ПРОДОВЖЕННЯ МЕТРИК У АСИМПТОТИЧНІЙ ТОПОЛОГІЇ

©2005 р. *Михайло ЗАРІЧНИЙ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79602, Україна,
Instytut Matematyki, Uniwersytet Rzeszowski,
16 A Rejtana Str., 35-310 Rzeszów, Poland

Редакція отримала статтю 21 вересня 2005 р.

Доведено, що кожна асимптотично ліпшицева метрика, задана на замкненій підмножині власного метричного простору, допускає продовження до асимптотично ліпшицевої метрики на всьому просторі.

1. ВСТУП

Задача про продовження неперервної метрики із замкненої підмножини метризовного простору до неперервної метрики на всьому просторі була вперше розглянута Ф. Гаусдорфом [4]. Його теорема про існування продовження є аналогом класичного результату теореми Тітце–Урисона про продовження неперервних функцій.

Огляд історії розвитку проблематики продовження індивідуальної метрики з підпростору на простір можна знайти в [5].

У статті [2] Ч. Бессага сформулював задачу лінійного продовження метрик і розв'язав цю задачу в ряді часткових випадків. Повний розв'язок задачі лінійного продовження метрик вперше одержав Т.О. Банах [1]. На сьогоднішній день задачі продовження метрик з різними додатковими властивостями присвячено обширну літературу.

Останніми роками інтенсивно розвивається асимптотична топологія — розділ топології метричних просторів, присвячений дослідженню їх

УДК 517.51; MSC 2000: 54C20, 54C35, 54E20, 54E35

великомасштабних властивостей. Поряд із задачами продовження функцій у асимптотичній топології природно розглядати і задачу продовження метрик.

2. ПРОДОВЖЕННЯ МЕТРИК

Метричний простір (X, d) називають *власним*, якщо кожна замкнена куля в X компактна. Метрику ϱ на метричному просторі (X, d) називають *асимптотично ліпшицевою*, якщо існують $\lambda, s > 0$ такі, що $\varrho(x, y) \leq \lambda d(x, y) + s$ для кожних $x, y \in X$. Ми не вимагаємо неперервності асимптотично ліпшицевих метрик. Легко бачити, що метрика ϱ асимптотично ліпшицева, якщо і тільки якщо тотожне відображення $1_X \colon (X, d) \to (X, \varrho)$ асимптотично ліпшицеве в сенсі [3].

Відкриту (замкнену) кулю радіуса r з центром в точці x в метричному просторі (X, d) позначаємо $B_d(x, r)$ (відповідно $\bar{B}_d(x, r)$). Якщо $A \subset X$, то приймаємо $\bar{B}_d(A, r) = \cup\{\bar{B}_d(x, r) \mid x \in A\}$.

У статті [6] доведено, що кожну асимптотично ліпшицеву функцію, означену на замкненій підмножині власного метричного простору, можна продовжити на весь простір так, що продовження також асимптотично ліпшицеве. Нашою метою є довести відповідний результат також і для метрик.

Теорема 1. *Нехай A — замкнена підмножина власного метричного простору (X, d). Тоді кожна власна неперервна асимптотично ліпшицева метрика ϱ на A може бути неперервно продовжена на X так, що продовження є асимптотично ліпшицевим і індукує вихідну топологію на просторі X.*

Доведення. Існують $\lambda, s > 0$ такі, що $\varrho(x, y) \leq \lambda d(x, y) + s$ для кожних $x, y \in A$.

Функція $\min\{\varrho, s\}$ є метрикою на множині A. Існує неперервна метрика σ на просторі X така, що $\sigma|(A \times A) = \min\{\varrho, s\}$ і σ обмежена згори числом s.

Нехай $d' = \lambda d|(A \times A) + \sigma$. Тоді функція d' є метрикою на множині X і $\varrho \leq d'|(A \times A)$. Нескладно переконатися, що метрика d' власна. Означимо функцію $\hat{\varrho} \colon X \times X \to \mathbb{R}$ формулою

$$\hat{\varrho}(x, y) = \min\{d'(x, a) + \varrho(a, b) + d'(b, y) \mid a, b \in A\}, \ x, y \in X.$$

Зауважмо спочатку, що $\hat{\varrho}|(A \times A) = \varrho$.

Покажемо, що функція $\hat{\varrho}$ є метрикою. Перевірки вимагає тільки нерівність трикутника.

Нехай $x, y, z \in X$ and $\varepsilon > 0$. Існують $a, b, c, e \in A$ такі, що

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}(x,y) \geq & d'(x,a) + \varrho(a,b) + d'(b,y) - \varepsilon,\\ \hat{\varrho}(y,z) \geq & d'(y,c) + \varrho(c,e) + d'(e,z) - \varepsilon,\end{aligned}$$

звідки одержуємо

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}(x,y) + \hat{\varrho}(y,z) &\geq d'(x,a) + \varrho(a,b) + d'(b,y)\\ &\qquad + d'(y,c) + \varrho(c,e) + d'(e,z) - 2\varepsilon\\ &\geq d'(x,a) + \varrho(a,b) + d'(b,c) + \varrho(c,e) + d'(e,z) - 2\varepsilon\\ &\geq d'(x,a) + \varrho(a,b) + \varrho(b,c) + \varrho(c,e) + d'(e,z) - 2\varepsilon\\ &\geq d'(x,a) + \varrho(a,e) + d'(e,z) - 2\varepsilon\\ &\geq \hat{\varrho}(x,z) - 2\varepsilon.\end{aligned}$$

При $\varepsilon \to 0$ одержуємо нерівність трикутника.

Тепер означимо функцію $\varrho' \colon X \times X \to \mathbb{R}$, прийнявши $\varrho' = \min\{\hat{\varrho}, d'\}$. Нашою метою є показати, що ϱ' — метрика на X. Для цього, знову ж таки, досить перевірити лише нерівність трикутника.

Нехай $x, y, z \in X$. Розглянемо такі випадки:

1) $\varrho'(x,z) = d'(x,z)$, $\varrho'(y,z) = d'(y,z)$. З нерівності трикутника для метрики d' випливає, що

$$\varrho'(x,y) \leq d'(x,y) \leq d'(x,z) + d'(y,z) \leq \varrho'(x,z) + \varrho'(y,z).$$

2) $\varrho'(x,y) = \hat{\varrho}(x,y)$, $\varrho'(x,z) = \hat{\varrho}(x,z)$, $\varrho'(y,z) = d'(y,z)$. Тоді

$$\varrho'(x,y) = \hat{\varrho}(x,y) \leq \hat{\varrho}(x,z) + \hat{\varrho}(y,z) \leq \varrho'(x,z) + d'(y,z) = \varrho'(x,z) + \varrho'(y,z).$$

3) $\varrho'(x,y) = d'(x,y)$, $\varrho'(x,z) = d'(x,z)$, $\varrho'(y,z) = \hat{\varrho}(y,z)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існують $a, b \in A$ такі, що $\hat{\varrho}(y,z) \geq d'(y,a) + \varrho(a,b) + d'(b,z) - \varepsilon$ і ми одержуємо

$$\begin{aligned}d'(x,z) + d'(y,z) =& \varrho'(y,z) + d'(x,z) \geq \hat{\varrho}(y,z) + d'(x,z)\\ \geq& d'(y,a) + \varrho(a,b) + d'(b,z) - \varepsilon + d'(x,z)\\ \geq& d'(y,a) + \varrho(a,b) + d'(b,x) - \varepsilon\\ \geq& \hat{\varrho}(x,y) - \varepsilon \geq d'(x,y) - \varepsilon.\end{aligned}$$

При $\varepsilon \to 0$ ми одержуємо нерівність трикутника.

Решта випадків зводяться до вже розглянутих.

Зауважмо, що $\varrho'|(A \times A) = \varrho$. Покажемо тепер, що ϱ' — власна метрика на X.

Нехай $x_0 \in X$ і $r > 0$. Нехай також $y \in X$ — така точка, що $\varrho'(x_0, y) < r$. Далі доведення розбивається на два випадки:

1) $\varrho'(x_0, y) = d'(x_0, y)$. Тоді $y \in B_{d'}(x_0, r) \subset B_d(x_0, r/\lambda)$.

2) $\varrho'(x_0, y) = \hat{\varrho}(x_0, y)$. Тоді існують $a, b \in A$ такі, що $d'(x_0, a) + \varrho(a, b) + d'(b, y) < r$. Маємо $y \in \bar{B}_d(\bar{B}_\varrho(\bar{B}_d(x_0, d/\lambda) \cap A), \lambda), d/\lambda)$, звідки і з властивості метрик ϱ і d випливає, що r-окіл точки x_0 щодо метрики ϱ' міститься в деякому компакті.

Покажемо, що метрика ϱ' асимптотично ліпшицева. Справді,

$$\varrho'(x, y) \leq d'(x, y) = \lambda d(x, y) + \sigma(x, y) \leq \lambda d(x, y) + s.$$

Нескладне доведення того, що ϱ' індукує вихідну топологію на просторі X залишаємо читачеві.

3. ЗАУВАЖЕННЯ І ВІДКРИТІ ПИТАННЯ

Метрика ϱ на метричному просторі (X, d) називається *грубо рівномірною*, якщо існує функція $\varphi\colon X \to [0, \infty)$ така, що $\varrho(x, y) \leq \varphi(d(x, y))$ для всіх $x, y \in X$.

Питання 1. Чи існує продовження грубо рівномірних метрик, заданих на замкненій підмножині власного метричного простору?

Асимптотично ліпшицеві метрики на власному метричному просторі утворюють додатний конус. Природно виникає проблема існування лінійного оператора продовження асимптотично ліпшицевих метрик з підпростору на простір. Очевидно, що така задача не становить особливого інтересу, якщо не топологізувати множину асимптотично ліпшицевих метрик і не вимагати неперервності оператора продовження.

Нагадаємо, що метрику на множині X називають *ультраметрикою*, якщо вона задовольняє сильну нерівність трикутника

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}, \ x, y, z \in X.$$

Питання 2. Чи існує продовження асимптотично ліпшицевих (відповідно грубо рівномірних) ультраметрик, заданих на замкненій підмножині підмножині власного ультраметричного простору?

[1] *Banakh T.* AE(0)-spaces and regular operators extending (averaging) pseudometrics // Bull. Polish Acad. Sci. Math. – 1994. – V. 42, no. 3. – P. 197–206.

[2] *Bessaga C.* Functional analytic aspects of geometry. Linear extending of metrics and related problems // Progress in functional analysis (Peñíscola, 1990), 247–257, North–Holland Math. Stud., 170, Amsterdam, 1992.

[3] *Dranishnikov A.* Asymptotic topology // Russian Math. Surveys. – 2000. – V. 55 (6). – P. 1085—1129.

[4] *Hausdorff F.* Erweiterung einer Homöomorphie // Fund. Math. 16 (1930). – S. 353–360.

[5] *Hušek M.* History and development of Hausdorff's work in extension in metric spaces. – In: Recent developments of general topology and its applications (Berlin, 1992), 160–169, Math. Res., 67, Akademie–Verlag, Berlin, 1992.

[6] *Sawicki M.* Absolute extensors and absolute neighborhood extensors in asymptotic categories // Topology and its Applications. – 2005. – V. 150, Issues 1–3. – P. 59–78.

EXTENSION OF METRICS IN THE ASYMPTOTIC TOPOLOGY

Mykhaylo ZARICHNYI

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine,
Instytut Matematyki, Uniwersytet Rzeszowski,
16 A Rejtana Str., 35-310 Rzeszów, Poland

It is proved that every asymptotically Lipschitz metric defined on a closed subset of a proper metric space can be extended to an asymptotically Lipschitz metric defined on the whole space.