кількості значень і рівномірно прямують до f. Можна вважати, що

$$d(f_{m+1}(x),f_m(x))<\frac{1}{2^m}. \tag{4}$$

За теоремою 2.10 існує послідовність $(f_{m,n})_{n=1}^\infty$ відображень $f_{m,n} : X\to Y$ функціональних класів менших α, які набувають скінченної кількості значень, і поточково збігаються до відображення f.

Покладемо $h_{1,n} = f_{1,n}$. Нехай вже визначені відображення $h_{i,n} : X \to Y$ для $i \le m$ такі, що

$$\lim_{n\to\infty} h_{i,n}(x) = f_i(x) \quad \text{і} \quad d(h_{i,n}, h_{i-1,n}) \le \frac{1}{2^{i-1}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Оскільки $f_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_{m,n}(x)$, а $f_{m+1}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{m+1,n}(x)$, то з нерівності (4) і теореми 10 випливає, що існує послідовність $(h_{m+1,n})_{n=1}^{\infty}$ відображень $h_{m+1,n} : X \to Y$ з функціональних класів менших α, які набувають скінченної кількості значень і

$$\lim_{n\to\infty} h_{m+1,n}(x) = f_{m+1}(x), \qquad d(h_{m+1,n}, h_{m,n}) \le \frac{1}{2^m}.$$

Покладемо $g_n(x) = h_{n,n}(x)$ і покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$.

Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $\frac{1}{2^{m-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$ і

$$d(f_m(x_0), f(x_0)) \le \varepsilon/3.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} h_{m,n}(x_0) = f_m(x_0)$, то існує $n_0 > m$ таке, що для всіх $n \ge n_0$ виконується нерівність $d(h_{m,n}(x_0), f_m(x_0)) \le \varepsilon/3$. Тоді при $n \ge n_0$ отримаємо, що

$$d(h_{n,n}(x_0), f(x_0)) \le d(h_{n,n}(x_0), h_{n-1,n}(x_0)) + \ldots + d(h_{m+1,n}(x_0), h_{m,n}(x_0)) +$$

$$+ d(h_{m,n}(x_0), f_m(x_0)) + d(f_m(x_0), f(x_0)) < \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} <$$

$$< \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Зауважимо, що при $\alpha = \beta + 1$, де β — граничний ординал, відображення $g_n : X \to Y$ належать до функціональних класів Лебеґа менших β.

Теорема 2.13. *Нехай X — топологічний простір, Y — сепарабельний метризовний топологічний векторний простір, $\alpha > 0$ — зліченне порядкове число. Тоді $H^*_\alpha(X, Y) \subseteq B_\alpha(X, Y)$, якщо α — скінченний ординал, і $H^*_\alpha(X, Y) \subseteq B_{\alpha+1}(X, Y)$, якщо α — нескінченний ординал.*

Доведення. Використаємо індукцію за α. Твердження очевидне при $\alpha = 0$. Випадок $\alpha = 1$ розглянуто в [1].

Нехай $f \in H^*_{n+1}(X, Y)$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує послідовність відображень $f_n \in H^*_n(X, Y) \subseteq B_n(X, Y)$, яка поточково збігається до f. Таким чином, $f \in B_{n+1}(X, Y)$ і твердження виконується для всіх $\alpha < \omega_o$.

Нехай твердження виконується для всіх $\xi < \alpha$ і α — граничний ординал. Тоді для довільного відображення $f \in H^*_\alpha(X,Y)$, згідно з теоремою 2.12, існує послідовність відображень $f_n \in H^*_{\alpha_n}(X,Y)$, $\alpha_n < \alpha$, яка поточково збігається до відображення f. Тоді, згідно з індуктивним припущенням, $f_n \in B_{\alpha_n+1}(X,Y)$, звідки випливає, що $f_n \in B_\alpha(X,Y)$. Тоді $f \in B_{\alpha+1}(X,Y)$.

3. Нехай X і Y — топологічні простори. Неперервне відображення $\varphi : X \to Y$ називається *слабким локальним гомеоморфізмом*, якщо для довільної точки $y \in Y$ існують її відкритий окіл V_y і відкрита в X множина $U \subseteq \varphi^{-1}(V_y)$ такі, що $\varphi|_U : U \to V_y$ — гомеоморфізм.

Теорема 3.1. *Нехай X — топологічний простір, Y — ліндельофовий простір, Z — топологічний простір такий, що існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi : Z \to Y$, $\alpha > 0$ — зліченне порядкове число і $f \in H^*_\alpha(X,Y)$. Тоді існує відображення $g \in H^*_\alpha(X,Z)$ таке, що $f(x) = \varphi(g(x))$ для всіх $x \in X$.*

Доведення. Оскільки $\varphi : Z \to Y$ — слабкий локальний гомеоморфізм, то для довільного $y \in Y$ існують відкритий окіл V_y точки y і відкрита множина U_y в Z такі, що $\varphi|_{U_y} : U_y \to V_y$ — гомеоморфізм.

Сім'я множин $(V_y : y \in Y)$ утворює відкрите покриття простору Y. Оскільки простір Y ліндельофовий, то існує підпокриття $(V_{y_n} : n \in \mathbb{N})$ простору Y. Позначимо через $(U_n)_{n=1}^\infty$ послідовність відповідних відкритих множин в Z таких, що $\varphi_n = \varphi|_{U_n} : U_n \to V_{y_n}$ — гомеоморфізм.

Оскільки $f \in H^*_\alpha(X,Y)$, то множини $A_n = f^{-1}(V_{y_n})$ належать до функціонально адитивного класу α в X. Згідно з лемою 2.2, існує послідовність $(F_n)_{n=1}^\infty$ диз'юнктних функціонально двосторонніх множин класу α в X таких, що $F_n \subseteq A_n$ і $X = \bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n$. Покладемо $B_n = f(F_n)$, тоді $B_n \subseteq V_{y_n}$. Нехай $C_n = \varphi_n^{-1}(B_n) \subseteq U_n$, тоді $\varphi|_{C_n} : C_n \to B_n$ — гомеоморфізм. Позначимо $\psi_n = (\varphi|_{C_n})^{-1} : B_n \to C_n$ і покладемо $g(x) = \psi_n(f(x))$, якщо $x \in F_n$. Покажемо, що $f(x) = \varphi(g(x))$. Справді, нехай $x \in X$. Тоді існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in F_n$. Оскільки $f(x) \in B_n$, то $\psi_n(f(x)) = \varphi_n^{-1}(f(x))$, тоді

$$\varphi(g(x)) = \varphi(\psi_n(f(x))) = \varphi(\varphi_n^{-1}(f(x))) = f(x).$$

Нехай G — відкрита в Z множина і $n \in \mathbb{N}$. Перевіримо, що

$$g^{-1}(G) \cap F_n = f^{-1}(\varphi(G \cap U_n)) \cap F_n.$$

Якщо $x \in g^{-1}(G) \cap F_n$, то $g(x) \in G$ і $f(x) \in B_n$. Тоді $g(x) = \psi_n(f(x)) \in C_n \subseteq U_n$, звідки $g(x) \in G \cap U_n$ і $f(x) = \varphi(g(x)) \subseteq \varphi(G \cap U_n)$.

Нехай тепер x належить до правої частини рівності. Тоді $f(x) = \varphi(g(x)) \in \varphi(G \cap U_n)$. З того, що $x \in F_n$ випливає, що $g(x) = \psi_n(f(x)) \in C_n \subseteq U_n$, а $f(x) \in B_n \subseteq V_{y_n}$. Відображення $\varphi|_{U_{y_n}} : U_n \to V_{y_n}$ — бієкція, тому $g(x) \in G \cap U_n$, отже, $g(x) \in G$.

Оскільки $\varphi_n : U_n \to V_{y_n}$ — гомеоморфізм, то множина $\varphi(G \cap U_n)$ є відкритою в V_{y_n}, а отже, і в Y. Тому множина $f^{-1}(\varphi(G \cap U_n))$ належить до функціонально адитивного класу α в X, тоді й множина $g^{-1}(G) \cap F_n$ є такою ж. З леми 2.6 випливає, що $g \in H^*_\alpha(X, Z)$.

Теорема 3.2. *Нехай X — топологічний простір, Y — ліндeлефовий простір, Z — метризовний сепарабельний топологічний векторний простір, такий, що існує слабкий локальний гомеоморфізм $\varphi : Z \to Y$, $0 < \alpha < \omega_1$. Тоді $H^*_\alpha(X, Y) \subseteq B_\alpha(X, Y)$, якщо α — скінченний ординал, і $H^*_\alpha(X, Y) \subseteq B_{\alpha+1}(X, Y)$, якщо α — нескінченний ординал.*

Доведення. Згідно з теоремою 3.1, існує відображення $g : X \to Z$ функціонального класу α Лебеґа таке, що $f(x) = \varphi(g(x))$ для всіх $x \in X$.

З теореми 2.13 випливає, що $g \in B_\alpha(X, Z)$, якщо α — скінченний ординал і $g \in B_{\alpha+1}(X, Z)$, якщо α — нескінченний ординал. Тому існує послідовність $(g_n)_{n=1}^\infty$ функцій $g_n \in B_{\alpha_n}(X, Z)$ таких, що $g_n \to g$ поточково на X і $\alpha_n < \alpha$ або $\alpha_n < \alpha + 1$ залежно від того, скінченним чи нескінченним є α. Покладемо $f_n = \varphi \circ g_n$. Тоді $f_n \in B_{\alpha_n}(X, Y)$. Покажемо, що $f_n \to f$ поточково на X. Справді, нехай $x \in X$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(g_n(x)) = \varphi(\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)) = \varphi(g(x)) = f(x)$. Отже, $f \in B_\alpha(X, Y)$, якщо α — скінченне, і $f \in B_{\alpha+1}(X, Y)$, якщо α — нескінченне.

З теорем 1.7, 1.8, 3.2 випливають наступні результати.

Теорема 3.3. *Нехай X — PP-простір, T — топологічний простір, Y — досконалий ліндeлефовий простір з класу $\mathcal{K}$ і $0 \le \alpha \le \omega_1$. Тоді $CH^*_\alpha(X \times T, Y) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times T, Y)$, якщо α — скінченний ординал і $CH^*_\alpha(X \times T, Y) \subseteq B_{\alpha+2}(X \times T, Y)$, якщо α — нескінченний ординал.*

Теорема 3.4. *Нехай X — метризовний простір, T — топологічний простір, Y — досконалий ліндeлефовий простір з класу $\mathcal{K}$ і α — зліченний ординал. Тоді $C\overline{H}^*_\alpha(X \times T, Y) \subseteq B_{\alpha+1}(X \times T, Y)$, якщо α — скінченний ординал і $C\overline{H}^*_\alpha(X \times T, Y) \subseteq B_{\alpha+2}(X \times T, Y)$, якщо α — нескінченний ординал.*

[1] *Карлова О.О.* Перший функціональний лебеґівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191–192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 52–60.

[2] *Куратовский К.* Топология. Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594с.

[3] *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Чернівці, 1999. – 345 с.

[4] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

[5] *Sobchuk O.* PP-spaces and Baire classification // Book of Abstracts Int. Conf. Func. Anal. Appl., May 28-31, Lviv, 2002. – 2002. – P. 189.

THE BAIRE CLASSIFICATION OF MAPPINGS WHICH ARE CONTINUOUS WITH RESPECT TO THE FIRST VARIABLE AND OF THE FUNCTIONAL CLASS α WITH RESPECT TO THE SECOND ONE

Olena KARLOVA

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsyubyns'koho Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

It is proved that every mapping $f : X \times T \to Y$ which is continuous with respect to the first variable and of the functional class α with respect to the second one is of the $\alpha + 1$ Baire class when X is a metrizable (or even PP-) space, T is a topological space and Y is a perfect Lindelöf space which is weakly covered by a separable metrizable topological vector space.