КОМПЛЕКСНОЗНАЧНІ ПОВІЛЬНО ЗМІННІ ФУНКЦІЇ ВЗДОВЖ КРИВОЇ ТА У ВЕРШИНІ СЕКТОРУ

©2005 р. Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 26 травня 2005 р.

Узагальнено поняття дійснозначних повільно змінних функцій у точці на випадок комплекснозначних функцій як дійсного, так і комплексного аргументу. Отримано також аналоги теорем Карамати про рівномірне прямування до границі та про зображення введених функцій.

Під повільно змінною функцією, переважно, розуміють неперервну (чи вимірну) на $[x_0, +\infty)$ функцію l таку, що для всіх $c \in (0, +\infty)$

$$l(cx)/l(x) \to 1 \ \ (x \to +\infty). \tag{1}$$

Як показав Карамата [4, 5] (див. також [2, с. 10]), прямування в (1) рівномірне відносно c з кожного фіксованого проміжку $[c_1, c_2] \in (0, +\infty)$ і для того, щоб додатна неперервна (чи вимірна) на $[x_0, +\infty)$ функція l була повільно змінною, необхідно і досить, щоб для всіх $x \geq x_1 (\geq x_0)$

$$l(x) = \exp\left\{\eta(x) + \int_{x_1}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right\},$$

де η — неперервна (відповідно, вимірна) на $[x_1, +\infty)$ функція, $\eta(x) \to \eta_0 \in \mathbb{R}\,(x \to +\infty)$, а ε — неперервна на $[x_1, +\infty)$ функція, $\varepsilon(x) \to 0\,(x \to +\infty)$.

В математичній літературі зустрічаються також поняття повільно змінних функцій в лівому чи правому околі точки $a \neq \infty$. Так, в [1]

УДК 517.53; MSC 2000: 30E99

додатна неперервна на $(0, x_0]$ функція l називається повільно змінною в правому околі точки 0 (або в точці 0 справа), якщо в (1) прямування $x \to +\infty$ замінити прямуванням $x \to 0+$. У [6] додатна неперервна неспадна на $[x_0, 1)$ функція l називається повільно зростаючою в точці 1 зліва (в лівому околі точки 1), якщо для кожного $k \in (0, 1)$

$$l(x + k(1 - x))/l(x) \to 1 \ \ (x \to 1-). \tag{2}$$

У цій статті ми узагальнимо ці поняття. Наше означення повільно змінної функції стосуватиметься комплекснозначних функцій як дійсного, так і комплексного аргументу.

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$, а $\gamma = \{z = z(t) : 0 \le t \le t_0\}$ — неперервна крива з кінцем у точці $z_0 = z(0)$. Припустимо, що функція $l : [\gamma] \to \mathbb{C}$ неперервна і не приймає значення 0 на $\gamma \setminus \{z_0\}$.

Означення 1. *Будемо називати функцію l повільно змінною в точці z_0 вздовж кривої γ, якщо для кожного $c \in (0, +\infty)$*

$$l(z(ct))/l(z(t)) \to 1 \ \ (t \to 0+). \tag{3}$$

Для випадку $z_0 = \infty$ і кривої $\gamma = \{z = z(t) : t_0 \le t < +\infty\}$, що йде в ∞, означення повільно змінної функції l в ∞ вздовж γ таке ж, але в (3) треба спрямувати $t \to +\infty$.

У випадку, коли $z_0 = 0$ і $\gamma = \{z = t : 0 \le t \le t_0\}$, повільно змінна в точці 0 вздовж відрізка γ означає повільну змінну в 0 справа. Якщо ж $z_0 = 1$ і $\gamma = \{z = 1 - t : 0 \le t \le t_0\}$, то повільно змінна в точці 1 вздовж відрізка γ означає повільну змінну в цій точці зліва, бо

$$\lim_{t \to 0+} \frac{l(1 - ct)}{l(1 - t)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{l(1 - c(1 - x))}{l(x)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{l(x + k(1 - x))}{l(x)}, \ k = 1 - c,$$

тобто виконання умови (3) для всіх $c \in (0, +\infty)$ рівносильне виконанню умови (2) для всіх $k < 1$. У випадку повільного зростання досить вимагати, щоб (2) виконувалась для всіх $k \in (0, 1)$ і, навіть, для $k = 1/2$.

Теорема 1 (аналог першої теореми Карамати). *Якщо функція l повільно змінна в точці z_0 вздовж кривої γ, то прямування в (3) рівномірне відносно c з кожного фіксованого проміжку $[c_1, c_2] \subset (0, +\infty)$.*

Доведення. Можемо вважати, що $z_0 \ne \infty$, бо випадок $z_0 = \infty$ заміною $z \to 1/z$ зводиться до випадку $z_0 = 0$.

Покладемо $\varphi(t) = l(z(t))$. Тоді φ — комплекснозначна функція змінної $t \in (0, t_0]$, неперервна і не перетворюється в 0 на $(0, t_0]$ і така, що

$$\varphi(ct)/\varphi(t) \to 1 \ \ (t \to 0+) \tag{4}$$

для кожного $c \in (0, +\infty)$. Звідси випливає, що на $(0, t_0]$ можна вибрати однозначну вітку $\ln \varphi(t)$, для якої

$$\ln \varphi(e^{\ln c + \ln t}) - \ln \varphi(e^{\ln t}) \to 0 \ \ (t \to 0+).$$

Зробимо тут заміну $x = -\ln t$ і $\lambda = -\ln c$ і покладемо $f(x) = \ln \varphi(e^{-x})$. Тоді виконання умови (4) для кожного $c \in (0, +\infty)$ рівносильне виконанню умови

$$f(x + \lambda) - f(x) \to 0 \ \ (x \to +\infty) \tag{5}$$

для кожного $\lambda \in \mathbb{R}$. Тому потрібно довести, що прямування в (5) рівномірне відносно λ з кожного фіксованого проміжку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Доведення цього факту нічим не відрізняється від доведення рівномірного прямування в [2, с. 11–12]. Терему доведено.

Використовуючи рівномірність прямування в (4), як і в [2, с. 13–14], неважко показати, що (4) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(t) = \exp\left\{\eta(t) + \int_t^{t_1} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\}, \quad 0 < t_1 \le t_0,$$

де функції η і ε неперервні на $(0, t_1]$, $\varepsilon(t) \to 0$ і $\eta(t) \to \eta_0 \in \mathbb{C}$ при $t \to 0+$. Таким чином, приходимо до наступної теореми.

Теорема 2 (аналог другої теореми Карамати). *Для того щоб функція l була повільно змінною в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ вздовж кривої γ необхідно і досить, щоб для всіх $t \in (0, t_1] \subset (0, t_0]$*

$$l(z(t)) = \exp\left\{\eta(t) + \int_t^{t_1} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\}, \tag{6}$$

де функції η і ε неперервні на $(0, t_1]$, $\varepsilon(t) \to 0$ і $\eta(t) \to \eta_0 \in \mathbb{C}$ при $t \to 0+$.

У випадку $z_0 = \infty$ зображення (6) слід замінити зображенням

$$l(z(t)) = \exp\left\{\eta(t) + \int_{t_1}^{t} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\}, \tag{7}$$

де функції ε і η неперервні на $[t_1, +\infty) \subset [t_0, +\infty)$, $\varepsilon(t) \to 0$ і $\eta(t) \to \eta_0 \in \mathbb{C}$ при $t \to +\infty$.

Зауваження 1. Недоліком наведеного вище означення повільної зміни вздовж кривої є залежність від параметризації кривої. Наприклад, якщо $\gamma = [1, +\infty)$ і $l(z) \equiv z$, то при $z = t, 1 \le t < +\infty$, функція l не є повільно змінною в ∞, а при $z = \ln t, e \le t < +\infty$, вона є повільно змінною в ∞. Якщо ж $\gamma = [1, +\infty)$ і $l(z) = \ln z$, то при $z = t, 1 \leq t < +\infty$, функція l є повільно змінною в ∞, а при $z = e^t, 0 \leq t < +\infty$, вона не є повільно змінною.

Усунути ці недоречності можна заміною умови (3) умовою

$$l(z_0 + c(z(t) - z_0))/l(z(t)) \to 1 \ \ (t \to 0+) \tag{8}$$

для всіх $c \in (0, +\infty)$. Але тепер потрібно, щоб функція l була неперервною і не приймала значення 0 в деякому куті, який містить криву γ.

Зауваження 2. Найоптимальнішою є ситуація, коли крива є відрізком або променем з кінцем в точці z_0, і має наступне параметричне зображення $\gamma = \{z = z_0 + te^{i\alpha_0} : 0 \leq t \leq t_0\}$, коли $z_0 \in \mathbb{C}$, і $\gamma = \{z = te^{i\alpha_0} : t_0 \leq t < +\infty\}$, коли $z_0 = \infty$. В цьому випадку умови (3) і (8) співпадають і записуються у вигляді

$$l(z_0 + cte^{i\alpha_0})/l(z_0 + te^{i\alpha_0}) \to 1 \ (t \to 0+), \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

$$l(cte^{i\alpha_0})/l(t\varepsilon^{i\alpha_0}) \to 1 \ \ (t \to +\infty), \quad z_0 = \infty.$$

Зроблені зауваження використаємо при означенні повільно змінної функції у вершині сектора. Нехай точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є вершиною кута $\{z : \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta\}$, $\beta - \alpha < 2\pi$, а $\Gamma(z_0)$ — сім'я всіх кривих $\gamma = \{z = z_0 + te^{i\psi(t)} : 0 \leq t \leq t_0\}$, де ψ — довільна неперервна на $[0, t_0]$ функція така, що $\alpha \leq \psi(t) \leq \beta$ для всіх $t \in [0, t_0]$. Припустимо, що функція l неперервна і не приймає значення 0 в секторі $\triangle = \{z : 0 < |z - z_0| \leq t_0, \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta\}$.

Означення 2. *Функцію l будемо називати повільно змінною в точці z_0 вздовж сектора $\triangle$, якщо вона повільно змінна в z_0 вздовж кожної кривої $\gamma \in \Gamma(z_0)$. У випадку $z_0 = \infty$ сектор $\triangle$ має вигляд $\triangle = \{z : t_0 \leq |z| < \infty, \alpha \leq \arg z \leq \beta\}$, а $\Gamma(\infty)$ є сім'єю всіх кривих $\gamma = \{z = te^{i\psi(t)} : t_0 \leq t < +\infty\}$, де ψ — довільна неперервна на $[t_0, +\infty)$ функція така, що $\alpha \leq \psi(t) \leq \beta$ для всіх $t \in [t_0, +\infty)$.*

Клас повільно змінних в z_0 вздовж $\triangle$ функцій l позначимо через $L_1(z_0, \triangle)$.

Зауваження 3. Нехай знову функція l неперервна і не приймає значення 0 в $\triangle$. Скажемо, що $l \in L_2(z_0, \triangle)$, якщо для кожного $c \in (0, +\infty)$

$$l(z_0 + c(z - z_0))/l(z) \to 1 \quad (z \to z_0,\, z \in \Delta), \quad z_0 \in \mathbb{C},$$

$$l(cz)/l(z) \to 1 \quad (z \to \infty,\ z \in \Delta), \quad z_0 = \infty.$$

Нарешті, $l \in L_3(z_0, \triangle)$, якщо l є повільно змінна в z_0 вздовж кожного променя (відрізка) з кінцем в z_0, що має наступне параметричне зображення $\gamma = \{z = te^{i\theta} : t_0 \leq t < +\infty\}$ $(\gamma = \{z = z_0 + te^{i\theta} : 0 \leq t \leq t_0\})$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ (див. зауваження 2). Легко бачити, що

$$L_1(z_0, \Delta) \subset L_2(z_0, \Delta) \subset L_3(z_0, \Delta).$$

Зауваження 4. Рівність $L_1(z_0, \triangle) = L_2(z_0, \triangle)$ не виконується, на що вказують приклади функцій $l(z) = 1 + |\arg z|$ (для $z_0 = \infty$) і $l(z) = 1 + |\arg(z - z_0)|$ (для $z_0 \neq \infty$).

Зауваження 5. Не виконується й рівність $L_2(z_0, \triangle) = L_3(z_0, \triangle)$. Дійсно, в [3, с. 126] показано, що існує функція E_0 така, що $E_0(z) = \exp\{z + e^z\} + O(1/z^2)$ при $z \to \infty$ в смузі $A = \{z : \mathrm{Re} z > 0, |\mathrm{Im} z| \leq \pi\}$ і $E_0(z) = O(1/z^2)$ при $z \to \infty$ зовні A. Розглянемо функцію $l(z) = E_0(z + 2\pi i) + \ln z$ в довільному секторі $\triangle = \{z : |z| \geq r_0, |\arg z| \leq \alpha\}$. Тоді на кожному промені $\{z : \arg z = \theta\}, |\theta| \leq \alpha$, для довільного $c \in (0, +\infty)$ і $r \geq r_0(\theta, c)$ маємо

$$\frac{l(cre^{i\theta})}{l(re^{i\theta})} = \frac{\ln r + \ln c + i\theta + O(1/z^2)}{\ln r + i\theta + O(1/z^2)} \to 1 \quad (r \to +\infty),$$

тобто $l \in L_3(\infty, \triangle)$. З іншого боку, якщо $z_n = n - 2\pi i$, то

$$\frac{l(2z_n)}{l(z_n)} = \frac{E_0(2n - 2\pi i) + \ln n + o(1)}{E_0(n) + \ln n + o(1)} = \frac{\ln n}{E_0(n)}(1 + o(1)) \to 0\, (n \to \infty),$$

тобто $l \notin L_2(\infty, \triangle)$.

Теорема 3. *Якщо функція l повільно змінна в точці z_0 вздовж сектора $\triangle$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує $t_* = t_*(\varepsilon)$ таке, що:*

1) якщо $z_0 \in \mathbb{C}$, то для всіх $c \in [C_1, C_2] \subset (0, +\infty)$, $\gamma \in \Gamma(z_0)$ і $t \in (0, t_*)$

$$\left| \frac{l(z_0 + cte^{i\psi(ct)})}{l(z_0 + te^{i\psi(t)})} - 1 \right| < \varepsilon; \tag{9}$$

2) якщо $z_0 = \infty$, то для всіх $c \in [C_1, C_2] \subset (0, +\infty), \gamma \in \Gamma(\infty)$ і $t \geq t_*$

$$\left| \frac{l(cte^{i\psi(ct)})}{l(te^{i\psi(t)})} - 1 \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, досить розглянути тільки один з випадків, коли $z_0 \in \mathbb{C}$ або $z_0 = \infty$. Нехай $z_0 = \infty$, $\gamma \in \Gamma(\infty)$ —

довільна крива, а $\varphi_\gamma(t) = l(t\exp\{i\psi(t)\})$. З теореми 1 випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $t_* = t_*(\varepsilon, \gamma)$ таке, що для всіх $t \geq t_*$ і $c \in [C_1, C_2]$

$$|\varphi_\gamma(ct)/\varphi_\gamma(t) - 1| < \varepsilon. \tag{11}$$

Припустимо, що твердження 2) теореми 3 не справджується, тобто існують число $\varepsilon > 0$, зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_n), послідовність кривих (γ_n) з $\Gamma(\infty)$ і послідовність (c_n) з $[C_1, C_2]$ такі, що

$$\left|\frac{l(c_n t_n e^{i\psi_n(c_n t_n)})}{l(t_n e^{i\psi(t_n)})} - 1\right| = \left|\frac{\varphi_{\gamma_n}(c_n t_n)}{\varphi_{\gamma_n}(t_n)} - 1\right| \geq \varepsilon.$$

Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $t_{n+1} > C_2 t_n$, $n \geq 1$, $C_1 > 1$. Виберемо криву $\gamma_0 \in \Gamma(\infty)$ таку, що $\gamma_0 = \{z = te^{i\psi_0(t)}, t \geq t_0\}$, де

$$\psi_0(t) = \begin{cases} \psi_1(t_1),\ t_0 \leq t \leq t_1, \\ \psi_n(t_n) + \frac{(t-t_n)}{c_n t_n - t_n}(\psi_n(c_n t_n) - \psi(t_n)), \quad t_n \leq t \leq c_n t_n, \\ \psi_n(c_n t_n) + \frac{(t-c_n t_n)}{t_{n+1} - c_n t_n}(\psi_{n+1}(t_{n+1}) - \psi_n(c_n t_n)),\ c_n t_n \leq t \leq t_{n+1}, \end{cases}$$

де $n \geq 1$. Тоді

$$\left|\frac{\varphi_{\gamma_0}(c_n t_n)}{\varphi_{\gamma_0}(t_n)} - 1\right| = \left|\frac{\varphi_{\gamma_n}(c_n t_n)}{\varphi_{\gamma_n}(t_n)} - 1\right| \geq \varepsilon,$$

що суперечить (11) з $\gamma = \gamma_0$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Функція $l(z)$ є повільно змінною в точці z_0 вздовж сектора $\triangle$ тоді і тільки тоді, якщо для довільних $c \in (0, +\infty)$ і $\varphi \in [\alpha, \beta]$*

1) у випадку $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{t\to 0+} \sup_{\alpha\leq\theta\leq\beta} \frac{l(cte^{i\theta} + z_0)}{l(te^{i\varphi} + z_0)} = 1;$$

2) у випадку $z_0 = \infty$

$$\lim_{t\to +\infty} \sup_{\alpha\leq\theta\leq\beta} \frac{l(cte^{i\theta})}{l(te^{i\varphi})} = 1.$$

Доведення. Розглянемо випадок $z_0 = \infty$ і доведемо необхідність умов теореми, оскільки їх достатність очевидна.

Припустимо, що існують числа $\varepsilon > 0$, $\varphi_0 \in [\alpha, \beta]$, $c > 0$, зростаюча до $+\infty$ послідовність (t_n) і послідовність чисел (θ_n), $\theta \in [\alpha, \beta]$ такі, що

$$\left| \frac{l(cte^{i\theta_n})}{l(te^{i\varphi_0})} - 1 \right| \geq \varepsilon$$

Якщо $c \neq 1$, то, не обмежуючи загальності, вважаємо, що $c > 1$ і $t_{n+1} > ct_n$. Покладемо

$$\psi_0(t) = \begin{cases} \varphi_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ \varphi_0 + \dfrac{(t - t_k)}{ct_k - t_k}(\theta_k - \varphi_0), \quad t_k \leq t \leq ct_k, \quad k \geq 1, \\ \theta_k + \dfrac{(t - ct_k)}{t_{k+1} - ct_k}(\theta_{k+1} - \theta_k), \quad ct_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Тоді для кривої $\gamma_0 = (z = te^{i\psi_0(t)} : t_0 \leq t < \infty) \in \Gamma(\infty)$ маємо

$$\left| \frac{l(ct_n e^{i\psi_0(ct_n)})}{l(t_n e^{i\psi_0(t_n)})} - 1 \right| = \left| \frac{l(ct_n e^{i\theta_n})}{l(t_n e^{i\varphi_0})} - 1 \right| \geq \varepsilon,$$

а, отже, функція l не є повільно змінною на кривій γ_0, що приводить до суперечності.

У випадку $c = 1$ функцію $\psi_0(t)$ будуємо аналогічно, але замість ct_k ставимо $c_k t_k$, де $1 < c_k < 2$ такі, що $|l(c_k t_k e^{i\theta_k}) - l(t_k e^{i\theta_k})| < \frac{\varepsilon}{2} |l(t_k e^{i\varphi_0})|$. Тоді

$$\left| \frac{l(c_k t_k e^{i\psi_0(c_k t_k)})}{l(t_k e^{i\psi_0(t_k)})} - 1 \right| = \left| \frac{l(c_k t_k e^{i\theta_k})}{l(t_k e^{i\varphi_0})} - 1 \right| \geq$$

$$\geq \left| \frac{l(t_k e^{i\theta_k})}{l(t_k e^{i\varphi_0})} - 1 \right| - \left| \frac{l(c_k t_k e^{i\theta_k}) - l(t_k e^{i\theta_k})}{l(t_k e^{i\varphi_0})} \right| > \frac{\varepsilon}{2},$$

що суперечить теоремі 3. Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай функція l неперервна і не приймає значення 0 в секторі $\triangle$. Для того щоб функція l була повільно змінною в точці z_0 вздовж $\triangle$ необхідно і досить, щоб*

1) якщо $z_0 \in \mathbb{C}$, то

$$l(z) = \exp\left\{ \eta(z) + \int\limits_{|z - z_0|}^{|z_1 - z_0|} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx \right\}, \tag{12}$$

де z_1 *— деяка точка з* $\triangle, \eta$ *і* ε *— неперервні функції,* $\varepsilon(z) \to 0$ *і* $\eta(z) \to \eta_0$ *при* $z \to z_0$ *в куті* $\{z : \alpha \le \arg(z - z_0) \le \beta\}$;

2) якщо $z_0 = \infty$, *то*

$$l(z) = \exp\left\{\eta(z) + \int_{|z_1|}^{|z|} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\}, \tag{13}$$

де z_1 *— деяка точка з* $\triangle, \eta$ *і* ε *— неперервні функції,* $\varepsilon(z) \to 0$ *і* $\eta(z) \to \eta_0$ *при* $z \to \infty$ *в куті* $\{z : \alpha \le \arg z \le \beta\}$.

Доведення. Зупинимось на твердженні 2). Якщо функція l повільно змінна в ∞ вздовж $\triangle$, то для кривої $\gamma = \{z = te^{i\alpha} : t_0 \le t < +\infty\}, \gamma \in \Gamma(\infty)$, маємо

$$l(te^{i\alpha}) = \exp\left\{\eta_1(t) + \int_{t_1}^{t} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\}, t > t_1,$$

де $\eta_1(t), \varepsilon(t)$ такі, як в (7). Нехай $z = te^{i\varphi}, \varphi \in [\alpha, \beta]$, $t > t_1$. Тоді $|z| = t$ і, покладаючи $\eta(z) = \eta_1(t) + \ln \frac{l(z)}{l(te^{i\alpha})}$, $\ln 1 = 0$, з останнього співвідношення отримуємо

$$l(z) = l(te^{i\alpha}) \frac{l(z)}{l(te^{i\alpha})} = \exp\left\{\eta(z) + \int_{|z_1|}^{|z|} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\},$$

де $\eta(z) \to \eta_0$, $z \to \infty$, з огляду на теорему 4.

Якщо ж виконується (13), то для кожної кривої $\gamma \in \Gamma$ маємо

$$\frac{l(cte^{i\psi(ct)})}{l(te^{i\psi(t)})} = \exp\left\{\eta(cte^{i\psi(ct)}) - \eta(te^{i\psi(t)}) + \int_{t}^{ct} \frac{\varepsilon(x)}{x} dx\right\} \to 1$$

при $t \to +\infty$, бо $\eta(z) \to \eta_0$ і $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Теорему доведено.

[1] *Седлецкий А.М.* О скорости убывания собственных чисел оператора Фредгольма // Сиб. матем. журн. – 1990. – **31**, № 5. – С. 120–127.

[2] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука. – 1985. – 141 с.

[3] *Хейман У.* Мероморфные функции. – М.: Мир. – 1966. – 288 с.

[4] *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière des fonctions // Mathematica (Cluj). – 1930. – V. 4. – P. 38–53.

[5] *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière. Theorems fundamentaux // Bull. Soc. Math. France. – 1933. – V. 4. – P. 55–62.

[6] *Kasana H.S.* Some properties of proximate order for analitic functions // Math. Balkan. – 1989. – **3**, № 1. – P. 29–33.

COMPLEX SLOWLY VARYING FUNCTIONS ALONG A CURVE AND AT THE VERTEX OF AN ANGLE

Mykola ZABOLOTSKYY

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

The notion of a real slowly varying function at a point is generalized on complex case. We obtain analogues of Karamata's theorems on uniform tending to a limit and representations of introduced functions.