Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2015. — Т.12

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2015. — V.12

ПРО ВАРТІСТЬ ДЕРИВАТИВУ У ТРИНОМІАЛЬНІЙ ЦІНОВІЙ МОДЕЛІ

Сергій Підкуйко[1], Микола Баб'як[2]

[1] *ЛНУ ім. Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів, 79000*
[2] *CERGE-EI, P.O. Box 882, Politických vězňů 936/7, 110 00 Praha 1, Czech Republic*

С. Підкуйко, М. Баб'як. *Про вартість деривативу у триноміальній ціновій моделі* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. — 2015. — Т.12. — С. 109–129.

Вводиться поняття загальної N-періодної триноміальної цінової моделі та симетричної N-періодної триноміальної цінової моделі. Доведено критерій безарбітражності для загальної N-періодної триноміальної цінової моделі. Отримано безарбітражну ціну деривативу для N-періодної симетричної триноміальної цінової моделі з використанням біноміального дерева. Отримано оцінку безарбітражної ціни деривативу в загальній N-періодній триноміальній ціновій моделі.

S. Pidkuyko, M. Babiak, *On price of derivative in trinomial asset-pricing model*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **12** (2015), 109–129.

The general and symmetric N-period trinomial asset-pricing models are defined. For general N-period trinomial model the criterion of no-arbitrage is proved. For symmetric N-period trinomial model the no-arbitrage price of a derivative security is obtained. For general N-period trinomial model the estimation of no-arbitrage price is obtained.

Вступ

В роботі вводиться поняття загальної N-періодної триноміальної цінової моделі як аналога і узагальнення добре відомої класичної біноміальної цінової

2010 *Mathematics Subject Classification:* 91B28 *УДК:* 517.9

Ключові слова та фрази: безарбітражна триноміальна цінова модель, дериватив, арбітраж, безарбітражна ціна деривативу.

E-mail: pidkuyko@gmail.com, mykola.babyak@gmail.com

Partially supported by the grant 25.1/099 of State Fund of Fundamental Research of Ukraine.

моделі (Shreve S. [1], Hull J. [3]). Для цієї моделі виводиться критерій безарбітражності. Використовуючи підхід, запропонований в роботі (Pliska S.R. [4]), отримано оцінку безарбітражної ціни деривативу в загальній N-періодній триноміальній ціновій моделі. В роботі вводиться поняття симетричної N-періодної триноміальної цінової моделі (як підкласу загальної N-періодної триноміальної цінової моделі). Отримано безарбітражну ціну деривативу для симетричної N-періодної триноміальної цінової моделі, спираючись на ціну деривативу у відповідній (яку в роботі названо асоційованою) біноміальній ціновій моделі.

1. Мультиперіодна триноміальна модель

Означення 1.1. *Загальна N-періодна триноміальна цінова модель* з параметрами $S_0, u, m, d, r, p_1, p_2, p_3$ визначається так:

(1) починається в момент часу 0, завершується в момент часу N і має N періодів;
(2) наявний ринок акцій;
(3) в момент часу 0 ціна акції відома і становить $S_0 > 0$;
(4) в момент часу $n \in \{1, \dots, N\}$ підкидається "тригранна монета", результатом підкидання є $\omega_n \in \{H, M, T\}$:

$$\mathbb{P}\{\omega_n = H\} = p_1 > 0, \quad \mathbb{P}\{\omega_n = M\} = p_2 > 0, \quad \mathbb{P}\{\omega_n = T\} = p_3 > 0.$$

Ціна акції позначається S_n, є випадковою величиною і залежить від результату $\omega_1 \dots \omega_n$ перших n підкидань монети $(0 < d < m < u)$:

$$S_n = S_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \begin{cases} uS_{n-1}(\omega_1 \dots \omega_{n-1}), & \omega_n = H, \\ mS_{n-1}(\omega_1 \dots \omega_{n-1}), & \omega_n = M, \\ dS_{n-1}(\omega_1 \dots \omega_{n-1}), & \omega_n = T. \end{cases}$$

(5) наявний ринок грошей з фіксованою відсотковою ставкою $r > 0$.

Загальну N-періодну триноміальну цінову модель з параметрами S_0, u, m, d, r, p_1, p_2, p_3 будемо позначати через $(S_0, u, m, d, r, p_1, p_2, p_3)$. Оскільки в подальших дослідженнях *справжні ймовірності* p_1, p_2, p_3 участі не беруть і на результати (як формулювання, так і доведення) не впливають (важливу роль відіграють *безризикові ймовірності* — функції від параметрів u, m, d, r), то будемо вживати поняття N-періодної триноміальної цінової моделі з параметрами S_0, u, m, d, r і позначати її через (S_0, u, m, d, r). Те ж стосується позначень для біноміальної цінової моделі.

Нехай

$$\sharp H(\omega_i \dots \omega_j), \quad \sharp M(\omega_i \dots \omega_j), \quad \sharp T(\omega_i \dots \omega_j), \quad i \le j,$$

позначає кількості випадань H, M і T у довільному наборі $(\omega_i \dots \omega_j)$. Ймовірнісним простором N-періодної триноміальної цінової моделі є пара $(\Omega, \mathbb{P})$, де

$$\Omega = \big\{(\omega_1 \dots \omega_N) \mid \omega_n \in \{H, M, T\}, \;\; n = 1, \dots, N\big\},$$
$$\mathbb{P}(\omega_1 \dots \omega_N) = p_1^{\sharp H(\omega_1 \dots \omega_N)} p_2^{\sharp M(\omega_1 \dots \omega_N)} p_3^{\sharp T(\omega_1 \dots \omega_N)}.$$

Теорема 1.2 (Критерій безарбітражності триноміальної цінової моделі). *Триноміальна цінова модель з параметрами S_0, u, m, d, r безарбітражна тоді й лише тоді, коли*

$$d < 1 + r < u. \tag{1.1}$$

Доведення. $(\Rightarrow)$ Обидві нерівності доводимо від супротивного.

Зауваження 1.3. $d < 1 + r$.

Припустимо, що $d \geq 1 + r$. Арбітражна торговельна стратегія виглядає так:

(1) в момент часу 0 позичаємо в банку суму S_0 і купуємо одну акцію;
(2) в момент часу N продаємо 1 акцію за суму S_N і повертаємо в банк суму $S_0(1 + r)^N$.

Отже, на руках залишається невід'ємна сума (незалежно від результату підкидань):

$$S_N(\omega_1 \dots \omega_N) - S_0(1+r)^N \geq S_0(d^N - (1+r)^N) \geq 0, \quad \forall(\omega_1 \dots \omega_N) \in \Omega,$$

та з ймовірністю не меншою, ніж $1 - p_3^N$, ця сума буде строго додатньою:

$$S_N(\omega_1 \dots \omega_N) - S_0(1 + r)^N \geq S_N(\omega_1 \dots \omega_N) - S_0 d^N > 0,$$
$$\forall(\omega_1 \dots \omega_N) \in \Omega : \; (\omega_1 \dots \omega_N) \neq (T \dots T).$$

Тобто маємо арбітраж, що суперечить умові.

Зауваження 1.4. $u > 1 + r$.

Припустимо, що $u \leq 1 + r$. У цьому випадку діємо так:

(1) в момент часу 0 продаємо одну акцію і отриману суму S_0 кладемо в банк;
(2) в момент часу N забираємо з банку суму $S_0(1 + r)^N$ і купуємо одну акцію.

Отже, на руках маємо невід'ємну суму (незалежно від результату підкидань):

$$S_0(1 + r)^N - S_N(\omega_1 \dots \omega_N) \geq S_0((1 + r)^N - u^N) \geq 0, \quad \forall(\omega_1 \dots \omega_N) \in \Omega,$$

та з ймовірністю не меншою, ніж $1 - p_1^N$, ця сума буде строго додатньою:

$$S_0(1+r)^N - S_N(\omega_1 \dots \omega_N) \geq S_0 u^N - S_N(\omega_1 \dots \omega_N) > 0,$$
$$\forall (\omega_1 \dots \omega_N) \in \Omega : \ (\omega_1 \dots \omega_N) \neq (H \dots H).$$

Отже, і в цьому випадку маємо арбітраж, що суперечить умові.

($\Leftarrow$) Нехай справджується умова (1.1). Позначимо через $X_0, \dots, X_N$ процес поточного капіталу учасника ринку і через $\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}$ – відповідний портфельний процес. Тоді ціна акції, поточний капітал та величина портфелю пов'язані *рівнянням поточного капіталу*:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)[X_n - \Delta_n S_n].$$

Зазначимо, що процес поточного капіталу і портфельний процес, так само, як і процес ціни акції, є *адаптованими*, оскільки X_n, Δ_n, S_n залежать лише від перших n підкидань монети.

Зауваження 1.5. Якщо $N = 1$, то модель безарбітражна.

Припустимо, що в моделі існує арбітраж. Тоді:

$$\forall \omega \in \{H, M, T\} \ \ X_1(\omega) \geq 0 \ \wedge \ \exists \omega \in \{H, M, T\} : \ X_1(\omega) > 0, \tag{1.2}$$

де згідно з рівнянням поточного капіталу

$$X_1(\omega) = \Delta_0 S_1(\omega) + (1+r)[X_0 - \Delta_0 S_0] = \Delta_0[S_1(\omega) - (1+r)S_0].$$

Звідси і з умови (1.2) зокрема отримуємо, що $\Delta_0 \neq 0$. Тоді, враховуючи (1.1), маємо:

$$X_1(H)X_1(T) = \Delta_0^2 S_0^2 [u - (1+r)][d - (1+r)] < 0.$$

Отже, $X_1(H)$ та $X_1(T)$ мають різні знаки, зокрема одна з цих величин від'ємна, що суперечить умові (1.2).

Зауваження 1.6. Якщо N-періодна модель має арбітраж, то має арбітраж також $(N-1)$-періодна модель.

Нехай $\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}$ — портфельний процес, що реалізує арбітраж в N-періодній моделі. Тоді:

$$\forall \omega = (\omega_1 \dots \omega_N) \ \ X_N(\omega) \geq 0 \ \wedge \ \exists \omega = (\omega_1 \dots \omega_N) : \ X_N(\omega) > 0, \tag{1.3}$$

де згідно з рівнянням поточного капіталу

$$X_N(\omega) = \Delta_{N-1}(\widetilde{\omega}) S_N(\omega) + (1+r)[X_{N-1}(\widetilde{\omega}) - \Delta_{N-1}(\widetilde{\omega}) S_{N-1}(\widetilde{\omega})] =$$
$$= (1+r)X_{N-1}(\widetilde{\omega}) + \Delta_{N-1}(\widetilde{\omega})[S_N(\omega) - (1+r)S_{N-1}(\widetilde{\omega})], \ \widetilde{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{N-1}).$$

З останньої рівності зокрема отримуємо:

$$X_N(\omega) - (1+r)X_{N-1}(\widetilde{\omega}) = \Delta_{N-1}(\widetilde{\omega})[S_N(\omega) - (1+r)S_{N-1}(\widetilde{\omega})]. \tag{1.4}$$

З (1.4) та умови (1.1) маємо:

$$[X_N(\widetilde{\omega}H) - (1+r)X_{N-1}(\widetilde{\omega})] \cdot [X_N(\widetilde{\omega}T) - (1+r)X_{N-1}(\widetilde{\omega})] = \\ = \Delta^2_{N-1}(\widetilde{\omega})S^2_{N-1}(\widetilde{\omega})[u-(1+r)][d-(1+r)] \leq 0. \tag{1.5}$$

Отже,

$$\forall \widetilde{\omega} = (\omega_1 \dots \omega_{N-1}) \quad X_{N-1}(\widetilde{\omega}) \geq \frac{1}{1+r}\min\{X_N(\widetilde{\omega}H),\ X_N(\widetilde{\omega}T)\} \geq 0.$$

Залишається обгрунтувати, що

$$\exists \widetilde{\omega} = (\omega_1 \dots \omega_{N-1}) : \quad X_{N-1}(\widetilde{\omega}) > 0. \tag{1.6}$$

Якщо

$$\forall \widetilde{\omega} = (\omega_1 \dots \omega_{N-1}) \quad \Delta_{N-1}(\widetilde{\omega}) = 0,$$

то з (1.3) та (1.4) отримуємо (1.6). Якщо

$$\exists \widetilde{\omega} = (\omega_1 \dots \omega_{N-1}) : \quad \Delta_{N-1}(\widetilde{\omega}) \neq 0,$$

то для такого $\widetilde{\omega}$ з (1.5) маємо:

$$[X_N(\widetilde{\omega}H) - (1+r)X_{N-1}(\widetilde{\omega})] \cdot [X_N(\widetilde{\omega}T) - (1+r)X_{N-1}(\widetilde{\omega})] < 0.$$

Звідси і з (1.3) знову отримуємо (1.6):

$$\exists \widetilde{\omega} = (\omega_1 \dots \omega_{N-1}) : \quad X_{N-1}(\widetilde{\omega}) > \frac{1}{1+r}\min\{X_N(\widetilde{\omega}H),\ X_N(\widetilde{\omega}T)\} \geq 0,$$

що завершує доведення зауваження 1.6. Твердження (достатність) теореми випливає тепер із зауважень 1.5 і 1.6. □

2. Безарбітражна ціна деривативу в симетричній триноміальній моделі

Означення 2.1. N-періодна триноміальна цінова модель з параметрами S_0, u, m, d, r називається *симетричною*, якщо $m = ud = 1$.

Означення 2.2. $2N$-періодна біноміальна цінова модель з параметрами S'_0, u', d', r' називається *асоційованою з* N-періодною симетричною триноміальною ціновою моделлю з параметрами S_0, u, m, d, r, якщо

$$S'_0 = S_0, \quad u' = \sqrt{u}, \quad r' = \sqrt{1+r} - 1, \quad d' = \sqrt{d}, \tag{2.7}$$

і для кожного $n \in \{1, \dots, N\}$ кінець n-го періоду біноміальної моделі збігається з кінцем $2n$-го періоду триноміальної моделі.

Нехай (S_0, u, m, d, r), (S_0', u', d', r') — N-періодна безарбітражна симетрична триноміальна цінова модель та асоційована з нею $2N$-періодна біноміальна цінова модель з безризиковими ймовірностями

$$\widetilde{p} = \frac{1 + r' - d'}{u' - d'}, \quad \widetilde{q} = \frac{u' - (1 + r')}{u' - d'}. \tag{2.8}$$

Зазначимо, що

$$\widetilde{p} + \widetilde{q} = 1, \quad \widetilde{p}u' + \widetilde{q}d' = 1 + r'. \tag{2.9}$$

Означення 2.3. Величини $\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3$, що визначаються формулами

$$\widetilde{p}_1 = \widetilde{p}^2, \quad \widetilde{p}_2 = 2\widetilde{p}\widetilde{q}, \quad \widetilde{p}_3 = \widetilde{q}^2, \tag{2.10}$$

називаються *безризиковими ймовірностями* (випадання H, M, T відповідно) у симетричній триноміальній ціновій моделі, а відповідна ймовірнісна міра $\widetilde{\mathbb{P}}$ — *безризиковою ймовірнісною мірою* в цій моделі.

З (2.7), (2.9) і (2.10) випливають рівності:

$$\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3 = 1, \quad \widetilde{p}_1 u + \widetilde{p}_2 m + \widetilde{p}_3 d = (1 + r')^2 = 1 + r. \tag{2.11}$$

Теорема 2.4. *Дисконтована ціна акції*

$$\frac{S_n}{(1 + r)^n}, \quad n = 0, \dots, N,$$

у симетричній триноміальній ціновій моделі є мартингалом відносно безризикової міри $\widetilde{\mathbb{P}}$, що визначається формулами (2.10).

Доведення. Покажемо, що

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n \left[\frac{S_{n+1}}{(1 + r)^{n+1}} \right] = \frac{S_n}{(1 + r)^n}, \quad n = 0, \dots, N - 1, \tag{2.12}$$

де $\widetilde{\mathbb{E}}_n$ позначає умовне математичне сподівання відносно безризикової міри $\widetilde{\mathbb{P}}$. Використовуючи означення та властивості умовного математичного сподівання, а також (2.11), отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbb{E}}_n \left[\tfrac{S_{n+1}}{1+r} \right] (\omega_1 \dots \omega_n) = \\
&= \tfrac{1}{1+r} \big(\widetilde{p}_1 S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \widetilde{p}_2 S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n M) + \widetilde{p}_3 S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T) \big) = \\
&\qquad = \tfrac{1}{1+r} (\widetilde{p}_1 u + \widetilde{p}_2 m + \widetilde{p}_3 d) S_n(\omega_1 \dots \omega_n) = S_n(\omega_1 \dots \omega_n).
\end{aligned}$$

Отже, (2.12) доведено. □

Нехай для довільного $n \in \{1, \ldots, N\}$ множини

$$\Omega_n = \{(\omega_1 \ldots \omega_n) \mid \omega_i \in \{H, M, T\}\}, \quad \Omega'_{2n} = \{(\omega'_1 \ldots \omega'_{2n}) \mid \omega'_i \in \{H', T'\}\}$$

позначають ймовірнісні простори симетричної n-періодної триноміальної та асоційованої з нею $2n$-періодної біноміальної моделей.

Означення 2.5. Відображення (сім'ю відображень) $\varphi : \Omega'_{2n} \to \Omega_n$, що визначається формулою:

$$\varphi(\omega'_1 \ldots \omega'_{2n}) = \left(\varphi(\omega'_1\omega'_2) \ldots \varphi(\omega'_{2n-1}\omega'_{2n})\right), \quad n = 1, \ldots, N,$$

де

$$\varphi(\omega'_1\omega'_2) = \begin{cases} H, & \omega'_1\omega'_2 = H'H', \\ M, & \omega'_1\omega'_2 \in \{H'T', T'H'\}, \\ T, & \omega'_1\omega'_2 = T'T', \end{cases}$$

будемо називати *відображенням асоціації.*

Теорема 2.6. *Нехай в N-періодній безарбітражній симетричній триноміальній ціновій моделі (N, S_0, u, m, d, r) з безризиковими ймовірностями (2.10) задано похідний цінний папір (дериватив) з функцією виплат*

$$V_N = V_N(\omega_1 \ldots \omega_N)$$

в момент часу N. Визначимо рекурсивно в порядку спадання послідовність випадкових величин $V_{N-1}, \ldots, V_0$:

$$V_n(\omega_1 \ldots \omega_n) =$$
$$= \frac{1}{1+r}[\widetilde{p}_1 V_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n H) + \widetilde{p}_2 V_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n M) + \widetilde{p}_3 V_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n T)],$$

$n = 0, \ldots, N-1$. *Нехай на ринку існує $2N$-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель $(2N, S'_0, u', d', r')$, асоційована з (N, S_0, u, m, d, r). Тоді V_0 — безарбітражна ціна деривативу в момент часу нуль.*

Доведення. Результат підкидання (звичайної) монети в $2N$-періодній біноміальній моделі в момент часу k позначимо $\omega'_k \in \{H', T'\}$. У біноміальній моделі розглянемо похідний цінний папір з функцією виплат V'_{2N}, що визначається рівністю:

$$V'_{2N}(\omega'_1 \ldots \omega'_{2N}) = V_N(\varphi(\omega'_1 \ldots \omega'_{2N})), \quad (\omega'_1 \ldots \omega'_{2N}) \in \Omega'_{2N}, \tag{2.13}$$

де φ — відображення асоціації.

Визначимо в цій моделі рекурсивно в порядку спадання набір випадкових величин $V'_{2N-1}, \dots, V'_0$:

$$V'_n(\omega'_1 \dots \omega'_n) = \frac{1}{1+r'}[\widetilde{p}\, V'_{n+1}(\omega'_1 \dots \omega'_n H') + \widetilde{q}\, V'_{n+1}(\omega'_1 \dots \omega'_n T')],$$

$n = 2N-1, \dots, 0$, а також портфельний процес $\Delta'_0, \dots, \Delta'_{2N-1}$:

$$\Delta'_n(\omega'_1 \dots \omega'_n) = \frac{V'_{n+1}(\omega'_1 \dots \omega'_n H') - V'_{n+1}(\omega'_1 \dots \omega'_n T')}{S'_{n+1}(\omega'_1 \dots \omega'_n H') - S'_{n+1}(\omega'_1 \dots \omega'_n T')},$$

$n = 0, \dots, 2N-1$, та процес поточного капіталу $X'_0, \dots, X'_{2N}$:

$$X'_0 = V'_0, \quad X'_{n+1} = \Delta'_n S'_{n+1} + (1+r')(X'_n - \Delta'_n S'_n), \; n = 0, \dots, 2N-1.$$

Застосовуючи теорему про реплікацію у мультиперіодній біноміальній ціновій моделі [1] до нашої $2N$-періодної біноміальної моделі, отримуємо:

(1) V'_0 — безарбітражна ціна в момент часу нуль деривативу з функцією виплат V'_{2N};

(2) $X'_n = V'_n, \; n = 0, \dots, 2N$.

Покажемо, що

$$V'_{2n}(\omega'_1 \dots \omega'_{2n}) = V_n\bigl(\varphi(\omega'_1 \dots \omega'_{2n})\bigr) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n), \; n = 0, \dots, N.$$

Доводимо спадною індукцією по n. Для N твердження випливає з (2.13). Обгрунтуємо це твердження для n у припущенні його справедливості для $n+1$. Використовуючи властивості умовного математичного сподівання і теорему про (поточну) ціну деривативу [1], маємо:

$$V'_{2n} = \widetilde{\mathbb{E}}'_{2n}\Bigl[\frac{V'_{2N}}{(1+r')^{2N-2n}}\Bigr] = \widetilde{\mathbb{E}}'_{2n}\Bigl[\widetilde{\mathbb{E}}'_{2(n+1)}\Bigl[\frac{V'_{2N}}{(1+r')^{2N-2(n+1)}}\Bigr]\frac{1}{(1+r')^2}\Bigr] =$$
$$= \widetilde{\mathbb{E}}'_{2n}\Bigl[\frac{V'_{2(n+1)}}{(1+r')^2}\Bigr], \; n = 0, \dots, N-1, \quad (2.14)$$

де $\widetilde{\mathbb{E}}'$ позначає математичне сподівання в $2N$-періодній біноміальній моделі відносно безризикової міри, що визначається рівностями (2.8).

З означення відображення асоціації, рівностей (2.10) і (2.14) та припущення індукції отримуємо:

$$\begin{aligned}
V'_{2n}(\omega'_1\dots\omega'_{2n}) &= \frac{1}{(1+r')^2}\big[\widetilde{p}^2\, V'_{2(n+1)}(\omega'_1\dots\omega'_{2n}H'H')+\\
&+\widetilde{p}\,\widetilde{q}\,V'_{2(n+1)}(\omega'_1\dots\omega'_{2n}H'T')+\widetilde{q}\,\widetilde{p}\,V'_{2(n+1)}(\omega'_1\dots\omega'_{2n}T'H')+\\
&+\widetilde{q}^2\,V'_{2(n+1)}(\omega'_1\dots\omega'_{2n}T'T')\big]=\frac{1}{1+r}[\widetilde{p}_1V_{n+1}(\varphi(\omega'_1\dots\omega'_{2n}H'H'))+\\
&+\frac{\widetilde{p}_2}{2}V_{n+1}(\varphi(\omega'_1\dots\omega'_{3n}H'T'))+\frac{\widetilde{p}_2}{2}V_{n+1}(\varphi(\omega'_1\dots\omega'_{2n}T'H'))+\\
&+\frac{\widetilde{p}_2}{2}V_{n+1}(\varphi(\omega'_1\dots\omega'_{3n}H'T'))++\widetilde{p}_3V_{n+1}(\varphi(\omega'_1\dots\omega'_{3n}T'T'))]=\\
&=\frac{1}{1+r}[\widetilde{p}_1V_{n+1}(\omega_1\dots\omega_nH)+\widetilde{p}_2V_{n+1}(\omega_1\dots\omega_nM)+\\
&+\widetilde{p}_3V_{n+1}(\omega_1\dots\omega_nT)]=V_n(\omega_1\dots\omega_n).
\end{aligned}$$

Зокрема $V'_0=V_0$, що завершує доведення теореми. □

3. Безарбітражна ціна деривативу в загальній мультиперіодній триноміальній моделі

Розглянемо загальну N-періодну триноміальну модель. Нехай

$$V_N=V_N(\omega)=V_N(\omega_1\dots\omega_N),\quad \omega_i\in\{H,M,T\},$$

позначає функцію виплат (випадкову величину) за деяким деривативом. Мета подальшого дослідження — оцінити безарбітражну ціну V_0 такого цінного паперу, використовуючи підхід Пліски ([4])

Нехай $X_0,\dots,X_N$ позначає *процес поточного капіталу* інвестора, де X_0 — початковий капітал, $X_n=X_n(\omega_1\dots\omega_n)$ — поточний капітал в момент часу $n\in\{0,1,\dots,N\}$. Протягом кожного періоду $n\in\{0,1,\dots,N-1\}$ інвестор володіє $\Delta_n=\Delta_n(\omega_1\dots\omega_n)$ акціями. Тоді процес поточного капіталу задовільняє *рівняння поточного капіталу*

$$X_{n+1}=S_{n+1}\Delta_n+(1+r)(X_n-S_n\Delta_n),\quad n=0,\dots,N-1, \tag{3.15}$$

де $S_n=S_n(\omega_1\dots\omega_n)$ позначає ціну однієї акції в момент часу n.

Набір $\Delta=\{\Delta_0,\dots,\Delta_{N-1}\}$, а також пару (X_0,Δ), будемо називати *торговельною стратегією*. Позначимо

$$S^*_n=\frac{S_n}{(1+r)^n},\quad X^*_n=\frac{X_n}{(1+r)^n},\quad n=0,\dots,N; \tag{3.16}$$

$$\delta S^*_{n+1}=S^*_{n+1}-S^*_n,\quad n=0,\dots,N-1. \tag{3.17}$$

Використовуючи ці позначення, рівняння (3.15) переписується так

$$X^*_{n+1} = X^*_n + \Delta_n \delta S^*_{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Позначимо

$$G^*_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \Delta_i \delta S^*_{i+1}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Тоді

$$X^*_{n+1} = X^*_0 + \sum_{i=0}^{n} \Delta_i \delta S^*_{i+1} = X^*_0 + G^*_{n+1} = X_0 + G^*_{n+1} \tag{3.18}$$

для $n = 0, \dots, N-1$.

Означення 3.1. Торговельна стратегія (X_0, Δ) називається *арбітражною*, якщо

$$X^*_0 = 0, \quad X^*_N \ge 0, \quad \mathbb{E}X^*_N > 0. \tag{3.19}$$

Згідно з (3.16), (3.17) і (3.18) умова (3.19) еквівалентна кожній з двох умов (3.20) і (3.21):

$$X_0 = 0, \quad X_N \ge 0, \quad \mathbb{E}X_N > 0; \tag{3.20}$$

$$G^*_N \ge 0, \quad \mathbb{E}G^*_N > 0. \tag{3.21}$$

Означення 3.2. Ймовірнісна міра $\widetilde{\mathbb{P}}$ називається *безризиковою*, якщо

(1) $\widetilde{\mathbb{P}}(\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \Omega$;

(2) S^*_n — мартингал, тобто

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[S^*_m] = S^*_n, \quad 0 \le n \le m \le N, \tag{3.22}$$

де $\widetilde{\mathbb{E}}_n[S^*_m]$ позначає умовне математичне сподівання S^*_m в момент часу n.

Нехай $\mathcal{M}$ — множина всіх безризикових мір в триноміальній моделі.

Теорема 3.3. *Множина $\mathcal{M} \neq \varnothing$ тоді і лише тоді, коли $d < 1 + r < u$.*

Доведення. Спершу зазначимо, що $\mathcal{M} \neq \varnothing$ тоді й лише тоді, коли існує розв'язок задачі

$$\begin{cases} \widetilde{p}_1 u + \widetilde{p}_2 m + \widetilde{p}_3 d = 1 + r, \\ \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3 = 1, \\ \widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3 > 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Це випливає з такої низки рівностей та умови (3.22) (означення 3.2):

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[S^*_{n+1}](\omega_1 \dots \omega_n) = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{n+1}}{(1+r)^{n+1}}\right](\omega_1 \dots \omega_n) =$$
$$= \frac{1}{(1+r)^{n+1}}\widetilde{\mathbb{E}}[S_{n+1}](\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}}\big[\widetilde{p}_1 S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) +$$
$$+ \widetilde{p}_2 S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n M) + \widetilde{p}_3 S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)\big] =$$
$$= \frac{\widetilde{p}_1 u + \widetilde{p}_2 m + \widetilde{p}_3 d}{(1+r)^{n+1}}\, S_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{\widetilde{p}_1 u + \widetilde{p}_2 m + \widetilde{p}_3 d}{1+r}\, S^*_n(\omega_1 \dots \omega_n).$$

($\Rightarrow$) Нехай $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Тоді з (3.23) отримуємо:

$$1 + r = \widetilde{p}_1 u + \widetilde{p}_2 m + \widetilde{p}_3 d < u(\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3) = u;$$
$$1 + r = \widetilde{p}_1 u + \widetilde{p}_2 m + \widetilde{p}_3 d > d(\widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3) = d.$$

($\Leftarrow$) Нехай $d < 1 + r < u$. Відразу зазначимо, що тоді

$$0 < \frac{(1+r) - m}{u - m} < \frac{(1+r) - d}{u - d} < 1. \tag{3.24}$$

Позначимо $\widetilde{p}_1 = \alpha$. З перших двох рівнянь (3.23) маємо:

$$\widetilde{p}_2 = \frac{(1+r) - d}{m - d} - \alpha\, \frac{u - d}{m - d}, \qquad \widetilde{p}_3 = \frac{(1+r) - d}{d - m} - \alpha\, \frac{u - m}{d - m}.$$

Звідси зокрема отримуємо:

$$\widetilde{p}_2 > 0 \iff \alpha < \frac{(1+r) - d}{u - d}; \qquad \widetilde{p}_3 > 0 \iff \alpha > \frac{(1+r) - m}{u - m}.$$

Отже,

$$\widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3 > 0, \quad \forall \alpha \in \left(\frac{(1+r) - m}{u - m}, \frac{(1+r) - d}{u - d}\right)$$

Враховуючи (3.24), маємо: $\mathcal{M} \neq \varnothing$. □

Означення 3.4. Статок (капітал) X називається *досяжним*, якщо існує торговельна стратегія (X_0, Δ), для якої $X_N(\omega) = X(\omega)$ для усіх $\omega \in \Omega$.

Нехай $\mathcal{X}$ позначає множину всіх досяжних статків, $\mathcal{X}(X_0)$ — множину всіх досяжних статків з початковим капіталом X_0.

Теорема 3.5 (Про властивості досяжних статків і безризикових ймовірнісних мір). *Нехай* $X \in \mathcal{X}$, $\widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}$. *Тоді:*

$$\widetilde{\mathbb{E}}_n[\delta S^*_m] = 0, \quad 0 \le n \le m \le N; \tag{3.25}$$
$$\widetilde{\mathbb{E}}[G^*_n] = 0, \quad n = 1, \dots, N. \tag{3.26}$$

Доведення. Рівність (3.25) випливає з (3.22). Рівність (3.26) є наслідком (3.25). □

Наслідок 3.6. *Нехай* $X \in \mathcal{X}(X_0)$, $X^* = X/(1+r)^N$. *Тоді*

$$\forall \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M} \quad \widetilde{\mathbb{E}}\big[X^*\big] = X_0^* = X_0.$$

Доведення. Виберемо торговельну стратегію $\Delta = \{\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}\}$ для якої $X_N(\omega) = X(\omega)$ для усіх $\omega \in \Omega$. Тоді $X^* = X_N^* = X_0^* + G_N^*$. Використовуючи (3.26), маємо $\widetilde{\mathbb{E}}[X^*] = \widetilde{\mathbb{E}}[X_0^* + G_N^*] = \widetilde{\mathbb{E}}[X_0^*] = X_0^*$. □

Наслідок 3.7. *Якщо* $\mathcal{M} \neq \varnothing$, *то триноміальна модель не має арбітражних стратегій.*

Доведення. Нехай $\widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}$, (X_0, Δ) — деяка арбітражна стратегія. З означення 3.1 отримуємо: $X_0^* = 0$, $X_N^* \geq 0$, $\mathbb{E}X_N^* > 0$. Отже,

$$(\forall \omega \in \Omega \quad X_N^*(\omega) \geq 0) \wedge (\exists \omega \in \Omega : \; X_N^*(\omega) > 0).$$

Звідси випливає, що $\widetilde{\mathbb{E}}X_N^* > 0$, оскільки $\forall \omega \in \Omega \;\; \mathbb{P}(\omega) > 0$. Але тоді з наслідку 3.6 приходимо до суперечності: $0 < \widetilde{\mathbb{E}}X_N^* = X_0^* = 0$. □

Ймовірнісний простір Ω N-періодної триноміальної цінової моделі скінченний і містить рівно 3^N елементів. Занумеруємо їх у довільному порядку $\omega^1, \dots, \omega^{3^N}$. Ототожнюючи випадкову величину X з вектором

$$\big(X(\omega^1), \dots, X(\omega^{3^N})\big) \in \mathbf{R}^{3^N},$$

отримуємо ізоморфізм простору всіх випадкових величин в Ω на арифметичний простір $\mathbf{R}^{3^N}$. Нехай

$$\xi = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^{3^N}.$$

Тоді стала випадкова величина λ відповідає вектору $\lambda\xi$. А кінцевий статок торговельної стратегії $\Delta = \{0, \dots, 0\}$ з початковим капіталом λ відповідає вектору $\lambda(1+r)^N\xi$. Якщо його дисконтувати на момент часу 0, отримаємо вектор $\lambda\xi$. Позначимо

$$\mathcal{W} = \{X \in \mathbb{R}^{3^N} : \; X = G_N^*\}, \;\; \text{де} \;\; G_N^* = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta_i \delta S_{i+1}^*$$

для деякої торговельної стратегії Δ. Отже, $\mathcal{W}$ — це множина випадкових величин, що складається з дисконтованих (на момент часу 0) кінцевих (на момент часу N) статків торговельної стратегії $(0, \Delta)$. Тобто

$$\mathcal{W} = \{X^* \in \mathbf{R}^{3^N} : \; X \in \mathcal{X}(0)\}.$$

З іншого боку, $\mathcal{W}$ — це підпростір простору $\mathbf{R}^{3^N}$, оскільки, по-перше, лінійна комбінація торговельних стратегій з нульовим початковим капіталом знову є торговельною стратегією з нульовим початковим капіталом, і по-друге, G_n^* лінійна відносно Δ. Нехай $\mathcal{A} = \{X \in \mathbb{R}^{3^N}:\ X \geqslant 0 \wedge X \neq 0\}$ позначає множину всіх невід'ємних статків. Очевидно, що арбітражна стратегія існує тоді й лише тоді, коли $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ стандартний скалярний добуток в $\mathbf{R}^{3^N}$:

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{3^N} X_i Y_i, \quad X, Y \in \mathbb{R}^{3^N}.$$

Тоді $\mathcal{W}^\perp = \{Y \in \mathbf{R}^{3^N}:\ \langle X, Y\rangle = 0\ \ \forall X \in \mathcal{W}\}$. Множина всіх ймовірнісних мір на Ω має вигляд:

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathcal{A}\colon\ \langle X, \xi\rangle = \sum_{i=1}^{3^N} X_i = 1\}.$$

Отже, для довільної випадкової величини Y (згідно з нашим ототожненням) $\mathbb{E}Y = \langle \mathbb{P}, Y\rangle$, $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$. Позначимо

$$\mathcal{P}^+ = \{X \in \mathcal{P}\colon\ X_i > 0,\ \ i = 1, \ldots, 3^N\}.$$

Тоді $\mathcal{W}^\perp \cap \mathcal{P}^+ = \mathcal{M}$. Нехай $\mathcal{M} \neq \varnothing$. Тоді у $\mathcal{W}^\perp$ можна вибрати базу векторів $e_1, \ldots, e_J$, всі координати яких — додатні. Використовуючи її, будуємо базу векторів у $\mathcal{W}^\perp$, що складається зі строго додатніх лінійних цінових мір:

$$Q_j = \frac{e_j}{\langle e_j, \xi\rangle} \in \mathcal{W}^\perp \cap \mathcal{P}^+, \quad j = 1, \ldots, J.$$

Нехай $Y, Z \in \mathcal{X}(\lambda)$. Тоді $Y - Z \in \mathcal{X}(0)$. Отже, $Y^* - Z^* \in \mathcal{W}$. Зокрема, $Y^* - \lambda\xi \in \mathcal{W}$, що еквівалентне умові $Y^* - \lambda\xi \perp \mathcal{W}^\perp$, тобто

$$0 = \langle Y^* - \lambda\xi, Q_j\rangle = \langle Y^*, Q_j\rangle - \lambda\langle \xi, Q_j\rangle = \langle Y^*, Q_j\rangle - \lambda\,, \quad j = 1, \ldots, J.$$

Отже, доведено, що

$$Y \in \mathcal{X}(\lambda) \iff \lambda = \langle Y^*, Q_j\rangle, \quad j = 1, \ldots, J. \tag{3.27}$$

Теорема 3.8. *Нехай $X \in \mathcal{X}$, $\widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}$. Якщо функція виплат V_N за деривативом задовольняє рівність $V_N(\omega) = X(\omega)$ для усіх $\omega \in \Omega$, то величина*

$$X_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{X}{(1+r)^N}\Big] = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{V_N}{(1+r)^N}\Big] \tag{3.28}$$

є безарбітражною ціною цього цінного паперу.

Доведення. Нехай V_0 — безарбітражна ціна деривативу. За означенням досяжного статку існує така торговельна стратегія (X_0, Δ), для якої

$$X_N(\omega) = X(\omega) = V_N(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{3.29}$$

Зауваження 3.9. X_0 визначається однозначно рівністю (3.28).

Випливає з наслідку 3.6 теореми про властивості досяжних статків і безризикових ймовірнісних мір.

Зауваження 3.10. Якщо $V_0 > X_0$, то існує арбітраж.

Розглянемо інвестора, що продає в момент часу 0 дериватив з функцією виплат V_N за ціною V_0, діє згідно з торговельною стратегією (X_0, Δ) та кладе додатній грошовий залишок $V_0 - X_0 > 0$ в банк під безризикову відсоткову ставку r. У момент виконання угоди (виплат) за деривативом інвестор згідно з рівністю (3.29) буде платоспроможним і крім того матиме прибуток $(V_0 - X_0)(1+r)^N > 0$.

Зауваження 3.11. Якщо $V_0 < X_0$, то існує арбітраж.

Спершу зазначимо, що згідно з рівнянням поточного капіталу для дзеркальної стратегії $(-X_0, \{-\Delta_1, \ldots, -\Delta_{N-1}\})$, кінцевий статок становитиме $-X_N = -X = -V_N$. Отже, для стратегії $(0, \{-\Delta_1, \ldots, -\Delta_{N-1}\})$, статок у момент часу N становитиме $X_0(1+r)^N - X_N$. Це твердження можна отримати аналітично: якщо до кожного рівняння поточного капіталу

$$-X_{n+1} = -\Delta_n S_{n+1} + (1+r)[-X_n + \Delta_n S_n], \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

торговельної стратегії $(-X_0, \{-\Delta_1, \ldots, -\Delta_{N-1}\})$, додати до обох частин рівності вираз $X_0(1+r)^{n+1}$, то перше рівняння $(n = 0)$ поточного капіталу відповідатиме торговельній стратегії з нульовим поточним капіталом, а останнє $(n = N-1)$ в лівій частині матиме вираз (поточний капітал в момент часу N)

$$X_0(1+r)^N - X_N. \tag{3.30}$$

Отож розглянемо інвестора, що позичає в банку суму X_0, купує за V_0 дериватив з функцією виплат V_N і кладе в банк під безризикову відсоткову ставку r додатню суму $X_0 - V_0 > 0$. В момент часу N після отриманої за деривативом суми V_N він згідно з (3.30) матиме на руках суму $X_0(1+r)^N$, яку він віддасть банку, але при цьому матиме прибуток $(X_0 - V_0)(1+r)^N > 0$. □

Як випливає з попередньої теореми, безарбітражна ціна деривативу, виплати за яким є досяжним статком, визначається однозначно рівністю

$$X_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{V_N}{(1+r)^N}\Big].$$

Розглянемо тепер випадок, коли виплату $X = V_N$ неможливо досягти жодною торговельною стратегією (X_0, Δ), тобто $X \notin \mathcal{X}$. Спершу покажемо, що

$$\{Y \in \mathcal{X}\colon\ Y \geq X\} \neq \varnothing. \tag{3.31}$$

Для цього досить розглянути торговельну стратегію (Y_0, Δ) :

$$Y_0 \geq \max_{\omega\in\Omega} \frac{X(\omega)}{(1+r)^N}, \quad \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_{N-1}) = (0, \dots, 0),$$

яка породжує досяжний статок $Y_0(1+r)^N \geq X$. Нехай

$$Y \in \mathcal{X}, \quad Y \geq X.$$

Оскільки

$$\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big] \geq \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{X}{(1+r)^N}\Big], \quad \forall\, \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}, \tag{3.32}$$

і величина ліворуч не залежить від вибору безризикової міри $\widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}$, то множина

$$\Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{X}{(1+r)^N}\Big]\colon\ \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}\Big\}$$

обмежена зверху. Отже,

$$\exists \sup \Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{X}{(1+r)^N}\Big]\colon\ \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}\Big\} \in \mathbf{R}. \tag{3.33}$$

З (3.31) і (3.32) тоді випливає, що непорожня множина

$$\Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big]\colon\ Y \in \mathcal{X},\ Y \geq X\Big\}$$

обмежена знизу числом (3.33). Отже,

$$\exists \inf \Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big]\colon\ Y \in \mathcal{X},\ Y \geq X\Big\} \geq \sup \Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{X}{(1+r)^N}\Big]\colon\ \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}\Big\}.$$

Аналогічно обгрунтовується існування величин та нерівність:

$$\sup \Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big]\colon\ Y \in \mathcal{X},\ Y \leq X\Big\} \leq \inf \Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{X}{(1+r)^N}\Big]\colon\ \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}\Big\}.$$

Отже, доведено коректність (незалежність від $\widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}$) та існування (скінченність) величин:

$$V_+(X) = \inf \Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big]\colon\ Y \geq X \wedge Y \in \mathcal{X}\Big\}, \quad \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}; \tag{3.34}$$

$$V_-(X) = \sup \Big\{\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big]\colon\ Y \leq X \wedge Y \in \mathcal{X}\Big\}, \quad \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M}. \tag{3.35}$$

Теорема 3.12. *Нехай X — недосяжний рівень статку в триноміальній моделі, $X \notin \mathcal{X}$. Якщо функція виплат V_N за деривативом задовольняє рівність $V_N(\omega) = X(\omega)$ для усіх $\omega \in \Omega$, то безарбітражна ціна цього цінного паперу $V_0 \in [V_-(X), V_+(X)]$, де величини $V_+(X), V_-(X)$ визначаються рівностями (3.34), (3.35).*

Доведення. Нехай V_0 — безарбітражна ціна деривативу.

Зауваження 3.13. Якщо $V_0 > V_+(X)$, то існує арбітраж.

З означення $V_+(X)$ випливає, що

$$\exists Y \in \mathcal{X}: \quad V_0 > \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big] \geq V_+(X).$$

Крім того, існує торговельна стратегія $(Y_0, \{\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}\})$, для якої

$$Y_N(\omega) = Y(\omega) \geq X(\omega) = V_N(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{3.36}$$

Зазначимо, що

$$Y_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big] < V_0.$$

Розглянемо інвестора, що продає дериватив з функцією виплат V_N за ціною V_0, діє згідно з торговельною стратегією $(Y_0, \{\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}\})$ і початковим статком та кладе додатній грошовий залишок $V_0 - Y_0 > 0$ в банк під безризикову відсоткову ставку r. Згідно з (3.36) в момент виконання деривативу інвестор матиме капітал, достатній для здійснення виплат, і крім того матиме прибуток

$$(V_0 - Y_0)(1+r)^N = \Big(V_0 - \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big]\Big)(1+r)^N > 0.$$

Зауваження 3.14. Якщо $V_0 < V_-(X)$, то існує арбітраж.

З означення $V_-(X)$ випливає, що

$$\exists Y \in \mathcal{X}: \quad V_0 < \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big] \leq V_-(X).$$

Крім того існує торговельна стратегія $(Y_0, \{\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}\})$, для якої

$$Y_N(\omega) = Y(\omega) \leq X(\omega) = V_N(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{3.37}$$

Зазначимо, що

$$Y_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big] > V_0.$$

Розглянемо інвестора, що позичає в банку суму Y_0, купує дериватив з функцією виплат V_N за ціною V_0, кладе додатній грошовий залишок $Y_0 - V_0 > 0$ в банк під безризикову відсоткову ставку r, і діє згідно із дзеркальною торговельною стратегією $(0, \{-\Delta_0, \ldots, -\Delta_{N-1}\})$. У момент виконання деривативу інвестор матиме на руках капітал $Y_0(1+r)^N - Y_N$. Після отриманих виплат за деривативом та повернення в банк суми $Y_0(1+r)^N$ внаслідок (3.37) в нього залишиться невід'ємна сума

$$(Y_0(1+r)^N - Y_N) - Y_0(1+r)^N + V_N \ge 0,$$

і крім того він матиме прибуток

$$(Y_0 - V_0)(1+r)^N = \Big(\widetilde{\mathbb{E}}\Big[\frac{Y}{(1+r)^N}\Big] - V_0\Big)\big(1+r\big)^N > 0.$$

$\square$

Використовуючи рівності (3.27), запишемо задачу лінійного програмування, розв'язком якої є $V_+(X)$:

$$\lambda \to \min, \tag{3.38}$$

$$Y^* \ge X^*,\ \lambda - \langle Y^*, Q_j \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, J,\ \lambda \in \mathbf{R},\ Y^* \in \mathbf{R}^{3^N}. \tag{3.39}$$

Розглянемо вектори $a = (1, 0, \ldots, 0)$, $y = (\lambda, Y^*) \in \mathbf{R}^{1+3^N}$ і матрицю розміраи $(1+3^N) \times J$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -Q_1 & \cdots & -Q_J \end{pmatrix}.$$

Тоді задачу (3.38),(3.39) можна переписати так:

$$\langle a, y \rangle \to \min, \tag{3.40}$$

$$B^T y = 0, \quad Y^* \ge X^*, \quad y \in \mathbf{R}^{1+3^N}. \tag{3.41}$$

Розглянемо вектори

$$x = (\theta, \psi) = (\theta_1, \ldots, \theta_J, \psi_1, \ldots, \psi_{3^N}), \quad c = (0, \ldots, 0, X^*) \in \mathbf{R}^{J+3^N}.$$

Тоді задача лінійного програмування, дуальна до задачі (3.40), (3.41) має вигляд:

$$\langle c, x \rangle \to \max, \tag{3.42}$$

$$Bx \le a, \quad \psi \ge 0. \tag{3.43}$$

Переходячи до змінних X^*, θ, ψ, задачу (3.42),(3.43) переписуємо так:

$$\sum_{i=1}^{3^N} X_i^* \psi_i = \sum_{i=1}^{3^N} \frac{X_i}{(1+r)^N} \psi_i \to \max, \tag{3.44}$$

$$\sum_{j=1}^{J} \theta_j \le 1, \quad 0 \le \psi \le \sum_{j=1}^{J} \theta_j Q_j. \tag{3.45}$$

Якщо $V_+(X) > 0$ (що природньо), то задача (3.44),(3.45) еквівалентна задачі (3.44),(3.46), де

$$\sum_{j=1}^{J} \theta_j = 1, \quad 0 \le \psi = \sum_{j=1}^{J} \theta_j Q_j. \tag{3.46}$$

Оскільки внаслідок (3.46)

$$\psi \in \mathcal{W}^{\perp}, \quad \psi \ge 0, \quad \langle \psi, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{J} \theta_j \langle Q_j, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{J} \theta_j = 1,$$

то ψ — лінійна цінова міра, $\psi \in \overline{\mathcal{M}}$. Отже, оптимальний розв'язок $V_+(X)$ задачі (3.44),(3.46) дорівнює

$$V_+(X) = \sup \Big\{ \widetilde{\mathbb{E}} \Big[\frac{X}{(1+r)^N} \Big] : \ \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M} \Big\}. \tag{3.47}$$

Аналогічно можна показати, що

$$V_-(X) = \inf \Big\{ \widetilde{\mathbb{E}} \Big[\frac{X}{(1+r)^N} \Big] : \ \widetilde{\mathbb{P}} \in \mathcal{M} \Big\}. \tag{3.48}$$

Отже, доведено теорему:

Теорема 3.15. *Нехай $\mathcal{M} \ne \varnothing$, X — довільний статок, і нехай задано дериватив з функцією виплат V_N, яка задовольняє рівність $V_N(\omega) = X(\omega)$ для усіх $\omega \in \Omega$. Тоді безарбітражна ціна цього цінного паперу $V_0 \in [V_-(X), V_+(X)]$, де величини $V_+(X), V_-(X)$ визначаються рівностями (3.47) і (3.48).*

Приклад 3.16 (застосування формул теорем 3.12 та 3.15)**.** Розглянемо симетричну одноперіодну триноміальну модель з параметрами

$$S_0 = 4, \quad u = 4, \quad d = \frac{1}{4}, \quad r = \frac{9}{16}.$$

Тоді

$$S_1(H) = 16, \quad S_1(M) = 4, \quad S_1(T) = 1.$$

Нехай виплати за двома деривативами в кінці періоду становлять:

$$V_1(H) = 10, \quad V_1(M) = 3, \quad V_1(T) = 4; \tag{3.49}$$

$$V_1(H) = 8, \quad V_1(M) = 6, \quad V_1(T) = 2. \tag{3.50}$$

Розв'язок: Спершу застосуємо теорему 3.12.

$$S_0 = S_0^* = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix}16\\4\\1\end{pmatrix}, \quad S_1^* = \frac{16}{25}\begin{pmatrix}16\\4\\1\end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо:

$$\delta S_1^* = S_1^* - S_0^* = \frac{4}{25}\begin{pmatrix}39\\-9\\-21\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$Y \in \mathcal{X} \iff Y^* = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \Delta\frac{4}{25}\begin{pmatrix}39\\-9\\-21\end{pmatrix}, \quad \Delta \in \mathbf{R}.$$

Розглянемо дериватив (3.49). Тоді $V_+(X)$ є розв'язком задачі

$$\lambda \to \min, \quad \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \Delta\frac{4}{25}\begin{pmatrix}39\\-9\\-21\end{pmatrix} \geq \frac{16}{25}\begin{pmatrix}10\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases}\lambda + \Delta\frac{4}{25}39 = \frac{16}{25}10\\[2ex] \lambda - \Delta\frac{4}{25}21 = \frac{16}{25}4\end{cases} \Longrightarrow \lambda = \frac{16}{25\cdot 60}\,(21\cdot 10 + 4\cdot 39) = 3,904.$$

Відповідно $V_-(X)$ є розв'язком задачі

$$\lambda \to \max, \quad \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \Delta\frac{4}{25}\begin{pmatrix}39\\-9\\-21\end{pmatrix} \leq \frac{16}{25}\begin{pmatrix}10\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases}\lambda + \Delta\frac{4}{25}39 = \frac{16}{25}10\\[2ex] \lambda - \Delta\frac{4}{25}9 = \frac{16}{25}3\end{cases} \Longrightarrow \lambda = \frac{16}{25\cdot 48}\,(9\cdot 10 + 3\cdot 39) = 2,76.$$

Отже, для деривативу (3.49) маємо інтервал $(2,76; 3,904)$.

Застосуємо тепер теорему 3.12. Вектор (p_1, p_2, p_3) є безризиковою мірою тоді й лише тоді, коли

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbb{E}}[S_1^*] = S_0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{16}{25}(16p_1 + 4p_2 + p_3) = 4 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \iff$$
$$p_1 = \lambda, \quad p_2 = \tfrac{7}{4} - 5\lambda, \quad p_3 = 4\lambda - \tfrac{3}{4}, \quad \lambda \in \left(\tfrac{3}{16}, \tfrac{7}{20}\right).$$

Отже,

$$\widetilde{\mathbb{E}}X = \tfrac{16}{25}\left[10\lambda + 3\left(\tfrac{7}{4} - 5\lambda\right) + 4\left(4\lambda - \tfrac{3}{4}\right)\right] = \tfrac{16}{25}\left[11\lambda + \tfrac{9}{4}\right],$$

і $V_\pm(X)$ є розв'язком задач

$$\tfrac{16}{25}\left[11\lambda + \tfrac{9}{4}\right] \to \max(\min), \quad \lambda \in \left(\tfrac{3}{16}, \tfrac{7}{20}\right).$$

Звідси отримуємо

$$V_+(X) = \tfrac{16}{25}\left(\tfrac{77}{20} + \tfrac{9}{4}\right) = 3,904, \quad V_-(X) = \tfrac{16}{25}\left(\tfrac{33}{16} + \tfrac{9}{4}\right) = 2,76.$$

Отже, і в цьому випадку маємо інтервал $(2,76; 3,904)$.

Розглянемо тепер дериватив (3.50). Згідно з теоремою 3.15 $V_+(X)$ є розв'язком задачі

$$\lambda \to \min, \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 39 \\ -9 \\ -21 \end{pmatrix} \geq \frac{16}{25} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda + \Delta \frac{4}{25} 39 = \frac{16}{25} 8 \\ \\ \lambda - \Delta \frac{4}{25} 21 = \frac{16}{25} 6 \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \frac{16}{25 \cdot 48}(9 \cdot 8 + 6 \cdot 39) = 4,08.$$

Відповідно $V_-(X)$ є розв'язком задачі

$$\lambda \to \max, \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 39 \\ -9 \\ -21 \end{pmatrix} \leq \frac{16}{25} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Шуканий розв'язок знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda + \Delta \frac{4}{25} 39 = \frac{16}{25} 8 \\ \\ \lambda - \Delta \frac{4}{25} 21 = \frac{16}{25} 2 \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \frac{16}{25 \cdot 60}(21 \cdot 8 + 2 \cdot 39) = 2,624.$$

Отже, для деривативу (3.50) маємо інтервал $(2,624; 4,08)$.

Застосуємо тепер теорему 3.12.

$$\widetilde{\mathbb{E}}X = \tfrac{16}{25}\left[8\lambda + 6\left(\tfrac{7}{4} - 5\lambda\right) + 2\left(4\lambda - \tfrac{3}{4}\right)\right] = \tfrac{16}{25}\left[9 - 14\lambda\right],$$

і $V_{\pm}(X)$ є розв'язком задач

$$\tfrac{16}{25}\left[9 - 14\lambda\right] \to \max(\min), \quad \lambda \in \left(\tfrac{3}{16}, \tfrac{7}{20}\right).$$

Звідси отримуємо

$$V_{+}(X) = \tfrac{16}{25}\left(9 - \tfrac{21}{8}\right) = 4,08, \quad V_{-}(X) = \tfrac{16}{25}\left(9 - \tfrac{49}{10}\right) = 2,624.$$

Отже, і в цьому випадку маємо інтервал $(2,624; 4,08)$.

Нехай на ринку також присутня (асоційована) 2-періодна біноміальна модель з параметрами

$$u = 2, \quad d = \tfrac{1}{2}, \quad r = \sqrt{1 + \tfrac{9}{16}} - 1 = \tfrac{1}{4}, \quad S_0 = 4.$$

Позначимо

$$\widetilde{p}_1 = \left(\frac{u - (1+r)}{u-d}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \widetilde{p}_3 = \left(\frac{(1+r) - d}{u-d}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \widetilde{p}_2 = \frac{1}{2}.$$

Тоді вартості деривативів (3.49) та (3.50) відповідно дорівнюють:

$$\widetilde{\mathbb{E}}X^* = \tfrac{16}{25}\left(\tfrac{1}{4}\cdot 10 + \tfrac{1}{2}\cdot 3 + \tfrac{1}{4}\cdot 4\right) = 3,2 \in (2,76; 3,904);$$
$$\widetilde{\mathbb{E}}X^* = \tfrac{16}{25}\left(\tfrac{1}{4}\cdot 8 + \tfrac{1}{2}\cdot 6 + \tfrac{1}{4}\cdot 2\right) = 3,52 \in (2,624; 4,08).$$

$\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I*, Springer, 2004.
2. P. Billingsley, *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, 1986.
3. J. Hull, *Optiones, Futures and Other Derivatives*, Pearson Prentice Hall, 2006.
4. S.R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models*, Blackwell Publ., 1997.

Надійшло 22.06.2014

Після переробки 25.12.2015