ГІБРИДНІ ПАРНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ФУНКЦІЯМИ ЛОММЕЛЯ, БЕССЕЛЯ, ЛЕЖАНДРА

Ніна ВІРЧЕНКО

Національний технічний університет України
„Київський політехнічний інститут“
просп. Перемоги 37, Київ 03056

Редакція отримала статтю 27 листопада 2003 р.

У роботі розглянуто гібридні парні інтегральні рівняння з функціями Ломмеля і функціями Бесселя та гібридні парні інтегральні рівняння з узагальненими приєднаними функціями Лежандра і функціями Бесселя. Одержано розв'язки у замкненій формі.

При розв'язанні мішаних крайових задач математичної фізики, теорії пружності та ін. виникають гібридні парні (потрійні) інтегральні рівняння (з спеціальними функціями різної природи) у випадку кусково-неоднорідних середовищ (областей). Теорія парних інтегральних рівнянь досить добре розвинута [1], [2], тоді як випадки **гібридних** парних інтегральних рівнянь майже не вивчались, за винятком кількох робіт [3], [4].

У даній роботі розглянемо гібридні парні інтегральні рівняння з функцією Ломмеля і функцією Бесселя та гібридні парні інтегральні рівняння з узагальненою приєднаною функцією Лежандра і функцією Бесселя. Застосовуючи аппарат дробового інтегро-диференціювання, одержимо розв'язки розглядуваних гібридних парних інтегральних рівнянь у замкненій формі.

1. Розглянемо гібридні парні інтегральні рівняння вигляду

$$\int_0^\infty \tau^{-2\alpha-\frac{1+\nu+\mu}{2}}\varphi(\tau)s_{\mu,\nu}(x\tau)d\tau = k(x), \quad (0 \le x \le a), \tag{1}$$

УДК 517.968/968.78

$$\int_0^\infty \tau^{-2\beta}\varphi(\tau)J_\gamma(x\tau)d\tau = m(x), \quad (a < x < \infty), \tag{2}$$

де $\mathrm{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varphi(\tau)$ — шукана функція, $k(x)$, $m(x)$ — задані функції, $J_\gamma(x\tau)$ — функція Бесселя, $s_{\mu,\nu}(x\tau)$ — функція Ломмеля — один із розв'язків диференціального рівняння

$$z^2\frac{d^2W}{dz^2} + z\frac{dW}{dz} + (z^2-\nu^2)W = z^{\mu+1},$$

причому $\mu \pm \nu$ не дорівнює від'ємному непарному цілому числу.

Теорема 1. *Розв'язок гібридних парних інтегральних рівнянь* (1), (2) *існує і має вигляд*

$$\Phi = S_{\frac{\gamma}{2}+\beta, \frac{1+\mu-\nu}{2} \ -\lambda-2\alpha;1}\, r(x), \tag{3}$$

де $\varphi(\tau) = \frac{\tau}{2}\Phi(\frac{\tau^2}{4})$ *а* S, r *виражаються формулами* (14), (17) *відповідно.*

Доведення. Використовуючи інтегральне зображення для функції $s_{\mu,\nu}$ із [5]

$$s_{\mu,\nu}(z) = 2^\mu \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1+\nu+\mu}{2}} \Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right) \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\frac{1+\mu-\nu}{2}}(z\sin\Theta)(\sin\Theta)^{\frac{1+\mu-\nu}{2}}\cos^{\nu+\mu}\Theta d\Theta, \tag{4}$$

де $\mathrm{Re}\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right) > 0$, $\mathrm{Re}(\nu+\mu+1) > 0$, одержимо, що

$$J_{\frac{1+\mu-\nu}{2}}(\tau\xi) =$$
$$= \frac{2^{\frac{\nu-\mu+3}{2}}\tau^{-\frac{1+\nu+\mu}{2}}\xi^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}\cos\frac{\pi(\nu+\mu)}{2}}{\pi\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)}\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \frac{s_{\mu,\nu}(x\tau)x^{\mu+1}}{(\xi^2-x^2)^{\frac{1+\nu+\mu}{2}}}dx. \tag{5}$$

Якщо домножимо обидві частини рівняння (1) на вираз

$$\frac{Ax^{\mu+1}}{(\xi^2-x^2)^{\frac{1+\mu+\nu}{2}}},$$

де $A = \frac{2^{\frac{\nu-\mu+3}{2}}\cos\frac{\pi(\nu+\mu)}{2}}{\pi\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)}$, отриману рівність проінтегруємо за x від 0 до ξ $(0 \le \xi \le a)$, змінимо порядок інтегрування (це є можливим з огляду на абсолютну збіжність відповідних інтегралів), продиференціюємо за ξ та домножимо обидві частини рівності на $\xi^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}$, то одержимо такі парні інтегральні рівняння, що є еквівалентними (1), (2):

$$\int_0^\infty \tau^{-2\alpha}\varphi(\tau)J_{\frac{1+\mu-\nu}{2}}(\tau x)d\tau = K(x), \quad (0 \le x \le a) \tag{6}$$

$$\int_0^\infty \tau^{-2\beta}\varphi(\tau)J_\gamma(\tau x)d\tau = m(x), \quad (a < x < \infty), \tag{7}$$

де

$$K(x) = Ax^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^{\mu+1}k(t)}{(x^2-t^2)^{\frac{1+\nu+\mu}{2}}}dt. \tag{8}$$

Для розв'язання парних інтегральних рівнянь (6), (7) застосуємо апарат дробового інтегро-диференціювання [6]. Для цього у (6), (7) виконаємо заміну

$$\Phi(\tau) = \tau^{-\frac{1}{2}}\varphi(2\sqrt{\tau}), \quad R(x) = 2^{2\alpha}x^{-\alpha}K(\sqrt{x}), \tag{9}$$
$$M(x) = 2^{2\beta}x^{-\beta}m(\sqrt{x}).$$

Застосовуючи оператор модифікованого інтегрального перетворення Ганкеля [6]

$$S_{\eta,\alpha;\sigma}f(x) = \sigma^\alpha x^{\alpha\frac{\sigma}{2}}\int_0^\infty t^{-\frac{\alpha\sigma}{2}+\sigma-1}J_{2\eta+\alpha}\left(\frac{2}{\sigma}(xt)^{\frac{\sigma}{2}}\right)f(t)dt \tag{10}$$

при $\sigma = 1$, рівняння (6)–(7) подамо в такій операторній формі:

$$S_{\frac{1+\mu-\nu}{4}-\alpha,\ 2\alpha;\ 1}\ \Phi = R, \tag{11}$$
$$S_{\frac{\gamma}{2}-\beta,\ 2\beta;\ 1}\ \Phi = M.$$

Запровадимо позначення

$$\lambda = \left(\frac{\mu-\nu+1}{2}+\gamma\right)\cdot\frac{1}{2}+\beta-\alpha. \tag{12}$$

Тепер до (11) застосуємо відповідно інтегральні оператори вигляду [6]

$$I^+_{\eta,\alpha}\ f(x) = \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^\eta f(t)dt, \quad (\alpha > 0), \tag{13}$$

$$K^{-}_{\eta,\alpha}\, f(x) = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} t^{-\eta-\alpha}\, f(t)dt,$$

та формули композицій [6, (18.21)] і тоді (11) перепишемо у вигляді:

$$S_{\frac{1+\mu-\nu}{4}-\alpha, \lambda-\frac{1+\mu-\nu}{2}+2\alpha;\ 1}\ \Phi = r(x), \tag{14}$$

де

$$r(x) = \begin{cases} I^{+}_{\frac{1+\mu-\nu}{4}+\alpha,\ \lambda-\frac{1+\mu-\nu}{2}}\ R, & (0 \le x \le a), \\ K^{-}_{\frac{1+\mu-\nu}{4},\ \gamma-\lambda}\ M, & (a < x < \infty). \end{cases} \tag{15}$$

Застосовуючи до (14) формулу обернення оператора Ганкеля [6,(18.20)], матимемо

$$\Phi = S_{\frac{\gamma}{2}+\beta,\ \frac{1+\mu-\nu}{2}-\lambda-2\alpha;\ 1}\ r(x), \tag{16}$$

де

$$r(x) = \begin{cases} \frac{2^{\nu-\mu+2\alpha+4}\cos\frac{\pi(\nu+\mu)}{2}}{\pi\Gamma(\frac{1+\mu-\nu}{2})}\ I^{+}_{\frac{1+\mu-\nu}{4}+\alpha,\ \lambda-\frac{1+\mu-\nu}{2}}(w), & (0 \le x \le a), \\ 2^{2\beta} K^{-}_{\frac{1+\mu-\nu}{4}-\alpha,\ \gamma-\lambda}\ m(\sqrt{x}), & (a < x < \infty), \end{cases} \tag{17}$$

де $w \equiv x^{-\alpha+\frac{\nu-\mu+1}{4}} \frac{d}{dx} \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} \frac{t^{\mu+1}k(t)dt}{(x-t^2)^{\frac{1+\nu+\mu}{2}}}$. Зауважимо, що всі проведені операції можна обгрунтувати при певних умовах на функції та параметри.

2. Розглянемо гібридні парні інтегральні рівняння такого вигляду:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\tau)\tau^{\nu-2\delta} P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)d\tau = f(\alpha), \quad (0 \le \alpha \le a), \tag{18}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(\tau)\tau^{-2\beta} J_{\gamma}(\alpha\tau)d\tau = g(\alpha), \qquad (a < \alpha < \infty), \tag{19}$$

де $\varphi(\tau)$ — шукана функція, $f(\alpha)$ і $g(\alpha)$ — задані функції, $J_{\gamma}(\alpha\tau)$ — функція Бесселя, $P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ — узагальнена приєднана функція Лежандра [7], причому $|m| < \frac{1}{2}$, $m < n < \frac{3}{2}$, $\operatorname{Re}\gamma > -\frac{1}{2}$.

Теорема 2. *Розв'язок гібридних парних інтегральних рівнянь* (18), (19) *існує і має вигляд*

$$\Phi = S_{\frac{\gamma}{2}+\beta,\ \nu-\lambda-2\delta,1}\ \widetilde{F}, \tag{20}$$

де $\Phi(\tau)=\tau^{-\frac{1}{2}}\varphi(2\sqrt{\tau})$*; а* $S, \widetilde{F}$ *виражаються формулами* (28), (30) *відповідно.*

Доведення. Зведемо гібридні парні інтегральні рівняння (18), (19) до парних інтегральних рівнянь з функціями Бесселя типу (6), (7).

Використовуючи розв'язок інтегрального рівняння з гіпергеометричною функцією [8], одержимо такий вираз для $\cos(\tau t)$:

$$\cos(\tau t)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos\pi m}{\sqrt{\pi}2^{\frac{n-m+1}{2}}}\ \frac{d}{dt}\Big[(\operatorname{ch}t+1)^{\frac{n-m}{2}}\int\limits_0^t(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)^{m-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\operatorname{ch}\alpha+1)^{\frac{m-n}{2}}\ {}_2F_1\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{1+m-n}{2};\ \frac{1}{2}+m;\ \frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}t}\right)\times$$

$$\times P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)(\operatorname{sh}\alpha)^{1-m}d\alpha\Big],\qquad(21)$$

де ${}_2F_1-$ гіпергеометрична функція.

Якщо тепер домножити обидві частини рівняння (18) на вираз

$$\frac{2^{\frac{m-n}{2}}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos(\pi m)(\operatorname{sh}\alpha)^{1-m}(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)^{m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}t+1)^{\frac{n-m}{2}}\times$$

$$\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{\frac{m-n}{2}}{}_2F_1\left(\frac{m-n}{2},\frac{1+m-n}{2};\frac{1}{2}+m;\frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}t}\right),\qquad(22)$$

а потім одержану рівність проінтегрувати за α від 0 до t, продиференціювати за t на $(0,\infty)$, то рівняння (18) набуде вигляду

$$\int\limits_0^\infty\tau^{\nu-2\delta}\varphi(\tau)\cos(t\tau)d\tau=\Psi_1(t),\qquad(23)$$

де

$$\Psi_1(t)=\frac{2^{\frac{m-n}{2}}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\cos(\pi m)\frac{d}{dt}\left[(\operatorname{ch}t+1)^{\frac{n-m}{2}}\int\limits_0^t\frac{(\operatorname{sh}\alpha)^{1-m}}{(\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha)^{\frac{1}{2}-m}}\times\right.$$

$$\left.\times f(\alpha)(\operatorname{ch}t+1)^{\frac{n-m}{2}}F_1\left(\frac{m-n}{2},\frac{1+m-n}{2};\frac{1}{2}+m;\frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}t}\right)d\alpha\right].\quad(24)$$

Використовуючи інтегральне зображення для функції Бесселя [5]

$$J_\nu(t\tau)=\frac{2^{1-\nu}t^{-\nu}\tau^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int\limits_0^t\frac{\cos(x\tau)}{(t^2-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}dx,\qquad(25)$$

після перетворень над (23) одержимо (разом з (19)) такі парні інтегральні рівняння:

$$\int_0^\infty \tau^{-2\delta}\varphi(\tau)J_\nu(t\tau)d\tau = \psi_1(t),\ (0 \le t \le a), \tag{26}$$

$$\int_0^\infty \tau^{-2\beta}\varphi(\tau)J_\gamma(t\tau)d\tau = g(t),\ (a < t < \infty), \tag{27}$$

де

$$\psi_1(t) = \frac{2^{1-\nu}t^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^t \frac{\Psi_1(x)\ dx}{(t^2-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}.$$

Використовуючи, як і в попередньому пункті, апарат дробового інтегро-диференціювання, одержимо операторне рівняння:

$$S_{\frac{\nu}{2}-\delta,\ \lambda-\nu+2\delta,\ 1}\ \Phi = \widetilde{F}, \tag{28}$$

яке еквівалентне (26), (27). Застосовуючи формулу обернення оператора Ганкеля [6], остаточно одержимо розв'язок рівнянь (18), (19) у вигляді:

$$\Phi = S_{\frac{\nu}{2}+\beta,\ \nu-\lambda-2\delta,\ 1}\ \widetilde{F}, \tag{29}$$

де

$$\widetilde{F} = \begin{cases} I^{+}_{\frac{\nu}{2}+\delta,\ \lambda-\nu}\ F, & (0 \le \alpha \le a), \\ K^{-}_{\frac{\nu}{2}-\delta,\ \gamma-\lambda}\ G, & (a < \alpha < \infty) \end{cases} \tag{30}$$

$$F(\alpha) = 2^{2\delta}\alpha^{-\delta}f(\sqrt{\alpha}), \quad G(\alpha) = 2^{2\beta}\alpha^{-\beta}g(\sqrt{\alpha}),$$

$$\Phi(\tau) = \tau^{-\frac{1}{2}}\varphi(2\sqrt{\tau}), \quad \lambda = \frac{\nu+\gamma}{2} + \beta - \delta.$$

[1] *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики.– М.: Наука, 1977. – 220 с.

[2] *Вирченко Н. А.* Парные (тройные) интегральные уравнения.– К.: Выща школа, 1989. – 160 с.

[3] *Вирченко Н.А.* О некоторых гибридных парных интегральных уравнениях // Укр. мат. журн., 1984. – **36**, № 2. – С. 139–142.

[4] *Mandal B.N., Mandal N.* Mixed kernels involving Bessel functions of the first kind of order zero and trigonometric functions // Z.: Chapman and Hall/CRC.–1999.– P. 194–198.

[5] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 298 с.

[6] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.– Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[7] *Virchenko N., Fedotova I.* Generalized associated Legendre functions and their applications. – World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2001. – 215 p.

[8] *Вирченко Н.А.* Интегральные уравнения с гипергеометрической функцией ${}_2F_1(a,b;c;x)$ в ядре // Доп. АН УРСР. – 1984. – Сер. А, № 9. – С. 3–5.

HYBRID DUAL INTEGRAL EQUATIONS WITH LOMMEL, BESSEL, LEGENDRE FUNCTIONS

Nina VIRCHENKO

National Technical University of Ukraine "KPI"
37 Peremohy Prospect, Kyiv 03056, Ukraine

Hybrid dual integral equations with Lommel and Bessel functions and hybrid dual integral equations with the generalized associated Legendre and Bessel functions are considered. The solutions of these equations are received in the closed form.