Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2014. — Т.11

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2014. — V.11

ПРО БЕЗАРБІТРАЖНУ ЦІНУ ДЕРИВАТИВУ В ОДНОПЕРІОДНІЙ ТРИНОМІАЛЬНІЙ МОДЕЛІ

Сергій Підкуйко[1], Микола Баб'як[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, Львів, 79000

[2]*Center for Economic Research and Graduate Education – Economics Institute,*
P.O. Box 882, Politických vězňů 936/7, 110 00 Praha 1, Czech Republic

С. Підкуйко, М. Баб'як. *Про безарбітражну ціну деривативу в одноперіодній триноміальній моделі* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2014. — Т.11. — С. 88–95.

Розглядається триноміальна одноперіодна цінова модель. Вводиться поняття безарбітражної триноміальної цінової моделі. Для цієї моделі доведено критерій та знайдено оцінку безарбітражної ціни деривативу.

S. Pidkuyko, M. Babiak, *On no-arbitrage price of derivative in one-period trinomial model*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **11** (2014), 88–95.

One-period trinomial asset-pricing model is considered. The no-arbitrage trinomial asset-pricing model is defined. For this model the criterion of no-arbitrage price of a derivative security is derived and the estimation of no-arbitrage price is obtained.

Вступ

За останні 30 років основним інструментом у галузі фінансів стали цінні папери (деривативи). Ф'ючерсами та опціонами торгують на багатьох біржах світу. Різноманітні типи форвардних контрактів, свопів, опціонів та деривативів використовуються на позабіржовому ринку. Отже, первинного, вирішального значення набуває правильна оцінка вартості деривативу.

Відомо, що для загальної біноміальної моделі вартість деривативу знаходиться однозначно (Shreve S. [1], Hull J. [2]). Цю роботу присвячено проблемі

2010 *Mathematics Subject Classification:* 91B28 *УДК:* 517.9

Ключові слова і фрази: безарбітражна триноміальна цінова модель, дериватив, безарбітражна ціна деривативу, ймовірнісний простір.

E-mail: pidkuyko@gmail.com, mykola.babyak@gmail.com

знаходження вартості деривативу в триноміальній ціновій моделі. Вводиться поняття безарбітражної триноміальної цінової моделі. Для цієї моделі доведено критерій та знайдено оцінку безарбітражної ціни деривативу.

1. Одноперіодна триноміальна цінова модель

Загальна одноперіодна триноміальна модель визначається так. На початку періоду, в момент часу 0, ціна акції відома й дорівнює S_0. У кінці періоду, в момент часу 1, підкидається *тригранна* монета, грані якої H, M, T випадають з ймовірностями p_1, p_2, p_3. Ціна акції в момент часу 1 є випадковою величиною, позначається S_1, і залежно від результату підкидання монети набуває три значення $S_1(H), S_1(M), S_1(T)$, що задовільняють нерівності:

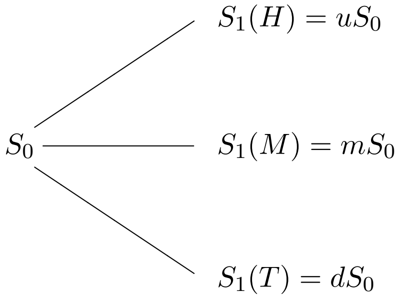
$$0 < S_1(T) < S_1(M) < S_1(H). \tag{1}$$

Позначимо

$$u = \frac{S_1(H)}{S_0}, \quad m = \frac{S_1(M)}{S_0}, \quad d = \frac{S_1(T)}{S_0}. \tag{2}$$

Зазначимо, що згідно з (1)

$$0 < d < m < u. \tag{3}$$



Мал. 1. Загальна одноперіодна триноміальна модель.

Поряд з ринком акцій діє грошовий ринок, на якому фіксовано *періодну безризикову* відсоткову ставку $r > 0$.

Теорема 1 (**Критерій безарбітражності одноперіодної триноміальної моделі**). *Умова безарбітражності (як і у випадку біноміальної моделі) еквівалентна нерівностям*

$$0 < d < 1 + r < u. \tag{4}$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Припустимо, що $d \geq 1 + r$.

1. В момент часу 0 позичаємо суму S_0 в банку й купуємо одну акцію.

2. В момент часу 1 повертаємо банку позичену суму з відсотками $S_0(1{+}r)$.

На руках в нас залишиться невід'ємна сума

$$S_1(\omega) - S_0(1+r) \geq S_1(T) - S_0(1+r) = S_0(d-1-r) \geq 0, \quad \omega \in \{H, M, T\},$$

і з ймовірністю p_1 ця сума буде строго додатньою:

$$S_1(H) - S_0(1+r) = S_0(u-1-r) > 0.$$

Отже, маємо арбітраж.
Припустимо тепер, що $u \leq 1+r$.

1. В момент часу 0 продаємо одну акцію й отриману суму S_0 кладемо в банк.
2. В момент часу 1 забираємо з банку суму з відсотками $S_0(1{+}r)$ й купуємо одну акцію.

Суми $S_0(1+r)$ нам вистачить для купівлі однієї акції, оскільки

$$S_0(1+r) - S_1(\omega) \geq S_0(1+r) - S_1(H) = S_0(1+r-u) \geq 0, \quad \omega \in \{H, M, T\},$$

і з ймовірністю p_3 маємо прибуток:

$$S_0(1+r) - S_1(T) = S_0(1+r-d) > 0.$$

Отже, і в цьому випадку отримуємо арбітраж.
($\Leftarrow$) Нехай початковий капітал інвестора становить X_0, Δ позначає кількість акцій, яку придбав (продав) інвестор в момент часу 0. Тоді в момент часу 1 його поточний капітал становитиме

$$X_1(\omega) = \Delta S_1(\omega) + (1+r)(X_0 - \Delta S_0), \quad \omega \in \{H, M, T\}.$$

Існування арбітражу в моделі означає, що для $X_0 = 0$ $\exists \Delta \in \mathbb{R}:$

1. $\forall \omega \in \{H, M, T\} \quad X_1(\omega) \geq 0;$
2. $\exists \omega \in \{H, M, T\} \quad X_1(\omega) > 0.$

Нехай $X_1(H) > 0$. Тоді, враховуючи умови (4) маємо:

$$X_1(H)X_1(T) = [u-(1+r)][d-(1+r)]S_0^2 < 0 \implies X_1(T) < 0.$$

Отже, у цьому випадку арбітражу немає. Випадок $X_1(T) > 0$ розглядається аналогічно. Нехай $X_1(M) > 0$. Тоді $m \neq 1+r$. Отже,

1. $m > 1+r \implies X_1(T) < 0;$
2. $m < 1+r \implies X_1(H) < 0.$

Тобто арбітражу немає. $\square$

2. Основні результати

Розглянемо одноперіодну симетричну триноміальну модель і дериватив з виплатами

$$V_1(T) = \alpha, \quad V_1(M) = \beta, \quad V_1(H) = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Нехай V_0 — безарбітражна ціна цього деривативу, r — безризикова відсоткова ставка, Δ — кількість акцій S_0, яку агент купує-продає у момент часу нуль. Вважаємо, що справджується умова безарбітражності

$$d < 1 + r < u. \tag{6}$$

Теорема 2 (**Критерій безарбітражної ціни деривативу в одноперіодній симетричній триноміальній моделі**). *(i) Якщо V_0 — безарбітражна ціна деривативу в одноперіодній симетричній триноміальній моделі, то*

$$\forall \delta \in \mathbb{R} \min_{\omega \in \{H,M,T\}} \frac{S_1(\omega)\delta - V_1(\omega)}{1+r} \leqslant S_0\delta - V_0 \leqslant \max_{\omega \in \{H,M,T\}} \frac{S_1(\omega)\delta - V_1(\omega)}{1+r} \tag{7}$$

(ii) Будь-яка величина V_0, що задовольняє (7), є безарбітражною ціною похідного цінного паперу.

Доведення. (i) Доведемо від супротивного ліву нерівність (права доводиться аналогічно). Нехай

$$\exists \delta_0 \in \mathbb{R} : \ \forall \omega \in \{H, M, T\} \quad S_0\delta_0 - V_0 > \frac{S_1(\omega)\delta_0 - V_1(\omega)}{1+r}. \tag{8}$$

Оскільки $\delta_0 = |\delta_0| \operatorname{sgn}(\delta_0)$, то (8) еквівалентне нерівності

$$\forall \omega \in \{H, M, T\} \quad (S_0|\delta_0| \operatorname{sgn}(\delta_0) - V_0)(1 + r) > S_1(\omega)|\delta_0| \operatorname{sgn}(\delta_0) - V_1(\omega). \tag{9}$$

Якщо $\operatorname{sgn}(\delta_0) = 1$, то розглянемо стратегію: в момент часу нуль продаємо δ_0 акцій, купуємо один дериватив і кладемо залишок грошей в банк (якщо ціна деривативу досить велика, то ми насправді мусимо позичати). Тоді в момент виконання цінного паперу нам виплачують за ним певні кошти, ми купуємо на ринку δ_0 акцій, в такий спосіб відновивши свій початковий портфель. Беручи до уваги (9), легко бачити, що така стратегія створює арбітраж. І ми отримали в цьому випадку суперечність.

Якщо $\operatorname{sgn}(\delta_0) = -1$, то арбітражна стратегія будується так: в момент часу нуль позичаємо в банку таку суму грошей, щоб можна було купити $|\delta_0|$ акцій і один дериватив.

У випадку $\delta_0 = \operatorname{sgn}(\delta_0) = 0$ для арбітражу нам досить купити один цінний папір і дочекатися його виконання.

(ii) Доводимо від супротивного. Припустимо, що V_0 задовольняє умову (7) і крім того V_0 є арбітражна ціна деякого цінного паперу. З означення арбітражу випливає, що

$$\begin{aligned} &\exists \delta_0, n_0 \in \mathbb{R} : \ \forall \omega \in \{H, M, T\} \quad (n_0V_0 - \delta_0S_0)(1 + r) + S_1(\omega) - n_0V_1(\omega) > 0 \\ &\implies \forall \omega \in \{H, M, T\} \quad n_0(V_0(1 + r) - V_1(\omega)) > \delta_0(S_0(1 + r) - S_1(\omega)). \end{aligned} \tag{10}$$

Якщо $n_0 = 0$, то (10) перепишеться так:

$$\forall \omega \in \{H, M, T\} \quad \delta_0(S_0(1+r) - S_1(\omega)) < 0. \tag{11}$$

Оскільки справджуються умови безарбітражності (6), то з (11) легко отримати суперечність.

Якщо $n_0 > 0$, то (10) можна переписати так:

$$\forall \omega \in \{H, M, T\} \quad S_0\tilde{\delta_0} - V_0 < \frac{S_1(\omega)\tilde{\delta_0} - V_1(\omega)}{1+r}, \tag{12}$$

де $\tilde{\delta_0} = \dfrac{\delta_0}{n_0}$. Звідси маємо:

$$S_0\tilde{\delta_0} - V_0 < \min_{\omega \in \{H,M,T\}} \frac{S_1(\omega)\tilde{\delta_0} - V_1(\omega)}{1+r}. \tag{13}$$

Ми отримали суперечність з (7). Аналогічно коли $n_0 < 0$ можна отримати, що

$$S_0\tilde{\delta_0} - V_0 > \max_{\omega \in \{H,M,T\}} \frac{S_1(\omega)\tilde{\delta_0} - V_1(\omega)}{1+r}. \tag{14}$$

І тим самим знову прийти до суперечності. Теорему доведено. □

Теорема 3 (Про безарбітражну ціну деривативу в одноперіодній симетричній триноміальній моделі). *Нехай V_0 — безарбітражна ціна деривативу з виплатами (5) в одноперіодній симетричній триноміальній моделі. Тоді:*

(*i*) $(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha > 0 \Longrightarrow$
$$V_0 \in \left[\frac{1}{1+r}\frac{(1+r-1)\gamma + (u-1-r)\beta}{u-1}, \frac{1}{1+r}\frac{(u-1-r)\alpha + (1+r-d)\gamma}{u-d}\right] = I_0;$$

(*ii*) $(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha < 0 \Longrightarrow$
$$V_0 \in \left[\frac{1}{1+r}\frac{(u-1-r)\alpha + (1+r-d)\gamma}{u-d}, \frac{1}{1+r}\frac{(1+r-1)\gamma + (u-1-r)\beta}{u-1}\right] = I_0;$$

(*iii*) $(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha = 0 \Longrightarrow$
$$V_0 = \frac{1}{1+r}\frac{(u-1-r)\alpha + (1+r-d)\gamma}{u-d} = \frac{1}{1+r}\frac{(1+r-1)\gamma + (u-1-r)\beta}{u-1} = I_0.$$

Доведення. Введемо такі позначення:

$$y(H) = \frac{uS_0\delta - \gamma}{1+r}, \quad y(M) = \frac{S_0\delta - \beta}{1+r}, \quad y(T) = \frac{dS_0\delta - \alpha}{1+r}, \quad y = S_0\delta - V_0.$$

Тоді використовуючи Теорему 2 і введені позначення, отримуємо:

$$\forall\delta \in \mathbb{R} \qquad \min_{\omega\in\{H,M,T\}} y(\omega) < y < \max_{\omega\in\{H,M,T\}} y(\omega). \tag{15}$$

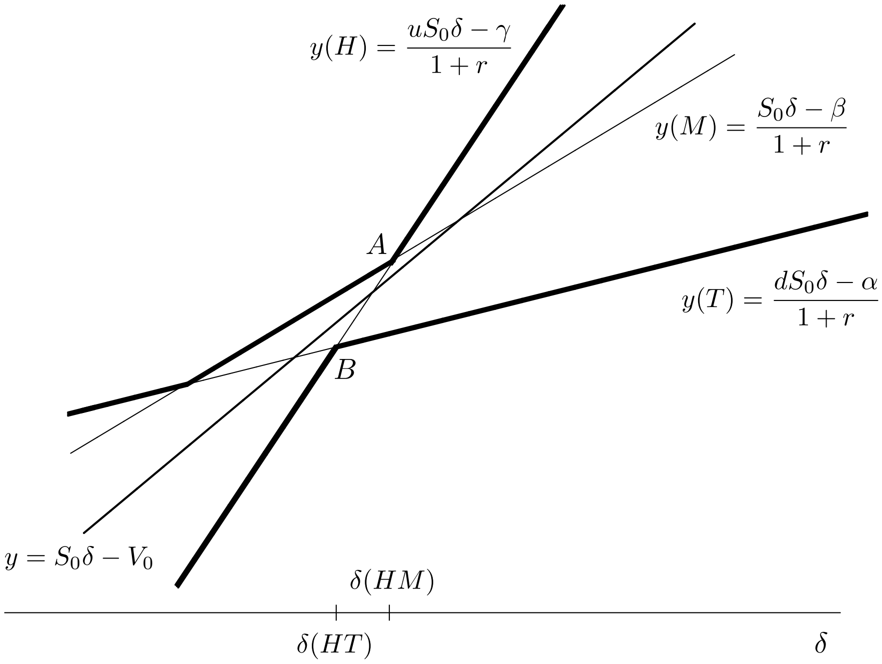
Якщо розглядати y, $y(\omega)$, $\omega \in \{H, M, T\}$, як функції від δ, то нерівності (15) можна інтерпретувати так: лінійна відносно δ функція y перебуває між верхньою і нижньою обвідною системи прямих $\{y(\omega)\}_{\omega\in\{H,M,T\}}$. Ціна деривативу V_0 є параметром. Твердження теореми полягає у знаходженні меж, в яких може змінюватися V_0, щоб не порушувалася умова (15).

Нехай $\delta(HM)$ абсциса точки перетину прямих $y(H)$ і $y(M)$, а $\delta(HT)$ відповідно $y(H)$ і $y(T)$. Тоді:

$$\delta(HM) = \frac{\gamma - \beta}{(u-1)S_0}, \quad \delta(HT) = \frac{\gamma - \alpha}{(u-d)S_0}. \tag{16}$$

Розглянемо випадок, коли $\delta(HM) > \delta(HT)$ (Мал. 2). Використовуючи (16), отримуємо:

$$(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha > 0. \tag{17}$$



Мал. 2. $(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha > 0$

Нехай k, $k(\omega)$ кутові коефіцієнти прямих $y, y(\omega), \omega \in \{H, M, T\}$. Оскільки виконується (6), то справедливі нерівності:

$$k(T) < k(M) < k < k(H) \tag{18}$$

Знайдемо значення V_0^{min}, при якому пряма y проходить через точку A (Мал. 2).

$$y(\delta(HM)) = y(H, \delta(HM)) \implies S_0 \frac{\gamma - \beta}{(u-1)S_0} - V_0^{min} = \frac{uS_0 \frac{\gamma-\beta}{(u-1)S_0} - \gamma}{1+r} \implies$$

$$\implies V_0^{min} = \frac{1}{1+r} \frac{(1+r-1)\gamma + (u-1-r)\beta}{u-1}$$

Тепер знайдемо значення V_0^{max}, при якому пряма y проходить через точку B (Мал. 2).

$$y(\delta(HT)) = y(H, \delta(HT)) \implies S_0 \frac{\gamma - \alpha}{(u-d)S_0} - V_0^{max} = \frac{uS_0 \frac{\gamma-\alpha}{(u-d)S_0} - \gamma}{1+r} \implies$$
$$\implies V_0^{max} = \frac{1}{1+r} \frac{(1+r-d)\gamma + (u-1-r)\alpha}{u-d}.$$

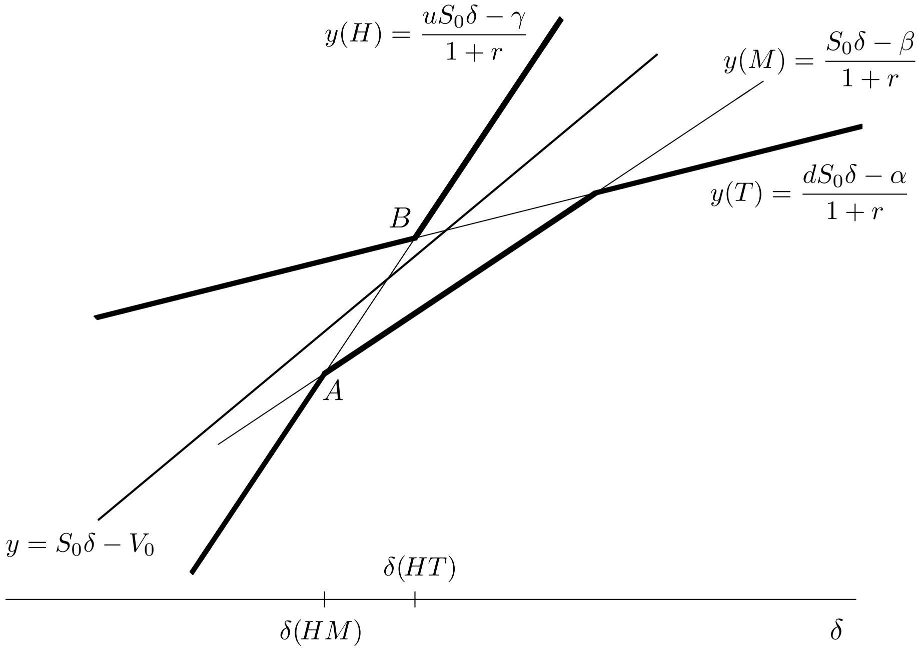
Оскільки справджуються нерівності (18), то при збільшенні V_0 пряма y спускається до точки B, а при зменшенні V_0 — піднімається до точки A. Отже,

$$V_0 \in (V_0^{min}, V_0^{max}) =$$
$$= \left(\frac{1}{1+r} \frac{(1+r-d)\gamma + (u-1-r)\alpha}{u-d}, \frac{1}{1+r} \frac{(1+r-1)\gamma + (u-1-r)\beta}{u-1} \right).$$

Перший пункт теореми доведено. Нехай тепер $\delta(HM) < \delta(HT)$, що еквівалентне нерівності:

$$(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha > 0. \tag{19}$$

Графічно це виглядає так:



Мал. 3. $(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha < 0$.

У цьому випадку точки A і B стали відповідно кутовими для нижньої та верхньої обвідних (Мал. 3), тобто порівняно з попереднім пунктом з точністю до навпаки. Отже,

$$V_0 \in \left(\frac{1}{1+r}\frac{(1+r-1)\gamma + (u-1-r)\beta}{u-1}, \frac{1}{1+r}\frac{(1+r-d)\gamma + (u-1-r)\alpha}{u-d}\right).$$

Якщо ж $\delta(HM) = \delta(HT)$, то

$$(1-d)\gamma - (u-d)\beta + (u-1)\alpha = 0.$$

Геометрично це означає, що прямі $\{y(\omega)\}_{\omega\in\{H,M,T\}}$ перетинаються в одній точці. Виберемо $\delta_0 = \delta(HM) = \delta(HT)$. З рівностей

$$y(\delta_0) = y(H,\delta_0) = y(M,\delta_0) = y(T,\delta_0)$$

отримуємо твердження третього пункту теореми. □

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I*, New York: Springer, 2004.
2. J.Hull, *Optiones, Futures and Other Derivatives*, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2006.

Надійшло 11.06.2014