ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ МНОЖИН ТОЧОК РОЗРИВУ CD-ФУНКЦІЙ

©*2005 р. Василь ГЕРАСИМЧУК,*
Володимир МАСЛЮЧЕНКО,
Олександр МАСЛЮЧЕНКО

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58012

Редакція отримала статтю 8 лютого 2005 р.

Для метризовного берівського простору X охарактеризовані множини точок розриву функцій $f : X \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, які неперервні відносно першої змінної і диференційовні відносно другої.

ВСТУП

Множину $D(f)$ точок розриву функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, які неперервні відносно першої змінної і диференційовні відносно другої (коротко CD-*функцій*), почав досліджувати ще К. Беґель [9]. Він з'ясував, що у CD-функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ множина $D(f)$ ніде не щільна. Результат Беґеля був узагальнений у [3], де вивчалися й інші властивості малості множини точок розриву CD-функцій. Зокрема, з результатів праці [3] випливає, що для кожної CD-функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ і неперервної функції $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множина $D_g(f) = \{x \in \mathbb{R} : (x, g(x)) \in D(f)\}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}$. Якщо ж функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ неперервна відносно першої змінної і неперервно диференційовна відносно другої, то для довільного інтервалу $V = (c, d)$ проекція множини $D(f) \cap (\mathbb{R} \times V)$ на вісь абсцис ніде не щільна.

Як показано в [3], останній результат є неправильним для CD-функцій. Більше того, в [1] з'ясовано, що існують квазінеперервна функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і CD-функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такі, що множина $D_g(f)$ всюди щільна

УДК 517.51; MSC 2000: 26B05

в $\mathbb{R}$. У доведенні цього результату важливу роль відіграло введене в [1] поняття лакунарності множини E в $\mathbb{R}^2$ (див. далі п.1).

Крім того, у [3] дано повний опис множин точок розриву нарізно неперервно диференційовних функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. А саме, множина $E \subseteq \mathbb{R}^2$ буде множиною точок розриву деякої нарізно неперервно диференційовної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли E — це множина типу F_σ, яка є локально проективно ніде не щільною, тобто для кожної точки $p \in \mathbb{R}^2$ існує її окіл U, такий, що проекції перетину $E \cap U$ на кожну з осей ніде не щільні. Ця теорема істотно розвинула результати Кешнера [10] і Колесникова [4] на цю тему.

У зв'язку з цим природно постають питання про характеризацію множин точок розриву нарізно диференційовних чи CD-функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. У цій статті ми доводимо, що ними в другому випадку будуть навхрест ніде не щільні спадково десь лакунарні F_σ-множини і тільки вони (див. теорему 7.3). Навхрест ніде не щільні множини, тобто множини з ніде не щільним хрестом-околом (див. п. 4), були введені в [5]. З результатів праці [6] можна вивести [7, п. 2.10], що кожна ніде не щільна підмножина множини точок розриву нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ є навхрест ніде не щільною. Спадково десь лакунарні множини введені в п. 1 даної роботи і в п. 2 з'ясовується, що такими є множини $D(f)$ для CD-функцій $f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де X — берівський простір. У доведенні цього результату використовується ігрова характеризація беровості [11]. Побудова CD-функції f з даною множиною точок розриву E здійснюється в пп. 3–7 і розбивається на три кроки: (I) E — замкнена навхрест ніде не щільна множина (пп. 3, 4); (II) E — лакунарна навхрест ніде не щільна F_σ-множина (пп. 5, 6); (III) E — спадково десь лакунарна навхрест ніде не щільна F_σ-множина (п. 7).

Випадок нарізно диференційовних функцій двох і більшого числа змінних буде розглянутий у наступних працях авторів. Зауважимо, що перші кроки для n змінних були зроблені в [2].

1. ЛАКУНАРНІ МНОЖИНИ ТА ЇХ РІЗНОВИДИ

Нагадаємо [1], що підмножина E добутку P топологічних просторів X та Y називається *вертикально лакунарною в точці* $p = (x, y) \in P$, якщо існують відкрита в X множина U і окіл V точки y, такі, що $x \in \overline{U}$ і $(U \times V) \cap E = \emptyset$. Множина E називається *вертикально лакунарною*, якщо вона вертикально лакунарна в кожній точці $p \in E$. Казатимемо, що множина E *спадково десь вертикально лакунарна*, якщо для довільної непорожньої підмножини $S \subseteq E$ існує відносно відкрита в S непорожня вертикально лакунарна множина U. Далі, для скорочення, опускатимемо слово „вертикально“ у введених вище термінах.

Подібно, як у [5], введемо поняття лакунарного рангу множини. Для множини $E \subseteq P = X \times Y$ покладемо $N(E) = \{p \in E : E$ не є лакунарною в точці $p\}$ і $L(E) = E \cap \overline{N(E)}$. Зауважимо, що $L(E) \subseteq E$ і $L(E_1) \subseteq L(E_2)$, якщо $E_1 \subseteq E_2$. Нехай $L_0(E) = E$ і $L_\alpha(E) = L(\bigcap\limits_{\xi<\alpha} L_\xi(E))$, якщо порядкове число $\alpha > 0$. Зрозуміло, що $L_\alpha(E) \supseteq L_\beta(E)$, якщо $\alpha \leq \beta$. *Лакунарним рангом множини* E називатимемо порядкове число $\mathrm{lr}\,(E) = \min\{\alpha : L_\alpha(E) = \emptyset\}$. Легко бачити, що множина E буде лакунарною тоді і тільки тоді, коли $L(E) = \emptyset$, тобто $\mathrm{lr}\,(E) \leq 1$. Очевидно, що не кожна множина має лакунарний ранг. Наприклад, якщо $E = P \neq \emptyset$, то $L_\alpha(E) = E = P \neq \emptyset$ для кожного $\alpha \geq 0$. Наш перший результат дає критерій існування лакунарного рангу.

Теорема 1.1. *Нехай P — добуток топологічних просторів X та Y і $E \subseteq P$. Тоді для того, щоб множина E мала лакунарний ранг необхідно і досить, щоб вона була спадково десь лакунарною.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай множина E має лакунарний ранг $\alpha = \mathrm{lr}\,(E)$. Покажемо, що E — спадково десь лакунарна множина. Розглянемо деяку непорожню множину $S \subseteq E$ і покажемо, що існує відносно відкрита в S непорожня лакунарна підмножина. З'ясуємо спочатку, що $S \setminus L(S) \neq \emptyset$. Нехай це не так, тобто $S \subseteq L(S)$. Тоді $S \subseteq L_\xi(S)$ для кожного ξ. Зокрема, $L_\alpha(E) \supseteq L_\alpha(S) \supseteq S \neq \emptyset$, що суперечить тому, що $\alpha = \mathrm{lr}\,(E)$. Отже, $S \setminus L(S) \neq \emptyset$. Оскільки $L(S)$ відносно замкнена в S, то $U = S \setminus L(S)$ — відносно відкрита в S непорожня підмножина. Крім того, $L(U) \subseteq L(S)$ і $L(U) \subseteq U$. Тому $L(U) \subseteq U \cap L(S) = \emptyset$. Таким чином, $L(U) = \emptyset$, а, отже, множина U лакунарна.

Достатність. Нехай E — спадково десь лакунарна множина. Оскільки трансфінітна послідовність $L_\xi(E)$ спадна, то існує таке α, що $L_\alpha(E) = L_{\alpha+1}(E)$ (за α можна взяти довільне порядкове число, потужність якого більша за потужність E). Покладемо $S = L_\alpha(E)$. Тоді $L(S) = L_{\alpha+1}(E) = L_\alpha(E) = S$. Доведемо, що $S = \emptyset$. Нехай $S \neq \emptyset$. Оскільки множина E спадково десь лакунарна, то існує непорожня відносно відкрита в S лакунарна підмножина U. Але $S = L(S) = S \cap \overline{N(S)}$. Тому існує точка $p \in U \cap N(S)$. Оскільки U відкрита в S і S не лакунарна в точці p, то й U не лакунарна в точці p. Отже, $p \in L(U)$, а отже, $L(U) \neq \emptyset$, що суперечить лакунарності U. Таким чином, $L_\alpha(E) = S = \emptyset$, отже, E має лакунарний ранг $\mathrm{lr}\,(E) < \alpha$.

2. СПАДКОВА ДЕСЬ ЛАКУНАРНІСТЬ МНОЖИН ТОЧОК РОЗРИВУ CD-ФУНКЦІЙ

Нагадаємо, що грою Шоке [11] називається гра двох гравців α і β, в якій ці гравці по черзі ходять відповідно непорожніми відкритими множинами U_n і V_n деякого топологічного простору X (починає β) так, що $V_n \supseteq U_n \supseteq V_{n+1}$ для кожного n, причому гравець α виграє, якщо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset$, інакше виграє β. В [11] доведено, що простір X буде берівським тоді і тільки тоді, коли він є β-несприятливим для гри Шоке, тобто, коли гравець β не має виграшної стратегії у грі Шоке.

Нехай X і Y — метричні простори. Їх метрики ми позначатимемо відповідно $|\cdot - \cdot|_X$ і $|\cdot - \cdot|_Y$. Нагадаємо [3], що функція $f : X \to Y$ називається *ліпшицевою в точці* $x_0 \in X$, якщо існують числа $\delta = \delta(x_0) > 0$ і $C = C(x_0) > 0$ такі, що $|f(x) - f(x_0)|_Y \leq C|x - x_0|_X$, якщо $|x - x_0| < \delta$. Говоритимемо, що f *точково ліпшицева*, якщо вона ліпшицева в кожній точці $x \in X$. Очевидно, що кожна ліпшицева функція є точково ліпшицевою, а точково ліпшицева — неперервною. Якщо X і Y — нормовані простори, то кожна диференційовна за Фреше функція $f : X \to Y$ є точково ліпшицевою.

Якщо X — топологічний простір, Y — метричний простір, $f : X \to Y$ — відображення, $E \subseteq X$ і $x \in X$, то символами $\omega_f(E)$ і $\omega_f(x)$ позначатимемо коливання функції f на множині E і в точці x відповідно, які визначаються формулами

$$\omega_f(E) = \sup_{x', x'' \in E} |f(x') - f(x'')|_Y, \quad \omega_f(x) = \inf_{U - \text{окіл } x} \omega_f(U).$$

Теорема 2.1. *Нехай X — берівський простір, Y — повний метричний простір, Z — метричний простір і функція $f : X \times Y \to Z$ неперервна відносно першої змінної і точково ліпшицева відносно другої. Тоді множина $D(f)$ точок розриву функції f спадково десь лакунарна.*

Доведення. Припустимо, що множина $D(f)$ не є спадково десь лакунарною. Тоді існує непорожня множина $S \subseteq D(f)$ така, що кожна її непорожня відносно відкрита частина не є лакунарною. Нехай G — непорожня відносно відкрита підмножина S. Тоді G не є лакунарною, отже, вона не є лакунарною в деякій точці $p = (x, y) = p(G) \in G$. Це означає, що для кожного околу W точки y в Y множина $V = V(G, W) = \overline{\mathrm{pr}_X((X \times W) \cap G)}$ є околом точки x в X.

Зараз побудуємо деяку стратегію для гравця β у грі Шоке. Покладемо $G_1 = S$ і $p_1 = (x_1, y_1) = p(G_1)$. Оскільки $p_1 \in G_1 \subseteq D(f)$, то

$\omega_f(p_1) > 0$. Візьмемо $\varepsilon_1 > 0$ таке, що $2\varepsilon_1 < \omega_f(p_1)$. Далі, оскільки f^{x_1} і f_{y_1} неперервні, то існує окіл $W_1 = B(y_1, \delta_1) = \{y \in Y : |y - y_1|_Y < \delta_1\}$ точки y_1 і відкритий окіл $\widetilde{V}_1 \subseteq V(G_1, W_1)$ точки x_1 такі, що $\omega_{f^{x_1}}(W_1) \le \frac{\varepsilon_1}{4}$, $\omega_{f_{y_1}}(\widetilde{V}_1) \le \frac{\varepsilon_1}{4}$ і $\delta_1 < \frac{\varepsilon_1}{4}$. З того, що $\omega_f(p_1) > 2\varepsilon_1$, легко отримати існування точки $p_1' = (x_1', y_1') \in \widetilde{V}_1 \times W_1$ такої, що $|f(p_1) - f(p_1')|_Z \ge \varepsilon_1$. Далі, з неперервності функції $f_{y_1'}$ випливає, що існує відкритий окіл $V_1 \subseteq \widetilde{V}_1$ точки x_1' такий, що $\omega_{f_{y_1'}}(V_1) \le \frac{\varepsilon_1}{4}$. Тоді для $x \in V_1$ матимемо

$$|f(x, y_1) - f(x, y_1')|_Z \ge |f(x_1, y_1) - f(x_1', y_1')|_Z - |f(x, y_1) - f(x_1, y_1)|_Z -$$

$$-|f(x, y_1') - f(x_1', y_1')|_Z \ge \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{4} - \frac{\varepsilon_1}{4} = \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Множина V_1 і є першим кроком гравця β за своєю стратегією. Нехай $U_1 \subseteq V_1$ деяка відповідь гравця α на цей хід β. Оскільки $U_1 \subseteq V_1 \subseteq \widetilde{V}_1 \subseteq V(G_1, W_1) = \overline{\mathrm{pr}_X((X \times W_1) \cap G_1)}$, то множина $G_2 = (U_1 \times W_1) \cap G_1$ є непорожньою відносно відкритою в S. З множиною G_2 діємо так само, як і з G_1. Покладаємо $p_2 = (x_2, y_2) = p(G_2)$. Оскільки $p_2 \in G_2 \subseteq D(f)$, то існує $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ таке, що $\omega_f(p_2) > 2\varepsilon_2 > 0$. За неперервністю функцій f^{x_2} і f_{y_2} вибираємо окіл $W_2 = B(y_2, \delta_2) \subseteq W_1$ точки y_2 і відкритий окіл $\widetilde{V}_2 \subseteq U_1 \cap V(G_2, W_2)$ точки x_2 такі, що $\omega_{f^{x_2}}(W_2) \le \frac{\varepsilon_2}{8}$, $\omega_{f_{y_2}}(\widetilde{V}_2) \le \frac{\varepsilon_2}{8}$ і $\delta_2 \le \frac{\varepsilon_2}{8}$. Але $\omega_f(p_2) > 2\varepsilon_2$, тому існує $p_2' = (x_2', y_2') \in \widetilde{V}_2 \times W_2$, таке, що $|f(p_1) - f(p_1')|_Z \ge \varepsilon_2$. Тоді для $x \in V_2$ матимемо, що

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2')|_Z \ge \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{8} - \frac{\varepsilon_2}{8} > \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Множина V_2 є другим ходом гравця β згідно своєї стратегії. Нехай $U_2 \subseteq V_2$ відповідь гравця β. З того, що $U_2 \subseteq V_2 \subseteq \widetilde{V}_2 \subseteq V(G_2, W_2)$ маємо, що $\overline{\mathrm{pr}_X((X \times W_2) \cap G_2)} \supseteq U_2$. Отже, $G_3 = (U_2 \times W_2) \cap G_2$ є непорожньою відносно відкритою в S множиною.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, визначаємо деяку стратегію гравця β, причому $|f(x, y_n) - f(x, y_n')|_Z \ge \frac{\varepsilon_n}{2}$ для $x \in V_n$ та $|y_n - y_n'|_Y \le \delta_n \le \frac{\varepsilon_n}{4n}$, бо $y_n' \in W_n = B(y_n, \delta_n)$ і $\delta_n \le \frac{\varepsilon_n}{4n}$. Але ця стратегія не може бути виграшною, адже простір X берівський. Тому α може вибирати множини U_n таким чином, щоб $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n \ne \emptyset$. Візьмемо $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Оскільки $\operatorname{diam} W_n \le 2\delta_n \le \frac{\varepsilon_n}{2n} \le \frac{\varepsilon_1}{2n} \to 0$, а простір Y повний, то існує $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{W}_n$. Але $y_0, y_n' \in \overline{W}_n \subseteq B[y_n, \delta_n]$. Тому $|y_n - y_n'|_Y \le \delta_n$ і $|y_0 - y_n|_Y \le \delta_n$, а, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n' = y_0$. Функція f^{x_0} ліпшицева в точці y_0. Тому існують $C, \delta > 0$ такі, що $|f(x_0, y) - f(x_0, y_0)|_Z \leq C|y - y_0|_Y$, якщо $|y - y_0|_Y < \delta$. Тоді існує номер n_0, такий, що для $n \geq n_0$ виконуються нерівності

$$|f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0)|_Z \leq C|y - y_0|_Y$$

і

$$|f(x_0, y'_n) - f(x_0, y_0)|_Z \leq C|y - y_0|_Y.$$

Таким чином,

$$\frac{\varepsilon_n}{2} \leq |f(x_0, y_n) - f(x_0, y'_n)|_Z \leq$$

$$\leq |f(x_0, y_n) - f(x_0, y_0)|_Z + |f(x_0, y'_n) - f(x_0, y_0)|_Z \leq$$

$$\leq C(|y_n - y_0|_Y + |y'_n - y_0|_Y) \leq C(\delta_n + 2\delta_n) = 3C\delta_n \leq \frac{3C\varepsilon_n}{4n} < \frac{C\varepsilon_n}{n}.$$

Отже, $\frac{\varepsilon_n}{2} < \frac{C\varepsilon_n}{n}$, а тому $n < 2C$ для кожного $n \geq n_0$, що неможливо.

Нескладно зрозуміти, що кожна спадково десь лакунарна множина $E \subseteq X \times Y$ є ніде не щільною в $X \times Y$ і її перетин з графіком $\mathrm{Gr}g$ довільної неперервної функції $g : X \to Y$ також ніде не щільний у $\mathrm{Gr}g$. Тому попередня теорема уточнює теореми 1 і 3 з роботи [3].

3. ПОБУДОВА НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ З ДАНИМ НОСІЄМ

Почнемо з одного допоміжного твердження.

Лема 3.1. *Нехай X — топологічний простір, Y — сепарабельний метризовний простір з базою $\mathcal{V}$, $P = X \times Y$ і G — відкрита в P множина. Тоді існують послідовності відкритих в X множин U_n і множин $V_n \in \mathcal{V}$, такі, що $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (U_n \times V_n)$.*

Доведення. За [8, с. 41], виберемо зліченну базу $\mathcal{W} = \{V_1, V_2, \dots\} \subseteq \mathcal{V}$. Для кожного номера n покладемо $U_n = \bigcup \{U : U$ відкрита в X і $U \times V_n \subseteq G\}$ Зрозуміло, що U_n відкрита в X і $U_n \times V_n \subseteq G$. Отже, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (U_n \times V_n) \subseteq G$. Доведемо зворотне включення. Нехай $p = (x, y) \in G$. Візьмемо відкритий окіл U точки x і відкритий окіл V точки y, такі, що $U \times V \subseteq G$. Оскільки $\mathcal{W}$ база Y, то існує номер n такий, що $y \in V_n \subseteq V$. Тоді $U \subseteq U_n$, адже $U \times W_n \subseteq U \times V \subseteq G$. Таким чином, $p \in U_n \times V_n$.

Теорема 3.2. *Нехай X — досконало нормальний простір, $Y = \mathbb{R}^d$ в G — відкрита в $P = X \times Y$ множина. Тоді існує неперервна функція*

$f : P \to [0,1]$, *яка нескінченно диференційовна відносно другої змінної і* $G = \operatorname{supp} f = \{p \in P : f(p) \neq 0\}$.

Доведення. На просторі Y будемо розглядати евклідову метрику. Згідно з лемою 3.1, існують такі послідовності відкритих в X множин U_n і відкритих куль $V_n = B(y_n, r_n)$, що $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(U_n \times V_n)$. Покладемо

$$\psi_n(y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|y-y_n|^2 - r_n^2}} & , \quad y \in V_n; \\ 0 & , \quad y \notin V_n. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\psi_n : Y \to [0, +\infty)$ — обмежена нескінченно диференційовна функція і $\operatorname{supp} \psi_n = V_n$. Нехай

$$M_n = \max \left\{ \left| \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_d} \psi_k(y)}{\partial y_1^{i_1} \cdots \partial y_d^{i_d}} \right| : i_1 + \cdots + i_d \leq n,\, k \leq n,\, y \in Y \right\}.$$

За теоремою Веденісова [8, с. 82], існують неперервні функції $\varphi_n : X \to [0,1]$ такі, що $\operatorname{supp} \varphi_n = U_n$. Покладемо

$$f_n(x,y) = \frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{2^n(M_n+1)}, \qquad f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y).$$

Тоді при $n \geq i_1 + \cdots + i_d$ матимемо

$$\left| \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_d} f_n(x,y)}{\partial y_1^{i_1} \cdots \partial y_d^{i_d}} \right| = \frac{\varphi_n(x)}{2^n(M_n+1)} \cdot \left| \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_d} \psi_n(y)}{\partial y_1^{i_1} \cdots \partial y_d^{i_d}} \right| \leq \frac{M_n}{2^n(M_n+1)} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Таким чином, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{i_1+\cdots+i_d} f_n(x,y)}{\partial y_1^{i_1} \cdots \partial y_d^{i_d}}$ збігається рівномірно для довільних індексів $i_1, \ldots, i_d$, а отже, f нескінченно диференційовна відносно y і неперервна за сукупністю змінних. І нарешті, оскільки $\operatorname{supp} f_n = U_n \times V_n$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(U_n \times V_n) = G$, то $\operatorname{supp} f = G$.

Теорема 3.3. *Нехай X — метризовний простір, $Y = \mathbb{R}^d$, $P = X \times Y$, G — відкрита підмножина P і $\mathcal{G}$ — відкрите покриття множини G. Тоді існує неперервне нескінченно диференційовне відносно y локально скінченне в G розбиття одиниці $(\varphi_s)_{s \in S}$ підпорядковане покриттю $\mathcal{G}$.*

Доведення. За теоремою Стоуна [8, с. 414], підпростір G — паракомпактний. Тому існує локально скінченне в G відкрите покриття

$\{G_s : s \in S\}$ множини G, вписане в $\mathcal{G}$ і таке, що $\overline{G}_s \subseteq G$ для кожного $s \in S$. За теоремою 3.2, для кожного $s \in S$ існує неперервна нескінченно диференційовна відносно y функція $\widetilde{\varphi}_s : P \to [0,1]$ така, що $\operatorname{supp} \widetilde{\varphi} = G_s$. Покладемо $\varphi = \sum\limits_{s\in S} \widetilde{\varphi}_s$ і

$$\varphi_s(p) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\varphi}_s(p)}{\varphi(p)} & , \quad p \in G; \\ 0 & , \quad p \notin G. \end{cases}$$

Легко бачити, що $(\varphi_s)_{s\in S}$ — шукане розбиття одиниці.

4. ПОБУДОВА CD-ФУНКЦІЙ ІЗ ЗАМКНЕНОЮ НАВХРЕСТ НІДЕ НЕ ЩІЛЬНОЮ МНОЖИНОЮ ТОЧОК РОЗРИВУ

Наступна лема доведена в [7, п. 2.2], але для повноти викладу наведемо тут її доведення.

Лема 4.1. *Нехай X — метризовний простір, G — відкрита в X множина і $E \subseteq \operatorname{Fr} G$ — замкнена множина. Тоді існує відкрита множина $H \subseteq G$, така, що $\overline{H} \setminus G = E$.*

Доведення. Нехай ρ — метрика, що породжує топологічну структуру X. Користуючись лемою Куратовського–Цорна [8, с. 28], візьмемо максимальну $\frac{1}{n}$-відокремлену множину $E_n \subseteq E$, тобто таку, що $\rho(x,y) > \frac{1}{n}$ для довільних різних $x, y \in E_n$ і $\rho(x, E_n) \le \frac{1}{n}$ для кожного $x \in E$. Для $x \in E_n$ візьмемо відкриту непорожню множину $U_n(x)$ таку, що $\overline{U_n(x)} \subseteq B(x, \frac{1}{3n}) \cap G$. Оскільки система $\mathcal{U}_n = \{U_n(x) : x \in E_n\}$ локально скінченна (навіть дискретна), то для відкритих множин $U_n = \bigcup \mathcal{U}_n = \bigcup\limits_{x\in E_n} U_n(x)$ матимемо, що $\overline{U}_n = \bigcup\limits_{x\in E_n} \overline{U_n(x)} \subseteq B(E_n, \frac{1}{3n})$. Тоді нескладно зрозуміти, що множина $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ буде шуканою.

Нехай $P = X \times Y$ — добуток топологічних просторів. *Хрестом* множини $E \subseteq P$ називатимемо множину $\operatorname{xp} E = (\operatorname{pr}_X(E) \times Y) \cup (X \times \operatorname{pr}_Y(E))$. Казатимемо, що множина $M \subseteq P$ є *хрестом-околом точки* $p \in P$, якщо існує окіл W точки p, такий, що $W \cap \operatorname{xp}\{p\} \subseteq M$. Множину M називатимемо *хрестом-околом множини* $E \subseteq P$, якщо M – хрест-окіл кожної точки з множини E. Ми кажемо, що множина E *навхрест ніде не щільною*, якщо вона має ніде не щільний хрест-окіл. Функцію $f : X \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно першої змінної і нескінченно диференційовна відносно другої, ми називатимемо *CC^∞-функцією*.

Теорема 4.2. *Нехай X — досконало нормальний простір, $Y = \mathbb{R}^d$, G — відкрита в $P = X \times Y$ множина, $E \subseteq \operatorname{Fr} G$ — замкнена множина, причому, $P \setminus G$ — хрест-окіл E і існує множина $A \subseteq G$ така, що $\overline{A} \setminus G = E$. Тоді існує CC^∞-функція $f : P \to [0,1]$, така, що* $\operatorname{supp} f \subseteq G$ *і* $D(f) = E \subseteq f^{-1}(0)$.

Доведення. Згідно з теоремою 3.2, існують такі неперервні CC^∞-функції $\varphi, \psi : P \to [0,1]$, що $\operatorname{supp} \varphi = G$ і $\operatorname{supp} \psi = P \setminus \overline{A}$. Покладемо

$$f(p) = \begin{cases} \frac{\varphi(p)}{\varphi(p)+\psi(p)} & , \quad p \notin E; \\ 0 & , \quad p \in E. \end{cases}$$

Оскільки $\varphi^{-1}(0) = P \setminus G$ і $\psi^{-1}(0) = \overline{A}$, то $E = \overline{A} \setminus G = \varphi^{-1}(0) \cap \psi^{-1}(0)$. Таким чином, f коректно визначена на P, нескінченно диференційовна відносно y і неперервна за сукупністю змінних поза E. З того, що $\operatorname{supp} \varphi = G$, одержуємо, що $\operatorname{supp} f \subseteq G$, тобто $f(p) = 0$ на $P \setminus G$. Але $P \setminus G$ — хрест-окіл множини E. Тому f нескінченно диференційовна відносно y і неперервна відносно x в точках множини E. Отже, f є CC^∞-функцією і $D(f) \subseteq E$. Залишилось довести, що $D(f) \supseteq E$. Візьмемо $p_0 \in E$. По-перше, $f(p_0) = 0$. По-друге, оскільки $\psi(p) = 0$ на множині A, то $f(p) = 1$ на A. Але $p_0 \in \overline{A}$, бо $E = \overline{A} \setminus G$. Отже, f розривна в точці p_0.

5. ФУНКЦІЯ ЛАКУНАРНОСТІ МНОЖИНИ

Нехай X — топологічний простір, Y — метричний простір, $P = X \times Y$ і $E \subseteq P$. *Функцією лакунарності множини* E називатимемо функцію $\lambda_E : P \to [0, \infty]$, визначену правилом

$$\lambda_E(x,y) = \sup\{\varepsilon \geq 0 : (\exists U \text{ відкрита в } X,\, x \in \overline{U})((U \times B(y,\varepsilon)) \cap E = \emptyset)\}.$$

Зрозуміло, що E буде лакунарною в точці p тоді і тільки тоді, коли $\lambda_e(p) > 0$.

Теорема 5.1. *Нехай X — топологічний простір, Y — метричний простір, $P = X \times Y$ і $E \subseteq P$. Тоді функція лакунарності λ_E є напівнеперервною зверху.*

Доведення. Візьмемо деяке $\alpha \in \mathbb{R}$ і доведемо, що множина $F_\alpha = \{p \in P : \lambda_E(p) \geq \alpha\}$ замкнена. Оскільки $F_\alpha = P$ при $\alpha \leq 0$, то досить розглянути випадок $\alpha > 0$. Візьмемо деяку збіжну напрямленість точок $p_i = (x_i, y_i) \in F_\alpha$, $i \in I$ і доведемо, що $p = (x,y) = \lim\limits_{i \in I} p_i \in F_\alpha$. Візьмемо таке δ, що $0 < \delta \subseteq \frac{\alpha}{2}$. Поклавши $\varepsilon = \alpha - \delta$ матимемо, що $\lambda_E(p_i) \geq$

$\alpha > \varepsilon$, адже $p_i \in F_\alpha$. Тоді існує відкрита в X множина U_i така, що $x_i \in \overline{U}_i$ і $(U_i \times B(y_i, \varepsilon)) \cap E = \emptyset$. Оскільки $y_i \to y$, то існує $i_0 \in I$ таке, що $|y_i - y|_Y < \delta$ при $i \geq i_0$. Покладемо $U = \bigcup\limits_{i \geq i_0} U_i$. З того, що $x_i \in \overline{U}_i$, випливає, що $x \in \overline{U}$, адже $x_i \to x$. Але $|y_i - y|_Y < \delta$ при $i \geq i_0$. Тому $B(y, \varepsilon - \delta) \subseteq B(y_i, \varepsilon)$. Отже, $U \times B(y, \varepsilon - \delta) \subseteq \bigcup\limits_{i \geq i_0} (U_i \times B(y_i, \varepsilon))$. Значить, $(U \times B(y, \varepsilon - \delta)) \cap E = \emptyset$. Таким чином, $\lambda_E(p) \geq \varepsilon - \delta = \alpha - 2\delta$. Спрямовуючи $\delta \to 0$, отримаємо, що $\lambda_E(p) \geq \alpha$, тобто $p \in F_\alpha$.

6. ПОБУДОВА CD-ФУНКЦІЙ З ЛАКУНАРНОЮ МНОЖИНОЮ ТОЧОК РОЗРИВУ

Перш за все з'ясуємо, як пов'язана множина точок розриву з множинами точок розриву доданків.

Лема 6.1. *Нехай X — топологічний простір і $f, g : X \to \mathbb{R}$ — напівнеперервні знизу функції. Тоді $D(f + g) = D(f) \cup D(g)$.*

Доведення. Покладемо $h = f + g$. Включення $D(h) \subseteq D(f) \cup D(g)$ очевидне. Доведемо зворотне включення. Візьмемо $x_0 \in D(f) \cup D(g)$. Нехай для певності $x_0 \in D(f)$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного околу U точки x_0 існує $x_U \in U$ таке, що $|f(x_U) - f(x_0)| > \varepsilon$. За напівнеперервністю знизу функцій f та g, виберемо окіл U_0 точки x_0 такий, що $f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ і $g(x) > g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}$ на U_0. Тоді для довільного околу U точки x_0, такого, що $U \subseteq U_0$ матимемо, що $f(x_U) - f(x_0) > -\frac{\varepsilon}{2}$ і $|f(x_U) - f(x_0)| > \varepsilon$. Отже, $f(x_U) - f(x_0) > \varepsilon$. Але $g(x_U) - g(x_0) > -\frac{\varepsilon}{2}$. Тому $h(x_U) - h(x_0) = f(x_U) - f(x_0) + g(x_U) - g(x_0) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Отже, $x_0 \in D(h)$.

Лема 6.2. *Нехай X — топологічний простір і $f_n : X \to \mathbb{R}$ — напівнеперервні знизу функції, причому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — рівномірно збіжний на X. Тоді $D(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$.*

Доведення. Включення $D(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n) \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$ очевидне. Нехай $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$, тобто $x \in D(f_{n_0})$ для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$. Покладемо $g = \sum\limits_{n \neq n_0} f_n$. Зрозуміло, що g напівнеперервна знизу. Отже, згідно з лемою 6.1,

$$D(\sum_{n=1}^{\infty} f_n) = D(f_{n_0} + g) = D(f_{n_0}) \cup D(g) \ni x.$$

Теорема 6.3. *Нехай X — метризовний простір, $Y = \mathbb{R}^d$, E — навхрест ніде не щільна лакунарна F_σ-множина в $P = X \times Y$. Тоді існує CD-функція $f : P \to [0,1]$ така, що $D(f) = E \subseteq f^{-1}(0)$.*

Доведення. Розглянемо зростаючу послідовність замкнених множин F_n таку, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Покладемо $E_n = \{p \in F_n : \lambda_E(p) \geq \frac{2}{n}\}$. Оскільки E лакунарна, то $\lambda_E(p) > 0$ для $p \in E$. Тому $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Крім того, за теоремою 5.1, множини E_n замкнені. Простір P — досконало нормальний. Отже, існує послідовність відкритих множин $V_n \subseteq P$ така, що $\overline{V}_{n+1} \subseteq V_n$ і $\overline{E} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Далі з того, що E навхрест ніде не щільна отримуємо, що існує замкнена ніде не щільна множина M, яка є хрестом-околом множини E.

Розглянемо множину $\mathcal{W}_n$ відкритих частин W відкритої в P множини $V_n \setminus M$, таких, що $|y' - y''|_Y > \frac{1}{n}$, як тільки $p' = (x, y') \in W$ і $p'' = (x, y'') \in \overline{E}$. Нехай $W_n = \bigcup \mathcal{W}_n$. Доведемо, що $E_n \subseteq \overline{W}_n$. Візьмемо $p_0 = (x_0, y_0) \in E_n$ і розглянемо довільний відкритий окіл G точки p_0. Оскільки $\lambda_E(p_0) > \frac{2}{n}$, то існує відкрита в X множина U така, що $x_0 \in \overline{U}$ і $(U \times B(y_0, \frac{3}{2n})) \cap E = \emptyset$. Покладемо $W = (U \times B(y_0, \frac{1}{2n})) \cap ((V_n \cap G) \setminus M)$. Зрозуміло, що W — відкрита непорожня множина. Доведемо, що $W \in \mathcal{W}_n$. Візьмемо $p' = (x, y') \in W$ і $p'' = (x, y'') \in \overline{E}$. Тоді $x \in U$ і $y' \in B(y_0, \frac{1}{2n})$. Але $\overline{E} \cap (U \times B(y_0, \frac{3}{2n})) = \emptyset$. Тому $p'' = (x, y'') \notin U \times B(y_0, \frac{3}{2n})$. Таким чином, $y'' \notin B(y_0, \frac{3}{2n})$, тобто $|y'' - y_0|_Y \geq \frac{3}{2n}$. Значить,

$$|y'' - y'|_Y \geq |y'' - y_0|_Y - |y' - y_0| > \frac{3}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

а тому $W \in \mathcal{W}_n$. Отже, $G \cap W_n \supseteq W \neq \emptyset$. Значить, $p_0 \in \overline{W}_n$.

Оскільки $E_n \subseteq \overline{W}_n$, $E_n \subseteq M$ і $M \cap W_n = \emptyset$, то $E_n \subseteq \operatorname{Fr} G'_n$. За лемою 4.1, існують відкриті множини $G_n \subseteq W_n$ такі, що $\overline{G}_n \setminus W_n = E_n$. Тоді $\overline{G}_n \cap M = E_n$. Використовуючи знову лему 4.1, одержимо, що існують відкриті множини $A_n \subseteq G_n$ такі, що $\overline{A}_n \setminus G_n = E_n$. Оскільки $P \setminus G_n \supseteq P \setminus W_n \supseteq M$, то $P \setminus G_n$ — хрест-окіл множини E_n. За теоремою 4.2, існують CD-функції $f_n : P \to [0,1]$ такі, що $\operatorname{supp} f_n \subseteq G_n$ і $D(f_n) = E_n \subseteq f^{-1}(0)$. Зокрема, функції f_n напівнеперервні знизу. Покладемо $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$. За лемою 6.2 матимемо, що $D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Далі, оскільки f_n неперервні відносно x, то f також неперервна відносно x.

Перевіримо, що f диференційовна відносно y. Оскільки $G_n \subseteq W_n < V_n$ і $\cap_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n = \overline{E}$, то послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ локально скінченна на $P \setminus \overline{E}$. Далі, оскільки $f_n|_M = 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $f|_M = 0$. Але M — хрест-окіл множини E, отже, f диференційовна відносно y в точках множини E. Візьмемо, нарешті, точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \overline{E} \setminus E$ і з'ясуємо, що функція $g(y) = f(x_0, y)$ диференційовна в точці y_0. Покажемо, що диференціал $dg(y_0) = 0$. Покладемо $H_n = G_n^{x_0} = \{y \in Y : (x_0, y) \in G_n\}$, $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ і $g_n(y) = f_n(x_0, y)$. Оскільки $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n$, то $\operatorname{supp} g = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{supp} g_n \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n = H$, адже $\operatorname{supp} g_n \subseteq H_n$. Візьмемо $y \in H$. Розглянемо перший номер $n_y \in \mathbb{N}$ такий, що $y \in H_{n_y}$. Тоді $y \notin H_n$ при $n < n_y$. Отже, $g(y) = \sum\limits_{n=n_y}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n(y) \leq \sum\limits_{n=n_y}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_y-1}}$. Оскільки $(x_0, y_0) \in \overline{E}$ і $(x_0, y) \in G_{n_y} \subseteq W_{n_y}$, то $|y - y_0|_Y > \frac{1}{n_y}$. Тоді $n_y > \frac{1}{|y-y_0|_Y}$. Значить, якщо $y_0 \in \overline{H}$, то $\lim\limits_{H \ni y \to y_0} n_y = \infty$. Далі, оскільки $p_0 = (x_0, y_0) \notin G_n$ при $n \in \mathbb{N}$, адже $\overline{E} \cap G_n = \emptyset$, то $g(y_0) = 0$. Тоді

$$\frac{|g(y) - g(y_0)|}{|y - y_0|_Y} = \frac{g(y)}{|y - y_0|_Y} \leq \frac{n_y}{2^{n_y-1}} \to 0 \text{ при } H \ni y \to y_0.$$

Крім того, $g(y) = 0$ на $Y \setminus H$. Отже, $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{|g(y)-g(y_0)|}{|y-y_0|_Y} = 0$. Таким чином, $g(y) - g(y_0) = o(|y - y_0|_Y)$, а значить, $dg(y_0) = 0$.

7. ПОБУДОВА CD-ФУНКЦІЙ ЗІ СПАДКОВО ДЕСЬ ЛАКУНАРНОЮ МНОЖИНОЮ ТОЧОК РОЗРИВУ

Доведення наступної леми негайно випливає з леми 6.1.

Лема 7.1. *Нехай X — топологічний простір і $f_s : X \to [0, 1]$, $s \in S$, напівнеперервні знизу функції, причому система $\{\operatorname{supp} f_s : s \in S\}$ локально скінченна. Тоді $D(\sum\limits_{s \in S} f_s) = \bigcup\limits_{s \in S} D(f_s)$.*

Теорема 7.2. *Нехай X — метризовний простір, $Y = \mathbb{R}^d$ і E — навхрест ніде не щільна спадково десь лакунарна F_σ-множина в $P = X \times Y$. Тоді існує CD-функція $f : P \to \mathbb{R}$, така, що $D(f) = E$.*

Доведення. Доведемо теорему трансфінітною індукцією відносно лакунарного рангу $\operatorname{lr}(E)$, існування якого випливає з теореми 1.1. Випадок $\operatorname{lr}(E) = 0$ очевидний, бо тоді $E = \emptyset$. При $\operatorname{lr}(E) = 1$ матимемо, що

$L_1(E) = L(E) = \emptyset$, отже, E — лакунарна множина. Тому за теоремою 6.3 існує CD-функція $f : P \to [0,1]$ така, що $D(f) = E \subseteq f^{-1}(0)$. Зокрема, f напівнеперервна знизу.

Розглянемо $\alpha > 1$ і припустимо, що для кожної навхрест ніде не щільної спадково десь лакунарної F_σ-множини з $\mathrm{lr}\,(E) < \alpha$ існує напівнеперервна знизу CD-функція $f_E : P \to [0,1]$ така, що $D(f_E) = E$. Візьмемо деяку навхрест ніде не щільну спадково десь лакунарну F_σ-множину E з $\mathrm{lr}\,(E) = \alpha$ і побудуємо для неї таку ж функцію f_E.

Нехай $F = \bigcap\limits_{\xi<\alpha} L_\xi(E)$ і $H = E \setminus F$. Оскільки $\mathrm{lr}\,(E) = \alpha$, то $L(F) = L_\alpha(E) = \emptyset$, тобто $\mathrm{lr}\,(F) \le 1 < \alpha$. Всі множини $L_\xi(E)$ відносно замкнені в E. Для кожного $\xi < \alpha$ візьмемо відкриту в P множину G_ξ таку, що $E \setminus G_\xi = L_\xi(E)$. Покладемо $G = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} G_\xi$. Зрозуміло, що $E \setminus G = F$. За теоремою 3.3, існує неперервне за сукупністю змінних нескінченно диференційовне відносно y локально скінченне в G розбиття одиниці $(\varphi_s)_{s\in S}$, підпорядковане покриттю $\{G_\xi : \xi < \alpha\}$ множини G. Покладемо $U_s = \mathrm{supp}\,\varphi_s$, $E_s = E \cap U_s$. Зрозуміло, що для кожного $s \in S$ існує $\xi_s < \alpha$ таке, що $U_s \subseteq G_{\xi_s}$. Тоді $E_s \subseteq G_{\xi_s}$. Отже, $E_s \cap L_{\xi_s}(E) = \emptyset$, бо $E \setminus G_{\xi_s} = L_{\xi_s}(E)$. Але $L_{\xi_s}(E_s) \subseteq E_s$ і $L_{\xi_s}(E_s) \subseteq L_{\xi_s}(E)$. Тому $L_{\xi_s}(E_s) \subseteq E_s \cap L_{\xi_s}(E) = \emptyset$. Таким чином, $\mathrm{lr}\,(E_s) \le \xi_s < \alpha$. Отже, множини F і E_s, $s \in S$, мають лакунарний ранг $< \alpha$ і, зрозуміло, є навхрест ніде не щільними спадково десь лакунарними F_σ-множинами.

За індуктивним припущенням, існують напівнеперервні CD-функції $f_0 = f_F : P \to [0,1]$, $f_s = f_{E_s} : P \to [0,1]$ такі, що $D(f_0) = F$ і $D(f_s) = E_s$, $s \in S$. Далі, за теоремою 3.2, існує неперервна CD-функція $\varphi : P \to [0,1]$ така, що $\mathrm{supp}\,\varphi = G$. Покладемо $f = f_E = \frac{f_0}{2} + \frac{\varphi}{2} \sum\limits_{s\in S} \varphi_s f_s$.

З'ясуємо, що функція f шукана. Оскільки $\varphi(p) = 0$ при $p = (x,y) \notin G$ і $\varphi \ge 0$, то y є точкою мінімуму відображення φ^x, якщо $(x,y) \notin G$. Тому $d\varphi^x(y) = 0$ при $(x,y) \notin G$. Далі, оскільки $0 \le \sum\limits_{s\in S} \varphi_s f_s \le \sum\limits_{s\in S} \varphi_s \le 1$, то при $(x,y) \notin G$ функція $\varphi \sum\limits_{s\in S} \varphi_s f_s$ неперервна в точці (x,y) і $d\left(\varphi^x \sum\limits_{s\in S} \varphi_s^x f_s^x\right)(y) = 0$. Враховуючи, що сім'я $(\mathrm{supp}\,\varphi_s)_{s\in S}$ локально скінченна в G, одержимо, що f — CD-функція. Крім того, використовуючи леми 6.1 і 7.1, матимемо

$$D(f) = D(f_0) \cup D(\varphi \sum_{s\in S} \varphi_s f_s) = F \cup D(\varphi|_G \sum_{s\in S} \varphi_s|_G f_s|_G) =$$

$$= F \cup \bigcup_{s\in S} D(f_s|_G) = F \cup \bigcup_{s\in S}(E_s \cap G) = F \cup \bigcup_{s\in S} E_s = E.$$

Нарешті, оскільки функції $f_0 : P \to [0,1]$, $f_s : P \to [0,1]$, $s \in S$, напівнеперервні знизу то $f : P \to [0,1]$ також напівнеперервна знизу.

Тепер охарактеризуємо множини точок розриву CD-функцій.

Теорема 7.3. *Нехай X — метризовний берівський простір і $Y = \mathbb{R}^d$. Тоді множина $E \subseteq P = X \times Y$ буде множиною точок розриву деякої CD-функції $f : P \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли E — навхрест ніде не щільна спадково десь лакунарна F_σ-множина.*

Доведення. Достатність встановлена в теоремі 7.2. Доведемо необхідність. За теоремою 2.1 множина E спадково десь лакунарна. Зокрема, E ніде не щільна. Залишилось показати, що E — навхрест ніде не щільна. Оскільки f нарізно неперервна, то з [6] (див. також теорему 2.10.4 у [7]) випливає, що множина E є σ-локально проективно ніде не щільною, а отже, за теоремою 2.10.9 у [7], σ-навхрест ніде не щільною, тобто $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, де E_n — навхрест ніде не щільні. Нехай M_n — ніде не щільний хрест-окіл множини E_n. Тоді, оскільки E ніде не щільна, то $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (M_n \cap B(E, \frac{1}{n}))$ є ніде не щільним хрестом-околом множини E. Таким чином, E — навхрест ніде не щільна.

[1] *Герасимчук В.Г.* Розриви CD-функцій на квазінеперервних кривих // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 191–192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 36–40.

[2] *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К.* До питання про розриви нарізно диференційовних функцій багатьох змінних // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С.23–29.

[3] *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 134. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 22–29.

[4] *Колесников С.В.* Характеризация множеств точек разрыва функций с линейно непрерывными частными производными // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 1. – С.75–80.

[5] *Маслюченко В.К., Маслюченко О.В.* Побудова нарізно неперервної функції з даним коливанням // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 948–959.

[6] *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 740–747.

[7] *Маслюченко О.В.* Коливання нарізно неперервних функцій і топологічні ігри: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Чернівці, 2002. – 149 с.

[8] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1976. – 752 с.

[9] *Bögel K.* Über partiell differenzierbare Funktionen // Math. Z. – 1926. – **25**. – S. 490–495.

[10] *Kershner R.* The continuity of function of many variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – **53**, № 1. – P. 83–106.

[11] *Saint-Raymond J.* Jeux topologiques et espaces de Namioka // Proc. Amer. Soc. – 1984. – **87**. – P. 499–504.

A CHARACTERIZATION OF DISCONTINUITY POINT SETS OF CD-FUNCTIONS

Vasyl' HERASYMCHUK, Volodymyr MASLYUCHENKO, Oleksandr MASLYUCHENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsyubyns'koho Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

It is characterized discontinuity point sets of functions $f : X \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ which are continuous with respect to the first variable and differentiable with respect to the second one for a metrizable Baire space X.