Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2014. — Т.11

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2014. — V.11

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРЕДБАЧУВАНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ В МОДЕЛЯХ ЛОКАЛЬНОЇ ВОЛАТИЛЬНОСТІ

Мирослав Підкуйко[1], Сергій Підкуйко[2]

[1]*CERGE-EI, P.O. Box 882, Politických vězňů 936/7, 110 00 Praha 1, Czech Republic*
[2]*ЛНУ ім. Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів, 79000*

М. Підкуйко, С. Підкуйко. *Про наближення передбачуваної волатильності в моделях локальної волатильності* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2014. — Т.11. — С. 96–107.

Розглядається задача апроксимації Тейлора передбачуваної волатильності в термінах локальної волатильності. Використовуючи підхід, запропонований Berestycki та ін. (2004), Henry-Labordere (2005) і Gatheral та ін. (2010) для отримання наближення Тейлора передбачуваної волатильності до 3-го порядку, в роботі отримано наближення Тейлора 4-го порядку передбачуваної волатильності в термінах локальної волатильності.

M. Pidkuyko, S. Pidkuyko, *On approximation of implied volatility in local volatility models*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **11** (2014), 96–107.

The problem of Taylor's approximation of implied volatility in terms of local volatility is considered. Following the approach used by Berestycki et al. (2004), Henry-Labordere (2005) and Gatheral et al. (2010) to derive Taylor's approximation of implied volatility up to 3rd order we proceed further and derive 4th order Taylor approximation of implied volatility.

Вступ

З тих пір, як у 1973 році Фішер Блек (Black) та Маріон Скоулз (Scholes) побудували модель фінансового ринку і вивели формулу для оцінки вартості опціонів, вивчення поняття волатильності (а точніше *передбачуваної волатильності Блека-Скоулза*) стало одним з центральних завдань фахівців

2010 *Mathematics Subject Classification:* 91B99, 91G99 *УДК:* 519.2
Ключові слова і фрази: Передбачувана волатильність, локальна волатильність
E-mail: myroslav.pidkuyko@cerge-ei.cz, pidkuyko@gmail.com
Partially supported by the grant 25.1/099 of State Fund of Fundamental Research of Ukraine.

у галузі фінансової математики. І хоча модель Блека-Скоулза занадто ідеалізована і більшість припущень у ній не мають місця у реальному світі, модель дає добре уявлення про поведінку ринку загалом і про волатильність у ньому. Передбачувана волатильність Блека-Скоулза (надалі перебдачувана волатильність) отримується з ринкової вартості опціона на основі деякої моделі ціноутворення опціонів (наприклад, моделі Блека-Скоулза). Передбачувана волатильність стала настільки важливим інструментом на ринку, що для визначення вартості опціона частіше використовують саме її, а не ціну опціона, і учасники ринку визначають і торгують на ринку не безпосередніми вартостями опціонів, а передбачуваною волатильністю, зазначеною у цих опціонах.

Іншими важливими типами волатильності є *стохастична та локальна волатильності.* Оскільки у моделі локальної волатильності випадковою величиною є тільки ціна активу, то така модель є легшою для дослідження та проведення обчислень. Модель локальної волатильності широко застосовується для обчислення вартості так званих екзотичних опціонів.

Одними з перших, хто почав дослідження локальної волатильності, були Дюпіре (Dupire) та Дерман і Кані (Derman, Kani). Зокрема, Бруно Дюпіре (Dupire) у своїй праці 1994 року [8] довів існування функції локальної волатильності і вивів формулу для її обчислення, названою згодом *формулою Дюпіре*:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}\,\sigma^2 K^2\,\frac{\partial^2 C}{\partial K^2},$$

де σ — локальна волатильність, $C(K,T)$ — ціна call-опціону з страйком K та терміном виконання T.

Оскільки локальна волатильність є доволі добрим інструментом для побудови різних цінових моделей та обчислення вартості екзотичних опціонів, та враховуючи важливість на ринку передбачуваної волатильності, природно виникає задача (і потреба) виразити локальну волатильність через перебачувану. У своїй монографії 2004 року Джим Ґатерал (Gatheral) [1], спираючись на рівняння Дюпіре [8], вивів формулу для обчислення локальної волатильності через передбачувану волатильність:

$$v_L = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial T}}{1 - \dfrac{y}{\omega}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\omega} + \dfrac{y^2}{\omega}\right)\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2},$$

де $v_L = \sigma^2(K,T)$ — локальна дисперсія, $y = \ln\frac{K}{S_0}$ — log-страйк, S_0 — спот-ціна, $\omega = \sigma^2_{BS}(K,T)T$ — передбачувана дисперсія Блека-Скоулза.

Зворотня задача — виразити передбачувану волатильність через локальну — виявилась значно складнішою. Оскільки формулу локальної волатильності через передбачувану волатильність явно обернути не вдається, було запропоновано кілька підходів отримання передбачуваної волатильності в термінах локальної. Владімір Пітербарг (Piterbarg) [6] та Лейф Андерсен і Ніколас Хатчінгс (Andersen, Hutchings) [7] розробили метод усереднення параметрів. Джим Ґатерал (Gatheral) [1] запропонував метод, який назвав методом найвірогіднішого шляху (пізніше підкоригований Мартіном Келлером-Ресселом та Джозефом Тайчманном (Keller-Ressel, Teichmann) [5]), який лише недавно набув ширшого застосування у фінансовій математиці.

Ще один цікавий підхід — асимптотичний метод (передбачуваної волатильності як функції від часу виконання). У своїй статті 2004 року [3] Анрі Берестицкі, Жером Буска та Іґор Флорент (Berestycki, Busca, Florent) отримали перший член асимптотики передбачуваної волатильності (як функції локальної волатильності). П'єр Анрі-Лабордер (Henry-Labordere) у 2008 році [4] отримав другий член асимптотики. Джим Ґатерал (Gatheral) у 2009 році [2], використовуючи підхід Анрі-Лабордера (Henry-Labordere) та спираючись на метод Косаку Йошіди (Yoshida) [9], отримав третій член асимптотики передбачуваної волатильності.

У роботі, застосовуючи метод Джима Ґатерала (Gatheral) [2], отримано четвертий член асимптотики передбачуваної волатильності. Також зазначимо, що можна чисельно показати, що отримана асимптотика дає краще наближення, аніж наближення, отримані Анрі Берестицкі, Жеромом Буска, Іґором Флорентом (Berestycki, Busca, Florent), П'єром Анрі-Лабордером (Henry-Labordere) та Джимом Ґатералом (Gatheral) у [2],[3],[4].

1. Асимптотичне наближення передбачуваної волатильності

Розглянемо формулу зображення локальної волатильності через передбачувану волатильність:

$$v_L = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial T}}{\left[1 - \dfrac{y}{\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial y} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\omega} + \dfrac{y^2}{\omega^2}\right)\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2\right]}. \qquad (1)$$

Цікавою і важливою задачею є виразити передбачувану волатильність через локальну волатильність. Оскільки формулу (1) не можна явно обернути, то природно зробити це для наближення Тейлора передбачуваної волатильності. Зазначимо, що передбачувана волатильність має таку асимптотичну поведінку для малих T: $\omega = O(T)$, $T \to 0$.

Першим важливим результатом є результат Берестицкі, Буски та Флорента (Berestycki, Busca, Florent) [3]. Рівняння (1) вони подали у вигляді:

$$v_L = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial T}}{\left(1 - \dfrac{y}{2\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + O(T)}, \quad T \to 0. \qquad (2)$$

Підставляючи

$$\omega = \sigma_{BS}(y,0)^2 T + O\big(T^2\big), \quad T \to 0,$$
$$v_L = \sigma(y,0)^2 T + O\big(T^2\big), \qquad T \to 0,$$

і здійснюючи заміну $u = \frac{1}{\sigma_{BS}(y,0)}$, отримуємо асиптотичну формулу:

$$\sigma(y,0)^2 \sim \frac{\frac{1}{u^2}}{\left[1 + \frac{y}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2} = \frac{1}{\left[\frac{\partial}{\partial y}(yu)\right]^2}, \quad T \to 0.$$

Звідси маємо:

$$\frac{\partial}{\partial y}(yu) \sim \frac{1}{\sigma(y,0)} \Longrightarrow \int_0^y \frac{\partial}{\partial y}(yu)dy \sim \int_0^y \frac{dy}{\sigma(y,0)}. \tag{3}$$

Оскільки

$$\int_0^y \frac{\partial}{\partial y}(yu)dy = yu = \ln\frac{K}{S_0}\frac{1}{\sigma_{BS}(y,0)}, \qquad \int_0^y \frac{dy}{\sigma(y,0)} = \int_{S_0}^K \frac{dS}{S\sigma(S,0)},$$

то з (3) отримуємо BBF-наближення (Berestycki, Busca, Florent):

$$\frac{1}{\sigma_{BS}(K,T)} \approx \frac{1}{\sigma_{BS,0}(y)} := \frac{1}{\ln K/S_0}\int_{S_0}^K \frac{dS}{S\sigma(S,0)}.$$

Наступний важливий результат у дослідженні цієї задачі отримав Анрі-Лабордер (Henry-Labordere) [4]. У розкладі $\sigma_{BS}(y,T)$ з точністю до $O\big(T^2\big)$

$$\sigma_{BS}(y,T) = \sigma_{BS,0}(y) + \sigma_{BS,1}(y)T + O(T^2), \quad T \to 0,$$

Анрі-Лабордер отримав формулу для $\sigma_{BS,1}(y)$:

$$\sigma_{BS,1}(y) = \frac{\sigma^3_{BS,0}(y)}{y^2}\left(\ln\frac{\sqrt{\sigma(0{,}0)\sigma(y{,}0)}}{\sigma_{BS,0}(y)} - \int_0^k \frac{\partial_t\sigma(x,t)|_{t=0}}{\sigma(x{,}0)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sigma_{BS,0}(x)}\right)dx\right),$$

де $\sigma_{BS,0}(y)$ — BBF-наближення, отримане раніше.

Застосовуючи метод Йошіди (Yoshida) [9], який також був використаний Анрі-Лабордером [4], Ґатерал (Gatheral, Hsu, Laurence, Ouyang, Andwang) [2] отримав наступний член асимптотики

$$\sigma_{BS}(t,T) = \sigma_{BS,0}(t) + \sigma_{BS,1}(t)T + \sigma_{BS,2}(t)T^2 + O(T^3), \quad T \to 0,$$

передбачуваної волатильності

$$\sigma_{BS,2}(t) = -\frac{3\sigma_{BS,1}(t)}{d^2} + \frac{3\sigma^2_{BS,1}(t)}{2\sigma_{BS,0}(t)} + \frac{\xi^3}{8d^5} + \frac{\xi}{d^3}\left[\frac{a_t(K,t)}{a(K,t)} + \frac{u_1(s,K,t)}{u_0(s,K,t)}\right],$$

де
$$\xi = -y, \quad a(K,t) = K\sigma(K,t), \quad d(K,S_0,t) = \int_K^{S_0} \frac{d\eta}{a(\eta,t)},$$
$u_0(S_0,K,t)$, $u_1(S_0,K,t)$ обчислюються за формулами:
$$u_0(S_0,K,t) = \sqrt{\frac{a(S_0,t)}{a(K,t)}} \exp\left[-\int_K^{S_0} \frac{b(\eta,t)}{a(\eta,t)^2} d\eta - \int_K^{S_0} \frac{d_t(K,\eta,t)}{a(\eta,t)} d\eta\right],$$
$$u_1(S_0,K,t) = \frac{u_0(S_0,K,t)}{d(K,S_0,t)} \int_K^{S_0} \frac{1}{u_0(\eta,K,t)} \left(\frac{1}{2} a(S_0,t)^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial {S_0}^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) \frac{d\eta}{a(\eta,t)},$$
де $\sigma_{BS,0}, \sigma_{BS,1}$ — BBF-наближення та наближення Анрі-Лабордера відповідно.

У нашій роботі, спираючись на метод Ґатерала, отримано наступний член $\sigma_{BS,3}$ асимптотики передбачуваної волатильності:
$$\sigma_{BS}(t,T) = \sigma_{BS,0}(t) + \sigma_{BS,1}(t)T + \sigma_{BS,2}(t)T^2 + \sigma_{BS,3}(t)T^3 + O\big(T^4\big), \quad T \to 0.$$

2. Основний результат

Теорема 1. *Нехай ціна деякого базового активу задовільняє стохастичне диференціальне рівняння*
$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma(S_t,t) dW_t,$$
де $\sigma(S_t,t)$ — функція локальної волатильності, W_t — деякий вінерівський процес.

Нехай $C(S_0,K,T)$ позначає вартість деякого європейського call-опціону зі спот-ціною S_0, страйк-ціною K та терміном виконання T, $C_{BS}(S_0,K,\sigma,T)$ — формулу Блека-Скоулза для цього call-опціону, σ_{BS} — передбачувану волатильність Блека-Скоулза, тобто
$$C(S_0,K,T) = C_{BS}(S_0,K,\sigma_{BS},T).$$
Нехай
$$\sigma_{BS}(t,T) = \sigma_{BS,0}(t,T) + \sigma_{BS,1}(t,T)\,T + \sigma_{BS,2}(t,T)\,T^2 + \sigma_{BS,3}(t,T)\,T^3 + O\big(T^4\big),$$
при $T \to 0$. Тоді
$$\sigma_{BS,3} =$$
$$= \frac{\sigma^3_{BS,0}}{\xi^2}\left[\frac{15a(K,t) + 5d^2 a_t(K,t)}{d^4 a(K,t)} + \frac{a_{tt}(K,t)}{2a(K,t)} + \left(\frac{5}{d^2} + \frac{a_t(K,t)}{a(K,t)}\right)\frac{u_1(s,K,t)}{u_0(s,K,t)} + \frac{u_2(s,K,t)}{u_0(s,K,t)}\right] +$$
$$+ \frac{\sigma_{BS,0}}{2}\left(-2\frac{\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}} + 2\left(\frac{\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}}\right)^2\right) - \frac{\xi^2}{2\sigma_{BS,0}}\left(\frac{2\sigma_{BS,1}\sigma_{BS,2}}{\sigma^2_{BS,0}} - \frac{2\sigma^3_{BS,1}}{\sigma^3_{BS,0}}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2\sigma^2_{BS,0}}\left(3\sigma^2_{BS,0}\sigma_{BS,1} + \sigma^5_{BS,0}\left(-\frac{3}{\xi^2} - \frac{1}{8}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{\xi^2}\left(3\sigma_{BS,0}\sigma^2_{BS,1} + 3\sigma^2_{BS,0}\sigma_{BS,2} - 5\sigma^4_{BS,0}\sigma_{BS,1}\left(\frac{3}{\xi^2} + \frac{1}{8}\right) + \sigma^7_{BS,0}\left(\frac{15}{\xi^4} + \frac{5}{8\xi^2} + \frac{1}{128}\right)\right),$$

де $\sigma_{BS,0} = \dfrac{\xi}{d}$ — *BBF-наближення,*

$$\sigma_{BS,1} = \frac{\xi}{d^3} \ln \left[\frac{a(K,t)\, u_0(s,K,t)\, d}{\xi \sqrt{sK}} \right]$$

— *наближення Анрі-Лабордера,*

$$\sigma_{BS,2} = -\frac{3\sigma_{BS,1}}{d^2} + \frac{3\sigma_{BS,1}^2}{2\sigma_{BS,0}} + \frac{\xi^3}{8d^5} + \frac{\xi}{d^3} \left[\frac{a_t(K,t)}{a(K,t)} + \frac{u_1(s,K,t)}{u_0(s,K,t)} \right]$$

— *наближення Ґатерала,*

$$a(s,t) = s\,\sigma(s,t), \quad d(K,s,t) = \int_K^s \frac{d\eta}{a(\eta,t)}, \quad \xi = \ln \frac{s}{K},$$

а функції $u_i(s,K,t)$ *обчислюються за формулами:*

$$u_0(s,K,t) = \sqrt{\frac{a(s,t)}{a(K,t)}} \exp \left[-\int_K^s \frac{d_t(K,\eta,t)}{a(\eta,t)} d\eta \right],$$

$$u_i(s,K,t) = \frac{u_0(s,K,t)}{d(K,s,t)^i} \int_K^s \frac{d(K,\eta,t)^{i-1}}{u_0(\eta,K,t)} \left(\frac{1}{2}\, a(\eta,t)^2\, \frac{\partial^2 u_{i-1}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_{i-1}}{\partial t} \right) \frac{d\eta}{a(\eta,t)}$$

для $i = 1,\, 2$.

3. Доведення основного результату

Нехай дано одновимірне параболічне диференціальне рівняння

$$u_t + \mathcal{L}u \; = u_t + \frac{1}{2} a(s,t)^2 u_{ss} + b(s,t) u_s + c(s,t) u = 0, \tag{1}$$

де u_t, u_{ss}, u_s — відповідні частинні похідні.

Лема 1. *Нехай* $p(s,t,K,T)$ *позначає фундаментальний розв'язок рівняння (1). Тоді*

$$p(s,t,K,T) = \frac{e^{-d(K,s,t)^2/2(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\; a(K,T)} \left[\sum_{i=0}^{k} u_i(s,K,t)(T-t)^i + o\big((T-t)^k\big) \right] \tag{2}$$

при $t \to T$, *де*

$$d(K,s,t) = \int_K^s \frac{d\eta}{a(\eta,t)},$$

а коефіцієнти u_i *задаються формулами:*

$$u_0(s,K,t) = \sqrt{\frac{a(s,t)}{a(K,t)}} \exp \left[-\int_K^s \frac{b(\eta,t)}{a(\eta,t)^2} d\eta - \int_K^s \frac{d_t(K,\eta,t)}{a(\eta,t)} d\eta \right], \tag{3}$$

$$u_i(s,K,t) = \frac{u_0(s,K,t)}{d(K,s,t)^i} \int_K^s \frac{d(K,\eta,t)^{i-1}}{u_0(\eta,K,t)} \Big(\mathcal{L} u_{i-1} + \frac{\partial u_{i-1}}{\partial t} \Big) \frac{d\eta}{a(\eta,t)},\; i{=}1,...,k. \tag{4}$$

Доведення. Див. роботу Косаку Йошіди (Yoshida) [9]. □

Зауваження 1. *Якщо* $a(s,t) = s\,\sigma(s,t)$, *то* $\sigma(s,t)$ *називається* функцією локальної волатильності *або просто* локальною волатильністю.

Зауваження 2. *Для рівняння Блека-Скоулза* $a(s,t) = s\,\sigma_{BS}$, $b(s,t) = c(s,t) = 0$, *де* $\sigma_{BS} = \sigma_{BS}(K,T)$ *називається* передбачуваною волатильністю *або* волатильністю Блека-Скоулза.
Згідно з лемою 1 коефіцієнти u_k^{BS} *обчислюються за формулами*

$$u_k^{BS}(s,K) = \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\sigma_{BS}^2}{8}\right)^k\sqrt{\frac{s}{K}}, \quad k = 0,1,\ldots,$$

а щільність Блека-Скоулза $p_{BS}(s,K,\tau)$, *де* $\tau = T - t$, *набуває вигляду*

$$p_{BS}(s,K,\tau) = \frac{\exp\left[-\dfrac{(\ln s - \ln K)^2}{2\sigma_{BS}^2\tau}\right]}{\sqrt{2\pi\tau}\,\sigma_{BS}K}\sqrt{\frac{s}{K}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\sigma_{BS}^2\tau}{8}\right)^k.$$

Нехай $C(s,K,t,T)$ позначає вартість деякого європейського call-опціону.

Лема 2. *Для функції* $C(s,K,t,T)$ *справедлива така асимптотична формула:*

$$C(s,K,t,T) - (s-K)^+ =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{i=0}^{k}\left(\int_t^T a(K,u)e^{\frac{-d(K,s,t)^2}{2(u-t)}}(u-t)^{i-\frac{1}{2}}du\right)u_i(s,K,t) + r_k, \quad (5)$$

де $r_k = o\left(\int_t^T a(K,u)e^{\frac{-d(K,s,t)^2}{2(u-t)}}(u-t)^{k-\frac{1}{2}}\,du\right), \quad t \to T.$

Доведення. За формулою Карра-Джарроу для вартості call-опціону

$$C(s,K,t,T) = (s-K)^+ + \frac{1}{2}\int_t^T a(K,u)^2 p(s,t,K,u)\,du.$$

Підставляючи в цю формулу вираз для щільності $p(s,t,K,u)$ з леми 1, отримуємо наше твердження. □

Зауваження 3. *Для рівняння Блека-Скоулза формула (5) набуває вигляду*

$$C_{BS}(s,K,t,T) - (s-K)^+ = \frac{\sqrt{sK}\,\sigma_{BS}}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\frac{\sigma_{BS}^2}{8}\Big)^k\mathcal{U}_k(d_{BS},T-t) =$$
$$= \frac{\sqrt{sK}\,\sigma_{BS}}{2\sqrt{2\pi}}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}\Big(\frac{\sigma_{BS}^2}{8}\Big)^i\mathcal{U}_i(d_{BS},T-t) + o\big((T-t)^{k+\frac{3}{2}}\big), \quad t \to T, \quad (6)$$

де $d_{BS} = d_{BS}(K,s) = \dfrac{1}{\sigma_{BS}} \ \ln \dfrac{s}{K}$,

$$\mathcal{U}_i(\omega,\tau) = \int_0^\tau u^{i-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{2u}}\, du, \quad i = 0, 1, 2 \dots . \tag{7}$$

Лема 3. *При $\tau \to 0_+$ функції $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ мають вигляд:*

$$\mathcal{U}_0(\omega,\tau) = 2\left[\frac{\tau^{3/2}}{\omega^2} - 3\frac{\tau^{5/2}}{\omega^4} + 15\frac{\tau^{7/2}}{\omega^6} + o\big(\tau^{7/2}\big)\right] e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}};$$
$$\mathcal{U}_1(\omega,\tau) = 2\left[\frac{\tau^{5/2}}{\omega^2} - 5\frac{\tau^{7/2}}{\omega^4} + o\big(\tau^{7/2}\big)\right] e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}};$$
$$\mathcal{U}_2(\omega,\tau) = 2\left[\frac{\tau^{7/2}}{\omega^2} + o\big(\tau^{7/2}\big)\right] e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}.$$

Доведення. Зауваження 1. $\mathcal{U}_0(\omega,\tau) = 2\sqrt{\tau} e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}} - 2\omega \displaystyle\int_{\frac{\omega}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$

Зробимо в інтегралі заміну і проінтегруємо один раз частинами:

$$\mathcal{U}_0(\omega,\tau) = \int_0^\tau u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{2u}}\, du = \left[x = \frac{\omega}{\sqrt{u}}, du = -2\frac{\omega^2}{x^3}dx\right] = 2\omega \int_{\frac{\omega}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} \frac{dx}{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} =$$
$$= 2\omega\left(-\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{\frac{\omega}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} - 2\omega \int_{\frac{\omega}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\sqrt{\tau} e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}} - 2\omega \int_{\frac{\omega}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Зауваження 2. $\mathcal{U}_0(\omega,\tau) = 2\left[\dfrac{\tau^{3/2}}{\omega^2} - 3\dfrac{\tau^{5/2}}{\omega^4} + 15\dfrac{\tau^{7/2}}{\omega^6} + o\big(\tau^{7/2}\big)\right] e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}.$

Скористаємося зауваженням 1:

$$\int_{\frac{\omega}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \left[x - \frac{\omega}{\sqrt{\tau}} = y\right] =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(y^2 + \frac{2\omega}{\sqrt{\tau}}y + \frac{\omega^2}{\tau}\right)} dy = \left[y = \frac{\sqrt{\tau}}{\omega} z\right] = \frac{\sqrt{\tau}}{\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{2\omega^2}z^2 - z} dz.$$

За формулою Тейлора,

$$e^{-\frac{\tau}{2\omega^2}z^2} = 1 - \frac{\tau}{2\omega^2}\, z^2 + \frac{\tau^2}{8\omega^4}\, z^4 - \frac{\tau^3}{48\omega^6}\, z^6 + r_4,$$

де для залишку r_4 справедлива така оцінка:

$$|r_4| \le C\tau^4 z^8, \quad C \in \mathbb{R}, \quad |Cz^8 e^{-z}| \le C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in (0, +\infty).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\tau}}{\omega}e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{2\omega^2}z^2-z}dz = \\
&\quad=\frac{\sqrt{\tau}}{\omega}e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}\int_0^\infty \Big(1-\frac{\tau}{2\omega^2}\,z^2+\frac{\tau^2}{8\omega^4}\,z^4-\frac{\tau^3}{48\omega^6}\,z^6\Big)e^{-z}\,dz+O\big(\tau^4\big)= \\
&\quad\quad=\frac{\sqrt{\tau}}{\omega}e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}\Big(1-\frac{\tau}{2\omega^2}\,2!+\frac{\tau^2}{8\omega^4}\,4!-\frac{\tau^3}{48\omega^6}\,6!\Big)+O\big(\tau^4\big)= \\
&\quad\quad\quad=\frac{\sqrt{\tau}}{\omega}e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}\Big(1-\frac{\tau}{\omega^2}+3\,\frac{\tau^2}{\omega^4}-15\,\frac{\tau^3}{\omega^6}\Big)+O\big(\tau^4\big),\quad \tau\to 0. \qquad (8)
\end{aligned}$$

У передостанній рівності використано значення Γ-функції Ейлера для натурального аргумента. Підставимо вираз (8) у формулу для $\mathcal{U}_0$ у зауваженні 1:

$$\mathcal{U}_0(\omega,\tau)=2\bigg[\frac{\tau^{3/2}}{\omega^2}-3\frac{\tau^{5/2}}{\omega^4}+15\frac{\tau^{7/2}}{\omega^6}+o\big(\tau^{7/2}\big)\bigg]e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}},\quad \tau\to 0.$$

Зауваження 3. $\mathcal{U}_1(\omega,\tau)=\dfrac{2}{3}\,\tau^{3/2}e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}-\dfrac{\omega^2}{3}\,\mathcal{U}_0(\omega,\tau).$
Проінтегруємо один раз частинами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1(\omega,\tau)&=\int_0^\tau u^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}\,du= \\
&=\frac{2}{3}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}u^{3/2}\Big|_0^\tau-\frac{2}{3}\int_0^\tau u^{3/2}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}\frac{\omega^2}{2u^2}\,du=\frac{2}{3}\tau^{3/2}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}-\frac{\omega^2}{3}\mathcal{U}_0(\omega,\tau).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\mathcal{U}_1(\omega,\tau)=2\bigg[\frac{\tau^{5/2}}{\omega^2}-5\frac{\tau^{7/2}}{\omega^4}+o\big(\tau^{7/2}\big)\bigg]e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}},\quad \tau\to 0.$$

Зауваження 4. $\mathcal{U}_2(\omega,\tau)=\dfrac{2}{5}\,\tau^{5/2}\,e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}}-\dfrac{\omega^2}{5}\,\mathcal{U}_1(\omega,\tau).$
Проінтегруємо один раз частинами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_2(\omega,\tau)&=\int_0^\tau u^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}\,du= \\
&=\frac{2}{5}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}u^{5/2}\Big|_0^\tau-\frac{2}{5}\int_0^\tau u^{5/2}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}\frac{\omega^2}{2u^2}\,du=\frac{2}{5}\tau^{5/2}e^{-\frac{\omega^2}{2u}}-\frac{\omega^2}{5}\mathcal{U}_1(\omega,\tau).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\mathcal{U}_2(\omega,\tau)=2\bigg[\frac{\tau^{7/2}}{\omega^2}+o\big(\tau^{7/2}\big)\bigg]e^{-\frac{\omega^2}{2\tau}},\quad \tau\to 0.$$

□

Лема 4. *Інтеграл у формулі (5) можна подати у вигляді:*

$$\int_t^T a(K,u)e^{\frac{-d(K,s,t)^2}{2(u-t)}}(u-t)^{i-\frac{1}{2}}du =$$
$$= a(K,t)\mathcal{U}_i(d(K,s,t),T-t) + a_t(K,t)\mathcal{U}_{i+1}(d(K,s,t),T-t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,a_{tt}(K,t)\mathcal{U}_{i+2}(d(K,s,t),T-t) + o\big((T-t)^{i+\frac{5}{2}}\big), \quad t \to T. \quad (9)$$

Доведення. Застосовуючи формулу Тейлора до функції $a(K,u)$ в околі точки t, отримуємо:

$$a(K,u) = a(K,t) + a_t(K,t)(u-t) + \frac{1}{2}\,a_{tt}(K,t)(u-t)^2 + r_2(K,t,u), \quad (10)$$

де для залишкового члена $r_2(K,t,u)$ справедлива така (рівномірна) оцінка:

$$\exists M > 0 \quad |r_2| \le M(u-t)^3, \quad t \in (0,T), \;\; u \in (t,T). \quad (11)$$

Використовуючи (11) і нерівність $e^{\frac{-d(K,s,t)^2}{2(u-t)}} \le 1$, маємо оцінку:

$$\left|\int_t^T r_2(K,t,u)e^{\frac{-d(K,s,t)^2}{2(u-t)}}(u-t)^{i-\frac{1}{2}}\,du\right| \le \frac{M}{i+\frac{7}{2}}\,(T-t)^{i+\frac{7}{2}}. \quad (12)$$

Підставляючи тепер розклад (10) в інтеграл (9) і враховуючи (12), отримуємо твердження леми. □

Лема 5. *Волатильність Блека-Скоулза і локальна волатильність пов'язані таким асимптотичним співвідношенням:*

$$\sqrt{sK}\Big[\sigma_{BS}\mathcal{U}_0(d_{BS},T-t) - \frac{\sigma_{BS}^3}{2^3}\mathcal{U}_1(d_{BS},T-t) + \frac{\sigma_{BS}^5}{2^7}\mathcal{U}_2(d_{BS},T-t)\Big] =$$
$$= \Big[a(K,t)\mathcal{U}_0(d,T-t) + a_t(K,t)\mathcal{U}_1(d,T-t) + \frac{1}{2}\,a_{tt}\mathcal{U}_2(d,T-t)\Big]u_0(s,K,t) +$$
$$+ \big[a(K,t)\mathcal{U}_1(d,T-t) + a_t(K,t)\mathcal{U}_2(d,T-t)\big]u_1(s,K,t) +$$
$$+ a(K,t)\mathcal{U}_2(d,T-t)u_2(s,K,t) + o\big((T-t)^{7/2}\big), \quad t \to T. \quad (13)$$

Доведення. Твердження леми отримуємо, використовуючи означення передбачуваної волатильності, прирівнюючи теоретичну (6) та ринкову (5) вартості call-опціонів з точністю до членів порядку $o\big((T-t)^{7/2}\big)$, $t \to T$. □

Отже, нехай $s \neq K$.

$$d_{BS} = \frac{\xi}{\sigma_{BS}}, \quad \xi = \ln\frac{s}{K}. \quad (14)$$

Подамо функцію $\frac{1}{\sigma_{BS}}$ у вигляді $\dfrac{1}{\sigma_{BS}} = \dfrac{1}{\sigma_{BS,0}^2(\frac{\sigma_{BS}}{\sigma_{BS,0}})^2}$ і розвинемо функцію $\frac{\sigma_{BS}}{\sigma_{BS,0}}$ в ряд по τ :

$$\frac{\sigma_{BS}}{\sigma_{BS,0}} = 1 + \frac{\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}}\tau + \frac{\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}}\tau^2 + \frac{\sigma_{BS,3}}{\sigma_{BS,0}}\tau^3 + \dots .$$

Позначимо $\alpha_i = \frac{\sigma_{BS,i}}{\sigma_{BS,0}}$. Тоді

$$\left(\frac{1}{\frac{\sigma_{BS}}{\sigma_{BS,0}}}\right)^2 = 1+(-2\alpha_1)\tau+(3\alpha_1^2-2\alpha_2)\tau^2+(-4\alpha_1^3+6\alpha_1\alpha_2-2\alpha_3)\tau^3+o\big(\tau^3\big), \quad \tau\to 0.$$

Використовуючи формули для $\mathcal{U}_0(\omega,\tau)$,$\mathcal{U}_1(\omega,\tau)$,$\mathcal{U}_2(\omega,\tau)$, отримані в лемі 3 та співвідношення (14), ліва частина рівності (13) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{sK}}{\xi^2}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_{BS,0}^2\tau}+\frac{\xi^2\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}^3}}\times\\
&\times\Bigg[\sigma_{BS,0}^3+\Bigg(3\sigma_{BS,0}^2\sigma_{BS,1}-\frac{\xi^2\sigma_{BS,0}}{2}\left[3\Big(\frac{\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}}\Big)^2-\frac{2\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}}\right]-\sigma_{BS,0}^5\left[\frac{3}{\xi^2}+\frac{1}{8}\right]\Bigg)\tau+\\
&+\Bigg(\sigma_{BS,0}^7\left(\frac{15}{\xi^4}+\frac{5}{8\xi^2}+\frac{1}{128}\right)-5\sigma_{BS,0}^4\sigma_{BS,1}\left(\frac{3}{\xi^2}+\frac{1}{8}\right)+3\sigma_{BS,0}^2\sigma_{BS,2}+3\sigma_{BS,0}\sigma_{BS,1}^2-\\
&\quad-\frac{\xi^2}{2\sigma_{BS,0}^2}\Bigg(3\left(\frac{\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}}\right)^2-\frac{2\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}}\Bigg)\left(3\sigma_{BS,0}^2\sigma_{BS,1}-\sigma_{BS,0}^5\left(\frac{3}{\xi^2}+\frac{1}{8}\right)\right)+\\
&\quad+\sigma_{BS,0}^3\Bigg(\frac{\xi^4}{8\sigma_{BS,0}^4}\Big(3\Big(\frac{\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}}\Big)^2-\frac{2\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}}\Big)^2+\\
&\quad+\frac{\xi^2}{2\sigma_{BS,0}^2}\Big(-\frac{4\sigma_{BS,1}^3}{\sigma_{BS,0}^3}+\frac{6\sigma_{BS,1}\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}^2}-\frac{2\sigma_{BS,3}}{\sigma_{BS,0}}\Big)\Bigg)\Bigg)\tau^2\Bigg]
\end{aligned}\tag{15}$$

З іншого боку, права частина рівності (13) має вигляд:

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{d^2}{2(T-t)}}\Bigg(\Big[a(K,t)\Big(\frac{1}{d^2}-\frac{3\tau}{d^4}+\frac{15\tau^2}{d^6}\Big)+a_t(K,t)\Big(\frac{\tau}{d^2}+\frac{5\tau^2}{d^4}\Big)+a_{tt}(K,t)\frac{\tau^2}{2d^2}\Big]u_0(s,K,t)+\\
&\quad+\Big[a(K,t)\Big(\frac{\tau}{d^2}+\frac{5\tau^2}{d^4}\Big)+a_t(K,t)\frac{\tau^2}{d^2}\Big]u_1(s,K,t)+\Big[a(K,t)\frac{\tau^2}{d^2}\Big]u_2(s,K,t)\Bigg).
\end{aligned}\tag{16}$$

Прирівнявши члени в показниках експонент у виразах (15) та (16), отримуємо формулу для $\sigma_{BS,0}$:

$$\sigma_{BS,0} = \frac{\ln\frac{s}{K}}{\int_K^s\frac{d\eta}{a(\eta,t)}}.$$

Прирівнюючи константи у виразах (15) та (16), отримуємо формулу для $\sigma_{BS,1}$:

$$\sigma_{BS,1} = \frac{\xi\ln\left[\frac{a(K,t)u_0(s,K,t)d(K,s,t)}{\xi\sqrt{sK}}\right]}{d(K,s,t)^3}.$$

Прирівнюючи члени при τ у виразах (15) та (16), отримуємо формулу для $\sigma_{BS,2}$:

$$\sigma_{BS,2} = -\frac{3\sigma_{BS,1}}{d^2} + \frac{3\sigma_{BS,1}^2}{2\sigma_{BS,0}} + \frac{\xi^3}{8d^5} + \frac{\xi}{d^3}\left[\frac{a_t(K,t)}{a(K,t)} + \frac{u_1(s,K,t)}{u_0(s,K,t)}\right].$$

Прирівнюючи, нарешті, члени при степенях τ^2 у виразах (15) та (16), отримуємо формулу для $\sigma_{BS,3}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{BS,3} = \frac{\sigma_{BS,0}^3}{\xi^2}\Bigg(&\frac{15a(K,t)+5d^2a_t(K,t)}{d^4a(K,t)} + \frac{a_{tt}(K,t)}{2a(K,t)} + \\ &+\left[\frac{5}{d^2} + \frac{a_t(K,t)}{a(K,t)}\right]\frac{u_1(s,K,t)}{u_0(s,K,t)} + \frac{u_2(s,K,t)}{u_0(s,K,t)}\Bigg) + \\ +\frac{\sigma_{BS,0}}{2}\left[-2\frac{\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}} + 2\Big(\frac{\sigma_{BS,1}}{\sigma_{BS,0}}\Big)^2\right] &- \frac{\xi^2}{2\sigma_{BS,0}}\left(\frac{2\sigma_{BS,1}\sigma_{BS,2}}{\sigma_{BS,0}^2} - \frac{2\sigma_{BS,1}^3}{\sigma_{BS,0}^3}\right)^2 + \\ &+\frac{1}{2\sigma_{BS,0}^2}\left(3\sigma_{BS,0}^2\sigma_{BS,1} + \sigma_{BS,0}^5\Big(-\frac{3}{\xi^2} - \frac{1}{8}\Big)\right) + \\ +\frac{1}{\xi^2}\Bigg[3\sigma_{BS,0}\sigma_{BS,1}^2 + 3\sigma_{BS,0}^2\sigma_{BS,2} - 5\sigma_{BS,0}^4\sigma_{BS,1}&\Big(\frac{3}{\xi^2}+\frac{1}{8}\Big) + \sigma_{BS,0}^7\Big(\frac{15}{\xi^4} + \frac{5}{8\xi^2} + \frac{1}{128}\Big)\Bigg].\end{aligned}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. J. Gatheral, *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*, New Jersey: John Wiley & Sons (2006), 179p.
2. J. Gatheral, E. Hsu, P. Laurence, C. Ouyang, T. Wang, *Asymptotics of Implied Volatility in Local Volatility Models*, New York: Bank of America Merill Lynch, 38p. [Citet: 2010, Available from: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1542077].
3. H. Berestycki, J. Busca, I. Florent, *Computing the Implied Volatility in Stochastic Volatility Models*, Communications on Pure and Applied Mathematics **57** (2004), 1-22.
4. P. Henry-Labordere, *Analysis, Geometry, and Modeling in Finance: Advanced Methods in Option Pricing*, London: CRC Press (2009), 383p.
5. M. Keller-Ressel, J. Teichmann, *A Remark on Gatheral's Most-likely Path Approximation of Implied Volatility*, Berlin: Working Paper Series, 4p. [Citet: 2009, Available from: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1499082].
6. V. Piterbarg, *Stochastic Volatility Model with Time-dependent Skew*, Applied Mathematical Finance **12** (2005), 147-185.
7. L. Andersen, N. Hutchings, *Parameter Averaging of Quadratic SDEs With Stochastic Volatility*, New York: Bank of America Securities, 35p. [Citet: 2009, Available from: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1339971].
8. B. Dupire, *Pricing with a Smile*, Risk Magazine **7** (1994), 18-20.
9. K. Yoshida, *On the fundamental solution of the parabolic equation in a Riemannian space*, Osaka Mathematical Journal **1**:1 (1953).

Надійшло 21.04.2014