ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ МАРКОВСЬКОГО ВІДНОВЛЕННЯ

Наталія БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79602

Редакція отримала статтю 22 квітня 2005 р.

Досліджено асимптотику розв'язку рівняння марковського відновлення для напівмарковського процесу зі скінченим числом станів за умови нескінченності середніх часів перебування цього процесу в кожному фіксованому стані. Знайдено умови, при яких цей розв'язок має скінченну границю.

ВСТУП

Нехай F — неарифметичний імовірнісний розподіл на $[0, +\infty)$ такий, що $F(0) = 0$. Для такого F асимптотика розв'язку відповідного рівняння відновлення досліджувалася у [7, 8]. Зокрема, у праці [7] Еріксон дослідив асимптотичну поведінку розв'язку рівняння відновлення на нескінченності, в якому хвіст розподілу $1 - F$ є правильно змінною функцією на нескіченності з показником $-\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Він також розглянув процес відновлення, де часи чекання мають розподіл, хвіст якого правильно змінюється на нескінченності з показником -1. За умови нескінченності середнього цього розподілу він встановив деякі граничні теореми для сумісного розподілу величин недоскоку і перескоку. У [8] розглянуто рівняння відновлення, в якому $1 - F$ є правильно змінною функцією на нескінченності з показником $-\alpha$ $(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1)$, а вільний член рівняння є додатною незростаючою функцією, яка скінченна в нулі і правильно змінна на нескінченності з показником $-\beta$ $(0 \leq \beta < 1)$. У [8] знайдено

УДК 519.21; MSC 2000: 60K15

асимптотику розв'язку такого рівняння відновлення на нескінченності за умови нескінченності середнього розподілу ймовірностей.

У даній статті досліджено асимптотику розв'язку рівняння відновлення, побудованого за напівмарковським процесом зі скінченим числом станів, за умови нескінченності середніх часів перебування напівмарковського процесу в кожному фіксованому стані.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Розглянемо напівмарковський процес $X(t)$, $t \geq 0$, зі скінченним числом станів $\{1, 2, \ldots, m\}$ та неперервним часом. Задамо моменти τ_n, $n \geq 1$, переходу процесу $X(t)$ з одного стану в інший (або моменти зміни стану):

$$\tau_1 = \tau = \inf\{t > 0 \ : \ X(t) \neq X(0)\}, \quad \ldots,$$

$$\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} \ : \ X(t) \neq X(\tau_{n-1})\}, \quad n \geq 2.$$

Послідовність випадкових величин $X(0)$, $X(\tau_1)$, ..., $X(\tau_n)$, ... утворює так званий вкладений в $X(t)$ ланцюг Маркова з перехідними ймовірностями

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{X(\tau) = j \mid X(0) = i\}, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Матриця $P = ||p_{ij}||_{i,j=1}^{m}$ нерозкладна, а отже, для неї існує єдиний стаціонарний розподіл імовірностей p_1, p_2, ..., p_m, тобто такий, що

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \quad p_j = \sum_{i=1}^{m} p_i p_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Позначимо

$$F_{ij}(t) = \mathbb{P}\{\tau \leq t, \ X(\tau) = j \mid X(0) = i\},$$

$$F_i(t) = \sum_{j=1}^{m} F_{ij}(t) = \mathbb{P}\{\tau \leq t \mid X(0) = i\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Вважатимемо, що середній час перебування напівмарковського процесу $X(t)$ в кожному стані є нескінченним, тобто

$$\mathbb{M}_i \tau = \mathbb{M}(\tau | X(0) = i) = \int_0^\infty x dF_i(x) = \int_0^\infty (1 - F_i(x)) dx = +\infty, \ \ i = \overline{1, m}.$$

Запишемо рівняння марковського відновлення [3, с. 38]

$$U_i(t) = B_i(t) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t F_{ij}\{dx\} U_j(t - x), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

де $U = U(t) \equiv \mathrm{col}(U_1(t), \ldots, U_m(t))$ — вектор шуканих функцій, визначених для $t \geq 0$, $B = B(t) \equiv \mathrm{col}(B_1(t), \ldots, B_m(t))$ — вектор заданих вимірних, обмежених на кожному скінченому інтервалі невід'ємної півосі, функцій, $F(t) = ||F_{ij}(t)||_{i,j=1}^{m}$ — напівмарковська матриця [3, с. 7].

Розв'язок рівняння (2) має вигляд [3, с. 40]

$$U_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t R_{ij}\{dx\} B_j(t - x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 R_{ij}\{tdx\} B_j(t(1 - x)), \quad i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

де $R_{ij}\{[0, t]\} = R_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, m}$, — елементи матриці відновлення $R(t)$, яка є аналогом функції відновлення, тобто

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(t), \tag{4}$$

де $F^{0*}(t) = E \equiv ||\delta_{ij}||_{i,j=1}^{m}$ — одинична матриця, $F^{1*}(t) = F(t)$,

$$F^{(n+1)*}(t) = \int_0^t F^{n*}(t - u) F\{du\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема. *Нехай L — неспадна повільно змінна функція на нескінченності,*

$$B_j(t) = t^{-\beta_j} L(t), \quad t > 0, \quad 0 \leq \beta_j < 1, \quad B_j(0) < +\infty, \quad j = \overline{1, m}, \tag{5}$$

і виконується умова

$$1 - F_i(t) \sim a_i t^{-\alpha} L(t) \quad \textit{при} \quad t \to \infty, \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \tag{6}$$

де $a_1, \ldots, a_m$ — деякі невід'ємні константи. Тоді границя $\lim\limits_{t\to\infty} U_i(t)$ є скінченною, якщо $\alpha \leq \beta_j$, $i, j = \overline{1, m}$.

Для доведення теореми використаємо наступні леми.

Лема 1. *Нехай сім'я мір $\{R_t, t > 0\}$ є рівномірно обмеженою на $[a, b]$, $0 \leq a < b < +\infty$, а множина функцій $\{f_t, t > 0\}$ збігається рівномірно на $[a, b]$ при $t \to \infty$ до функції f. Тоді границя $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^b f_t(x) R_t\{dx\}$ існує одночасно з границею $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^b f(x) R_t\{dx\}$ і вони рівні.*

Лема 2. *Нехай сім'я мір $\{R_t, t>0\}$ слабко збігаєтьcя до скінченної міри ν при $t\to\infty$, функція L є неспадною повільно змінною функцією на нескінченності, $\beta\in[0,1)$ — фіксоване число. Тоді*

$$\int_0^1 (1-x)^{-\beta} L(t(1-x)) R_t\{dx\} \sim L(t)\int_0^1 (1-x)^{-\beta}\nu\{dx\} \quad \textit{при} \quad t\to\infty.$$

Зауваження. *Зі слабкої збіжності сім'ї мір випливає її рівномірна обмеженість на фіксованому відрізку.*

Доведення. Нехай сім'я мір $\{R_t, t>0\}$ слабко збігається до скінченної міри ν при $t\to\infty$, тобто

$$\int_0^\infty g(x) R_t\{dx\} \to \int_0^\infty g(x)\nu\{dx\} \qquad \text{при} \quad t\to\infty$$

для будь-якої неперервної обмеженої на $[0,+\infty)$ функції g. Візьмемо $g\equiv 1$. Тоді $\lim\limits_{t\to\infty} R_t\{[0,+\infty)\} = \nu\{[0,+\infty)\} < +\infty$. Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon>0$ існує число A таке, що

$$R_t\{[0,+\infty)\} < \nu\{[0,+\infty)\} + \varepsilon = M$$

для всіх $t>A$. Зафіксуємо відрізок $[a,b]$. Очевидно, що для будь-якого $x\in[a,b]$ виконується співвідношення $R_t(x) = R_t\{[0,x]\} \le R_t\{[0,+\infty)\} < M$. Отже, сім'я мір $\{R_t, t>A\}$ є рівномірно обмеженою на $[a,b]$ [2, с. 104].

Зауваження доведено.

Доведення теореми. Як видно з (3), асимптотична поведінка розв'язку U рівняння (2) при $t\to\infty$ визначається властивостями матричної міри $R(tx) = ||R_{ij}(tx)||_{i,j=\overline{1,m}}$ і вектора $B(tx)$ при $t\to\infty$, $x\in[0,1]$.

Знайдемо асимптотику матричної міри $R(tx)$. Позначимо через

$$\widehat{R}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} R\{dx\}, \quad \lambda>0,$$

перетворення Лапласа міри R, а через

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} F\{dx\}, \quad \lambda>0, \;-$$

перетворення Лапласа розподілу F. Враховуючи властивості перетворення Лапласа [4, с. 500], з рівності (4) отримаємо

$$\widehat{R}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\widehat{F}(\lambda))^n.$$

Обчислимо норму матриці $\widehat{F}(\lambda)$:

$$||\widehat{F}(\lambda)|| = \sup_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{m}|\widehat{F}_{ij}(\lambda)| = \sup_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{m}\int_0^\infty e^{-\lambda x}F_{ij}\{dx\} =$$

$$= \sup_{1\le i\le m}\int_0^\infty e^{-\lambda x}F_i\{dx\}.$$

Інтегруючи частинами, дістанемо

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}F_i\{dx\} = e^{-\lambda x}F_i(x)\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty F_i(x)e^{-\lambda x}dx =$$

$$= \int_0^\infty F_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{-t}dt < \int_0^\infty e^{-t}dt = 1, \quad i = \overline{1,m}.$$

Отже,

$$||\widehat{F}(\lambda)|| = \sup_{1\le i\le m}\int_0^\infty F_i\left(\frac{t}{\lambda}\right)e^{-t}dt < 1.$$

Тому за теоремою 5 із [2, с. 216]

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\widehat{F}(\lambda))^n = [E - \widehat{F}(\lambda)]^{-1}.$$

Таким чином,

$$\widehat{R}(\lambda) = [E - \widehat{F}(\lambda)]^{-1}. \tag{7}$$

Розглянемо при $t\to\infty$ послідовність матриць $\left\{\widehat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right\}$, де λ — фіксоване число. Це монотонна послідовність матриць з невід'ємними елементами, для якої

$$\widehat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \to P \quad \text{при} \quad t\to\infty,$$

де $P = ||p_{ij}||_{i,j=1}^m$ — матриця перехідних ймовірностей вкладеного ланцюга Маркова.

Оскільки P — стохастична матриця, то, згідно з [1, с. 360], вона має правий власний вектор $\mathbf{1} = \mathrm{col}(1,\dots,1)$, який відповідає пероновому кореню, що дорівнює одиниці. З (1) видно, що лівим власним вектором матриці P, який відповідає пероновому кореню, що дорівнює одиниці, є вектор $p = \mathrm{col}(p_1,\dots,p_m)$. Так як P — нерозкладна матриця, то за лемою з [6, с. 599]

$$c_t\left(E - \widehat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right)^{-1} \to ||\mathbf{1}\cdot p_j||_{i,j=1}^m \quad \text{при} \quad t\to\infty, \tag{8}$$

де $c_t = 1 - \left(p, \widehat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right) \cdot \mathbf{1}\right)$. Нехай

$$\frac{1-\widehat{F}_i(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}(1-F_i(x))dx \ -$$

перетворення Лапласа міри з монотонною щільністю $1 - F_i$, $i = \overline{1,m}$. Використовуючи (6) і тауберову теорему [4, с. 513], отримаємо, що

$$\frac{1-\widehat{F}_i(\lambda)}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda^{1-\alpha}}\Gamma(1-\alpha)L\left(\frac{1}{\lambda}\right)a_i \quad \text{при} \quad \lambda \to 0, \quad i = \overline{1,m},$$

де символ Γ позначає гамма-функцію: $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$, $t > 0$. Звідси випливає, що

$$1-\widehat{F}_i(\lambda) \sim \lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)L\left(\frac{1}{\lambda}\right)a_i \quad \text{при} \quad \lambda \to 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{9}$$

Використовуючи (9), знайдемо асимптотику c_t при $t \to \infty$:

$$c_t = 1 - \left(p, \widehat{F}\left(\frac{\lambda}{t}\right)\cdot 1\right) = 1 - \sum_{i=1}^m p_i \sum_{j=1}^m \widehat{F}_{ij}\left(\frac{\lambda}{t}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m p_i\left(1-\widehat{F}_i\left(\frac{\lambda}{t}\right)\right) \sim \sum_{i=1}^m p_i\left(\frac{\lambda}{t}\right)^\alpha \Gamma(1-\alpha)L\left(\frac{t}{\lambda}\right)a_i.$$

Враховуючи означення повільно змінної функції, отримаємо

$$c_t \sim t^{-\alpha}\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(t)\sum_{i=1}^m a_ip_i \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{10}$$

На підставі формул (7), (10), із (8) дістаємо

$$t^{-\alpha}\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)L(t)\sum_{i=1}^m a_ip_i \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{t}x}R\{dx\} \to ||\mathbf{1}\cdot p_j||_{i,j=1}^m, \ \ t \to \infty,$$

тобто

$$t^{-\alpha}L(t)\int_0^\infty e^{-\lambda u}R\{tdu\} \to \frac{1}{\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)\sum\limits_{i=1}^m a_ip_i} \cdot ||\mathbf{1}\cdot p_j||_{i,j=1}^m, \ \ t \to \infty,$$

звідки

$$t^{-\alpha}L(t)\int_0^\infty e^{-\lambda u}R_{ij}\{tdu\} \to \frac{p_j}{\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)\sum\limits_{i=1}^m a_ip_i},\ \ t\to\infty,\ \ i,j=\overline{1,m}.$$

За узагальненою теоремою неперервності [4, с. 499] вираз

$$\frac{p_j}{\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)\sum\limits_{i=1}^m a_ip_i}$$

є перетворенням Лапласа деякої міри $p_j\mu$, а саме

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u}\mu\{du\} = \frac{1}{\lambda^\alpha\Gamma(1-\alpha)\sum\limits_{i=1}^m a_ip_i},\quad \lambda>0,$$

і для будь-якого обмеженого інтервалу неперервності міри μ

$$t^{-\alpha}L(t)R_{ij}\{tdu\}\to p_j\,\mu\{du\},\quad i,j=\overline{1,m},\quad \text{при}\quad t\to\infty. \tag{11}$$

За Ширяєвим [5, с. 331] ця збіжність називається збіжністю в основному. Тому за теоремою 1 із [5, с. 331] отримаємо, що для будь-якої неперервної обмеженої на $[0,\infty)$ функції g

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha}L(t)\int_0^\infty g(u)R_{ij}\{tdu\} = p_j\int_0^\infty g(u)\mu\{du\},\quad i,j=\overline{1,m}, \tag{12}$$

тобто збіжність (11) є слабкою.

Дослідимо асимптотичну поведінку $U_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, при $t\to\infty$. З рівностей (3) матимемо

$$\lim_{t\to\infty}U_i(t) = \lim_{t\to\infty}\sum_{j=1}^m\int_0^1 B_j(t(1-x))R_{ij}\{tdx\} =$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sum_{j=1}^m\int_0^1(1-x)^{-\beta_j}t^{-\beta_j}L(t(1-x))R_{ij}\{tdx\} =$$

$$=\sum_{j=1}^m\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{\beta_j-\alpha}}\int_0^1(1-x)^{-\beta_j}\frac{L(t(1-x))}{L(t)}t^{-\alpha}L(t)R_{ij}\{tdx\},\quad i=\overline{1,m}.$$

Позначимо $R^t_{ij}(x) = t^{-\alpha}L(t)R_{ij}(tx)$, $t > 0$, $x \in [0,1]$, $0 \le \alpha < 1$, $i,j = \overline{1,m}$. Згідно з (11), сім'я мір R^t_{ij}, $t > 0$, $i,j = \overline{1,m}$, слабко збігається до міри $p_j\mu$, $j = \overline{1,m}$. Тому за лемою 2

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 (1-x)^{-\beta_j} L(t(1-x))R_{ij}\{tdx\} = L(t)\int_0^1 (1-x)^{-\beta_j} p_j\mu\{dx\}$$

при $t \to \infty$, $i,j = \overline{1,m}$. Звідси

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^1 (1-x)^{-\beta_j} \frac{L(t(1-x))}{L(t)} R_{ij}\{tdx\} = p_j \int_0^1 (1-x)^{-\beta_j}\mu\{dx\},\ \ i,j = \overline{1,m}.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} U_i(t) = \sum_{j=1}^m p_j \int_0^1 (1-x)^{-\beta_j}\mu\{dx\}\frac{1}{t^{\beta_j-\alpha}}, \qquad i = \overline{1,m}.$$

Якщо $\alpha = \beta_1 = \ldots = \beta_m$, то

$$\lim_{t\to\infty} U_i(t) = \sum_{j=1}^m p_j \int_0^1 (1-x)^{-\beta_j}\mu\{dx\} = \int_0^1 (1-x)^{-\alpha}\mu\{dx\}, \quad i = \overline{1,m};$$

якщо $\alpha < \beta_j$, $j = \overline{1,m}$, то $\lim\limits_{t\to\infty} U_i(t) = 0, \quad i = \overline{1,m}$; якщо $\alpha > \beta_j$, $j = \overline{1,m}$, то $\lim\limits_{t\to\infty} U_i(t) = \infty, \quad i = \overline{1,m}.$

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботах [7, 8] досліджено асимптотику розв'язку рівняння відновлення на нескінченності для додатних незалежних однаково розподілених випадкових величин. Ми дослідили асимптотичну поведінку розв'язку рівняння відновлення для напівмарковського процесу зі скінченим числом станів та неперервним часом за умови нескінченності середнього часу перебування цього процесу в кожному фіксованому стані. Аналогічно до праці [8], вільний член нашого рівняння відновлення є функцією, скінченною в нулі і правильно змінною на нескінченності з показником, що приймає значення з відрізку $[-1, 0]$, але хвіст розподілу ймовірностей, на відміну від [8], правильно змінюється на нескінченності з показником $-\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$. Якщо повільно змінна функція на нескінченності є неспадною, встановлено умови, при яких розв'язок рівняння марковського відновлення має скінченну границю.

[1] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М: Наука, 1988. – 552 с.

[2] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.

[3] *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наук. думка, 1976. – 184 с.

[4] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – 752 с.

[5] *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980.

[6] *Шуренков В.М., Єлейко Я.И.* Предельные распределения временных средних для полумарковского процесса с конечным числом состояний // Укр. мат. журн., 1979. – **31**, № 5. – С. 598–603.

[7] *Ericson K. B.* Strong renewal theorems with infinite mean // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – Vol. 151. – P. 263–291.

[8] *Kevin K. Anderson, Krishna B. Athreya.* A renewal theorem in the infinite mean case // The Annals of Probability. – 1987. – Vol. 15, № 1. – P. 388–393.

INVESTIGATION OF AN ASYMPTOTIC OF THE SOLUTION OF MARKOV RENEWAL EQUATION

Nataliya BUHRII

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

An asymptotic of the solution of renewal equation for semi-Markov process with finite state space without finiteness condition of mean stay times of this process in every fix state is investigating. There are established conditions under which this solution has a finite limit.