ГЕОДЕЗІЙНІ ПОТОКИ НА СФЕРІ S^2 З ДОДАТКОВИМ КУБІЧНИМ ЗА ІМПУЛЬСАМИ ПЕРШИМ ІНТЕГРАЛОМ

©2005 р. Андрій ВУС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 27 квітня 2005 р.

Робота присвячена проблемі повної інтегровності геодезійних потоків на двовимірній сфері. Розглянуто питання існування додаткового першого інтегралу у вигляді кубічного за імпульсами полінома і отримано явний вигляд відповідної гладкої рімановової метрики на многовиді.

У теорії скінченновимірних гамільтонових динамічних систем і досі є велика кількість відкритих проблем. Однією з них є проблема інтегровності геодезійних потоків ріманових метрик на сфері S^2.

Нагадаємо, що на довільному гладкому многовиді M з рімановою метрикою ds^2 можна запровадити геодезійний потік — гамільтонову систему з гамільтоніаном $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|\vec{p}\|^2$, де $\vec{p}$ — вектор узагальнених імпульсів і $\|\cdot\|$ — норма на дотичному просторі, індукована метрикою ds^2. Геодезійний потік називається *інтегровним*, якщо він є інтегровним як гамільтонова система. У випадку, коли розглядуваний многовид є сферою S^2, відповідний геодезійний потік є гамільтоновою системою з двома ступенями вільності, тому достатньою умовою його інтегровності за Ліувіллем є існування ще однієї функції на дотичному розшаруванні $F : T^*S^2 \to \mathbb{R}$, функціонально незалежної з $\mathcal{H}$, яка є сталою на траєкторіях гамільтонової системи. Відомо, що у випадку двовимірного многовида S^2 існує система глобальних координат $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, відомих як ізотермічні координати (див. [2]), в яких метрика на сфері має вигляд

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \tag{1}$$

УДК 514.745.82; MSC 2000: 35N10, 70H06

а відповідний гамільтоніан — вигляд

$$\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2)/\lambda(x, y). \tag{2}$$

Очевидно, достатньо шукати додаткові перші інтеграли гамільтонової системи з гамільтоніаном (2) у вигляді однорідного многочлена за імпульсами, оскільки будь-яка однорідна за імпульсами компонента розвинення інтеграла F в ряд Лорана знову є першим інтегралом цієї ж системи (див. [8]). Питання існування додаткових перших інтегралів, що є лінійними або квадратичними функціями за імпульсами, є повністю досліджені (див., наприклад, [3]). Однак для випадку додаткових інтегралів вищих порядків відомі лише деякі частинні випадки, які переважно пов'язані з класичними інтегровними задачами динаміки твердого тіла.

БАЗОВА МОДЕЛЬ

Розглянемо питання про існування додаткового першого інтеграла, кубічного за імпульсами

$$F = E^{30}(x, y)p_x^3 + E^{21}(x, y)p_x^2 p_y + E^{12}(x, y)p_x p_y^2 + E^{03}(x, y)p_y^3 \tag{3}$$

для геодезійного потоку метрики (1) на сфері S^2.

Надалі перейдемо до комплексних координат $z, \bar{z}$ $(z = x + iy)$. У цих координатах метрика (1) має вигляд $ds^2 = \lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z}$, а гамільтоніан задається формулою $\mathcal{H} = 2p\bar{p}/\lambda(z, \bar{z})$, де $p = (p_x - ip_y)/2$ — відповідний узагальнений імпульс. Нехай додатковий перший інтеграл F в координатах $z, \bar{z}, p, \bar{p}$ має вигляд

$$F = A(z, \bar{z})p^3 + B(z, \bar{z})p^2\bar{p} + C(z, \bar{z})p\bar{p}^2 + D(z, \bar{z})\bar{p}^3. \tag{4}$$

Оскільки F є дійснозначною функцією, то симетричні функціональні коефіцієнти в (4) є комплексно-спряженими, тобто $D = \bar{A}$, $C = \bar{B}$. Запишемо умову того, що функція (4) є першим інтегралом гамільтонової системи з гамільтоніаном $\mathcal{H}$. Тоді дужка Пуассона $\{\mathcal{H}, F\}$ тотожно дорівнює нулю:

$$\{\mathcal{H}, F\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial F}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{p}}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при усіх мономах $p^i\bar{p}^j$ в дужці Пуассона $\{\mathcal{H}, F\}$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} A_2 = 0, \\ A_1\lambda + B_2\lambda + 3A\lambda_1 + B\lambda_2 = 0, \\ B_1\lambda + C_2\lambda + 2B\lambda_1 + 2C\lambda_2 = 0, \\ C_1\lambda + D_2\lambda + C\lambda_1 + 3D\lambda_2 = 0, \\ D_1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

де введено позначення $A_1 := \partial A/\partial z, A_2 := \partial A/\partial \bar{z}$ і т.п.

З першого рівняння негайно отримуємо, що $A = A(z)$ є голоморфною функцією аргумента $z \in \mathbb{C}$. Елементарними міркуваннями (див. [1]) легко показати, що $A(z)$ є поліномом не вище 6-го степеня. Відповідно, диференціальні форми $\lambda(z,\bar{z})dzd\bar{z}$, $dz^3/A(z)$, $dz^2d\bar{z}/B(z,\bar{z})$ є інваріантними щодо довільного голоморфного перетворення глобальної координати z, тобто

$$dz^3/A(z) = d\omega^3/\tilde{A}(\omega), \quad \lambda(z,\bar{z})dzd\bar{z} = \tilde{\lambda}(\omega,\bar{\omega})d\omega d\bar{\omega}.$$

Таким чином, зручно розглядати випадок $A(z) = const = i/3$, оскільки всі інші інтегровні випадки можуть бути легко отримані за допомогою заміни змінної $d\omega/dz = (3\tilde{A}(\omega)/i)^{1/3}$. Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що $A(z) = i/3$. Введемо позначення $\beta = iB\lambda$, $\gamma = -iC\lambda$. Тоді відповідна система рівнянь (5) на невідомі функції λ, β, γ набуде вигляду

$$\begin{cases} \beta_2 = \lambda_1, \\ \beta_1\lambda + \beta\lambda_1 = \gamma_2\lambda + \gamma\lambda_2, \\ \gamma_1 = \lambda_2. \end{cases} \tag{6}$$

Зауважимо, що виходячи з другого рівняння системи (6) легко довести існування такої дійснозначної функції $\Phi(z,\bar{z})$, що $\beta\lambda = \Phi_2, \quad \gamma\lambda = \Phi_1$. Більше того, функція $\Phi(z,\bar{z})$ сама є інваріантом щодо голоморфних перетворень глобальної координати z, тобто $\Phi(z,\bar{z}) = \widetilde{\Phi}(\omega,\bar{\omega})$. Тоді підстановкою $\beta = \Phi_2/\lambda, \ \gamma = \Phi_1/\lambda$ в систему (6) одержимо

$$\begin{cases} \Phi_{22}\lambda - \Phi_2\lambda_2 = \lambda^2\lambda_1, \\ \Phi_{11}\lambda - \Phi_1\lambda_1 = \lambda^2\lambda_2. \end{cases}$$

Заміною $L = \lambda^2$ ця система зводиться до більш зручного вигляду

$$\begin{cases} LL_1 + \Phi_2 L_2 = 2\Phi_{22}L, \\ \Phi_1 L_1 + LL_2 = 2\Phi_{11}L. \end{cases} \tag{7}$$

Це звичайна нелінійна система диференціальних рівнянь із частинними похідними відносно функції L, лінійна стосовно перших похідних від невідомої функції.

ВЛАСТИВОСТІ ГЛАДКИХ МЕТРИК НА S^2

При дослідженні розв'язків системи (7) одним із важливих моментів є питання про асимптотичну поведінку розв'язків у критичних точках. Позначимо через ω глобальну координату ($\omega \in \mathbb{C}$) розглядуваної гамільтонової системи на S^2 з метрикою $ds^2 = \tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) d\omega d\bar{\omega}$.

Лема. *При $\omega \to \infty$ справедливі такі асимптотики:*

$$\tilde{\lambda}(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{a + o(1)}{\omega^2 \tilde{\omega}^2}, \quad \tilde{\beta}(\omega, \tilde{\omega}) = (b + o(1))\omega^2, \quad \widetilde{\Phi}(\omega, \tilde{\omega}) = c + o(1),$$

де a, b, c — деякі константи (можливо, нульові).

Доведення леми цілком аналогічне до відповідного результату Колокольцова [1], яке було одержано для додаткових квадратичних за імпульсами перших інтегралів.

Заміна змінної

$$z = \int_0^\omega (3\widetilde{A}(s)/i)^{-1/3} ds \tag{8}$$

переводить глобальну координату ω в локальну координату $z \in K \subset \mathbb{C}$, якій відповідає поліном $A(z) = i/3$.

Теорема. *Глобальний поліном $\widetilde{A}(\omega)$ з точністю до дробово-лінійного перетворення може мати лише один із наступних виглядів:*

1. $\widetilde{A}(\omega) = i/3$,
2. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega/3$,
3. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega^2/3$,
4. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega^3/3$,
5. $\widetilde{A}(\omega) = i(\omega - \theta)^2(\omega + \bar{\theta})^2/3$.

Доведення теореми використовує однозначність оберненого перетворення $\omega(z) : K \to \mathbb{C}$, що пов'язане з однозначністю відображення, оберненого до (8), і практично повністю повторює міркування роботи [1], проведені для випадку додаткового першого інтеграла, квадратичного за імпульсами.

ОСНОВНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Розглянемо спочатку випадок, коли два диференціальні рівняння системи (7) є пропорційними, тобто

$$\begin{cases} LL_1 + \Phi_2 L_2 = 2\Phi_{22} L, \\ \dfrac{L}{\Phi_1} = \dfrac{\Phi_2}{L} = \dfrac{\Phi_{22}}{\Phi_{11}}. \end{cases} \tag{9}$$

Враховуючи, що функції $\Phi(z,\bar z)$ і $L(z,\bar z)$ є дійснозначними, зручно ввести позначення $\Phi_2 = Lt, \Phi_1 = L/t$, де $|t| = 1$ ($\bar t = 1/t$). Тоді система рівнянь (9) набуває вигляду

$$\begin{cases} LL_1 + LtL_2 = 2L(L_2 t + Lt_2), \\ L_1 t + Lt_1 = (L_2 t - Lt_2)/t^2, \\ L_1 t - Lt_1 = t(L_2 t + Lt_2), \end{cases}$$

звідки легко знайти, що

$$L = c^2 z\bar z(z^3 - \bar z^3)^{-4/3}, \quad t = -\bar z/z, \quad \Phi = c^2(z^3 - \bar z^3)^{-1/3}.$$

Відповідна інтегровна ріманова метрика задається функцією

$$\lambda(z,\bar z) = c\sqrt{z\bar z}(z^3 - \bar z^3)^{-2/3}. \tag{10}$$

Крім безпосереднього вигляду метрики (10), цей випадок генерує ще дві сім'ї інтегровних гамільтонових систем на сфері S^2. А саме, у випадку $\widetilde A(\omega) = i\omega/3$ на локальному многовиді $K = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (-\pi/6, 7\pi/6)\}$ із співвідношень

$$\tilde\lambda(\omega,\bar\omega)d\omega d\bar\omega = \lambda(z,\bar z)dzd\bar z, \quad dz^3 = d\omega^3/\omega$$

знайдемо, що $z = \frac{3}{2}\omega^{2/3}$, і тому

$$\tilde\lambda(\omega,\bar\omega) = \lambda(\tfrac{3}{2}\omega^{2/3}, \tfrac{3}{2}\bar\omega^{2/3})(\omega\bar\omega)^{-1/3} = \tfrac{2}{3}c(\omega^2 - \bar\omega^2)^{-2/3}, \tag{11}$$

а у випадку $\widetilde A(\omega) = i\omega^2/3$ на локальному многовиді

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (\pi/6, 5\pi/6)\}$$

матимемо, що $z = 3\omega^{1/3}$, і тому

$$\tilde\lambda(\omega,\bar\omega) = 3c(\omega\bar\omega)^{-1/2}(\omega - \bar\omega)^{-2/3}. \tag{12}$$

Усі ці три сім'ї інтегровних гамільтонових систем на сфері не є такими, що задані гладкою на S^2 функцією $\tilde\lambda(\omega,\bar\omega)$. Однак всі вони описують динаміку руху частинки на сфері під дією відповідного поля, що допускає існування додаткового кубічного за імпульсами першого інтеграла.

Варто відзначити, що метрика $ds^2 = \tilde\lambda(\omega,\bar\omega)d\omega d\bar\omega$, що пов'язана з функцією (11), описує інтегровну систему на сфері $S^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, яка описує динаміку руху частинки по поверхні під дією потенціалу $V(x_1, x_2 x_3) = c(x_1 x_2 x_3)^{-2/3}$. Ця задача була досліджена в роботі [6] з погляду побудови зображення Лакса для рівнянь руху. Додатковим нюансом є те, що ця система генерується натуральною динамічною системою Хенона–Хейлеса з двома степенями вільності і гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + c(x_1^2 - x_2^2)^{-2/3}$$

за допомогою принципу Мопертюї.

Наступний крок дослідження системи (7) стосується випадку, коли ці рівняння не є пропорційними, тобто $L^2 - \Phi_1\Phi_2 \neq 0$. Тоді система рівнянь (7) є розв'язною стосовно L_1, L_2, а саме,

$$L_1 = 2L\frac{\Phi_{22}L - \Phi_{11}\Phi_2}{L^2 - \Phi_1\Phi_2},$$

$$L_2 = 2L\frac{\Phi_{11}L - \Phi_{22}\Phi_1}{L^2 - \Phi_1\Phi_2}.$$

Умова сумісності $(L_1)_2 = (L_2)_1$ приводить до третього рівняння вигляду

$$\begin{aligned}(\Phi_{22}\Phi_1 - \Phi_{12}\Phi_2)L_1 - (\Phi_{11}\Phi_2 - \Phi_{12}\Phi_1)L_2 = \\ = 2L((\Phi_{222} - \Phi_{111})L + \Phi_{122}\Phi_1 - \Phi_{112}\Phi_2).\end{aligned} \tag{13}$$

Питання повного дослідження системи рівнянь (7), (13) виходить за рамки даної роботи. Однак випадок, коли рівняння (13) є тривіальним, можна легко проаналізувати. Виявляється, така ситуація виникає за умови $\Phi_1 L_2 = \Phi_2 L_1$, звідки $\Phi = \Phi(\lambda)$. Повертаючись до системи рівнянь (6), одержимо

$$\begin{cases} \beta_2 = \lambda_1, \\ \beta\lambda = \Phi'(\lambda)\lambda_2, \\ \gamma\lambda = \Phi'(\lambda)\lambda_1, \\ \gamma_1 = \lambda_2, \end{cases} \tag{14}$$

звідки $\beta = (\psi(\lambda))_2, \gamma = (\psi(\lambda))_1$, де $\psi(t) = \int \Phi'(t)t^{-1}dt$. Остаточно маємо

$$\lambda_{111} = \beta_{112} = (\psi(\lambda))_{1122} = \gamma_{122} = \lambda_{222},$$

звідки

$$\lambda = f_1(z + \bar{z}) + f_2(\varepsilon z + \varepsilon^2\bar{z}) + f_3(\varepsilon^2 z + \varepsilon\bar{z}), \tag{15}$$

де $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$ — первісний кубічний корінь з одиниці, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3,$ — довільні функції.

Легко перевірити, що зображення функції $\lambda(z,\bar z)$ у вигляді (15) при підстановці в систему (14) дає в якості першоджерела відповідної метрики дві інтегровні системи на сфері S^2, що пов'язані з натуральними динамічними системами з гамільтоніанами

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + c_1 \exp(x_1) + c_2 \exp(\tilde{x}_1) + c_3 \exp(\tilde{\tilde{x}}_1) \tag{16}$$

та

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - g^2(x_1^{-2} + \tilde{x}_1^{-2} + \tilde{\tilde{x}}_1^{-2}), \tag{17}$$

де

$$\tilde{x}_1 = -\frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{\tilde{x}}_1 = -\frac{x}{2} - y\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Гамільтоніани (16), (17) описують відповідно замкнутий ланцюжок Тоди та систему Калоджеро–Мозера взаємодіючих трьох точок на прямій, які допускають існування додаткового кубічного за імпульсами першого інтеграла. За допомогою принципу Мопертюї динамічні системи з гамільтоніанами (16), (17) індукують геодезійні потоки на многовидах

$$K_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : c_1 \exp(x_1) + c_2 \exp(\tilde{x}_1) + c_3 \exp(\tilde{\tilde{x}}_1) < h\},$$

$$K_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -g^2(x_1^{-2} + \tilde{x}_1^{-2} + \tilde{\tilde{x}}_1^{-2}) < h\},$$

з метриками

$$ds_1^2 = (h - c_1 \exp(x_1) - c_2 \exp(\tilde{x}_1) - c_3 \exp(\tilde{\tilde{x}}_1)(dx_1^2 + dx_2^2), \tag{18}$$

$$ds_1^2 = (h - g^2(x_1^{-2} + \tilde{x}_1^{-2} + \tilde{\tilde{x}}_1^{-2}))(dx_1^2 + dx_2^2). \tag{19}$$

Причетність обидвох цих систем до генерування інтегровних геодезійних потоків на сфері було відзначено в роботі [5], однак для них не було знайдено явного виразу для $\tilde\lambda(\omega,\bar\omega)$ в глобальній координаті $\omega \in \mathbb{C}$.

Виявляється, що метрика (19) системи Калоджеро–Мозера, аналогічно як і метрика (10), за допомогою принципу Мопертюї генерує три сім'ї інтегровних гамільтонових систем на сфері S^2 для випадків $\widetilde{A}(\omega) \in \{i/3, i\omega/3, i\omega^2/3\}$, однак жоден із них не приводить до побудови гладкої метрики на S^2, тобто всі три випадки описують динаміку руху частинки на сфері S^2 під дією деякого потенціалу, що має сингулярні точки на конфігураційному просторі. Тому ці інтегровні системи не становлять значного інтересу в питаннях дослідження інтегровності геодезійних потоків на S^2. Але метрика (18) за умов $c_1 = c_2 = c_3 = c > 0$, $h > 0$, відповідає локальному многовиду $K \subset \mathbb{C}$, такому що K є трикутником з вершинами в точках $\{\varrho i, \varrho\varepsilon i, \varrho\varepsilon^2 i\}$, де $h = 2\exp(\varrho\sqrt{3}/2)$. У всіх вершинах трикутника K функція $\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega})$ обертається в нуль. Тоді за допомогою інтеграла Крістоффеля–Шварца

$$\omega = \int_0^\omega \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-\varrho\varepsilon i)^2(z-\varrho\varepsilon^2 i)^2}} \tag{20}$$

область K конформно і однолисто відображається у верхню півплощину комплексної площини $\mathbb{C}$. Відповідно, многовид $K \cup K_1$ (де K_1 — трикутник, симетричний до K відносно відрізка $[\varrho\varepsilon i, \varrho\varepsilon^2 i]$) відображається конформно і однолисто у всю комплексну площину. Отже, для випадку $\widetilde{A}(\omega) = i(z-\varrho\varepsilon i)^2(z-\varrho\varepsilon^2 i)^2/3$ гладка на S^2 інтегровної метрики з додат ковим кубічним за імпульсами першим інтегралом має явний вигляд

$$\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\lambda(z(\omega), \bar{z}(\bar{\omega}))}{|\widetilde{A}(\omega)|^{\ 2/3}}, \tag{21}$$

де $z(\omega)$ — та вітка многозначної функції, оберненої до (20), область значень якої співпадає з областю $K \cup K_1 \subset \mathbb{C}$. Легко переконатися, що функція (21) задовольняє асимптотиці

$$\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{a + o(1)}{\omega^2\bar{\omega}^2}, \qquad \omega \to \infty.$$

ВИСНОВКИ

Отриманий у цій статті інтегровний геодезійний потік з метрикою, що задається формулою (21) і породжений інтегровною натуральною гамільтоновою системою з гамільтоніаном (16), є єдиним, що природнім чином випливає з побудованої моделі.

Виявляється, з системи диференціальних рівнянь (7), (13) за допомогою анзацу

$$\Phi(z, \bar{z}) = L(z, \bar{z})\psi(z + \bar{z}) \tag{21}$$

можна легко отримати ще цілу сім'ю інтегровних геодезійних потоків на сфері S^2, яка, зокрема, містить випадок Горячева–Чаплигіна у динаміці твердого тіла. Дослідження деяких властивостей цієї сім'ї було проведено в [7, 4]. Визначальною рисою таких інтегровних метрик на S^2 є їх однопараметричний характер, тобто можливість зобразити відповідну функцію $\lambda(z, \bar{z})$ у вигляді

$$\lambda(z, \bar{z}) = (h - V(z, \bar{z}))\mu(z, \bar{z}),$$

де $h \in \mathbb{R}$ — довільне дійсне число, до того ж додатковий перший інтеграл є поліномом за h. Загальна ж постановка питання про повний опис розв'язків системи рівнянь (7), (13) залишається відкритою.

[1] *Колокольцов В.Н.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на римановых многообразиях // Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. – М., 1984.

[2] *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967. – 664 с.

[3] *Bolsinov A.V., Matveev V.S., Fomenko A.T.* Two-dimensional Riemannian metrics with an integrable geodesic flow. Local and global geometries // Math. Sb. **189** (1998), № 9–10, 1441–1466.

[4] *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Generalization of the Goryachev–Chaplygin Case // Regular and Chaotic Dynamics, V. 7, № 1, 2002. – P. 21–30.

[5] *Dullin H.R., Matveev V.S., Topalov P.I.* On integrals of the third degree in the momenta // Regular and Chaotic Dynamics, V.4, № 3, 1999. – P. 35–44.

[6] *Tsiganov A.V.* Lax representation for an integrable motion on the sphere with a qubic second invariant // Regular and Chaotic Dynamics, V. 4, № 3, 1999. – P. 21–29.

[7] *Selivanova E.N.* New Examples of Integrable Conservative Systems on S^2 and the Case of Goryachev–Chaplygin // Comm. Math. Phys., **207** (1999). – P. 641–663.

[8] *Whittaker E.T.* A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. – Cambridge: Cambridge University Press, 1937.

GEODESIC FLOWS ON THE SPHERE S^2 WITH ADDITIONAL FIRST INTEGRAL, CUBIC IN THE MOMENTA

Andriy VUS

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

The article is devoted to the problem of exact integrability of geodesic flows on the twodimensional sphere. The existence of additional first integrals of third degree in the momenta is considered and exact form of the corresponding smooth Riemannian metric on the manifold is obtained.