ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

©2007 р. Оксана МЕДВІДЬ, Михайло СИМОТЮК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 21 червня 2007 р.

Встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі з інтегральними умовами для еволюційної системи рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу в шкалі просторів Соболєва. Доведено, що ці умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень параметра відхилення.

1. ВСТУП

В області $Q = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in \Omega\}$, Ω — одновимірний тор $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, розглядаємо таку задачу з інтегральними умовами для лінійної системи еволюційних рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу:

$$\frac{\partial \vec{U}(t,x)}{\partial t} = A\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{U}(t,x+h) + \vec{F}(t,x), \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{1}$$

$$B\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\int_0^T \vec{U}(t,x)dt = \vec{\Phi}(x), \quad T > 0, \tag{2}$$

де $h \in \Omega$, $A(\xi), B(\xi)$ — матриці розміру $n \times n$, елементами яких є многочлени з комплексними коефіцієнтами; $\vec{\Phi} : \Omega \to \mathbb{C}^n$, $\vec{F} : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{C}^n$ — задані, а $\vec{U} : (0,T)\times\Omega \to \mathbb{C}^n$ — шукана вектор-функції. Будемо вважати, що

$$A(\xi) = A_N\xi^N + \ldots + A_1\xi + A_0, \quad B(\xi) = B_M\xi^M + \ldots + B_1\xi + B_0, \quad N, M \in \mathbb{N},$$

УДК 517.95+511.2; MSC 2000: 11K60, 35A05, 35B10, 35B30, 42B05
Робота виконана при фінансовій підтримці ДФФД України (проект № 14.1/017)

де $A_0, \dots, A_N, B_0, \dots, B_M$ — матриці розміру $n \times n$.

Задачі для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом (тобто рівнянь, які пов'язують значення невідомої функції та її похідних при різних значеннях аргументу) виникають при математичному описі багатьох систем, коли враховується, що взаємодія між частинами системи відбувається не миттєво, а з деяким запізненням. Задачі, при математичному описі яких є суттєвим врахування відхилень аргументу, виникають у теорії ядерних реакторів, теорії автоматичного регулювання, імунології, епідеміології, математичній економіці та інших областях природничих наук (див. [1, 10, 11, 20, 21] та бібліографію в них). Різноманітним аспектам теорії диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом та її застосуванням присвячено обширну літературу [1, 8, 10, 11, 20, 21, 23].

Для випадку рівнянь без відхилення аргументу ($h = 0$) задачі з інтегральними умовами вивчались у різних аспектах багатьма авторами. Так, у роботах Л.В.Фардіголи [15–19] у шарі $\Pi(T) = [0, T] \times \mathbb{R}^p$, $T > 0$, досліджено інтегральну задачу вигляду (1), (2) для $h = 0$. У [15–19] отримано критерії коректної розв'язності такої задачі у класах функцій скінченної гладкості зі степеневим зростанням при $|x| \to +\infty$; а також критерій сильної коректності (підвищення гладкості розв'язку порівняно із заданою вектор-функцією $\vec{\Phi}(x)$) задачі (1), (2) і для таких задач досліджено питання про наявність рівномірних за t оцінок похідних (за x) розв'язків задач. Вивчено вплив матриць A, B та товщини шару T на властивості розв'язків інтегральної задачі.

У роботі І.В.Тіхонова [14] у банаховому просторі E досліджено інтегральну задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t)d\mu(t) = u_1 \in E, \tag{3}$$

де $T > 0$, A — лінійний замкнений оператор в E, а $\mu(t)$ — скалярна функція обмеженої варіації на відрізку $[0, T]$. У [14] з'ясовано, що якщо міра $\mu(t)$ не вироджується на кінцях відрізка $[0, T]$, то для єдиності розв'язку задачі (3) на $[0, T]$ необхідно і досить, щоб жоден нуль характеристичної функції $l(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, не був власним значенням оператора A. Окремі результати у [14] стосуються випадків, коли оператор A є симетричним або породжує C_0-напівгрупу.

М.І.Іванчов у роботі [4] розглянув початково-крайову задачу для параболічного рівняння з інтегральними умовами в якості крайових умов

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(t,x), \quad 0 < x < h, \quad 0 < t \le T,$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad \int_0^h p_i(x)u(t,x)dx=\mu_i(t), \quad i=1,2, \quad t\in[0,T].$$

Такі задачі виникають при дослідженні процесів керування термопружними деформаціями [2]. У роботі [4] встановлено умови існування і єдиності класичного розв'язку задачі шляхом зведення її до еквівалентної першої крайової задачі для того ж рівняння.

Для строго гіперболічних за Петровським рівнянь вигляду

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{|s|=j} a_{j,s}\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{n-j}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}=0, \tag{4}$$

П.І.Штабалюк [22, §2.3] (див. також §7.4 у [12]) дослідив у класах функцій, майже періодичних за просторовими змінними $x_1,\dots,x_p$, задачу з інтегральними умовами у вигляді моментів

$$\int_0^T t^{j-1}u(t,x)dt=\varphi_j(x), \quad j=1,\dots,n. \tag{5}$$

Розв'язність такої задачі пов'язана із проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано метричний підхід [12]. На основі цього підходу у [22, §2.3], [12, §7.4] встановлено, що умови існування єдиного розв'язку задачі (4), (5) виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $T>0$ та для майже всіх векторів $\vec{A}=\mathrm{colon}(a_{j,s}:|s|=j, j=\overline{1,n})$, складених з коефіцієнтів рівняння (4), а у випадку однієї просторової змінної ($p=1$) — для всіх $T>0$ та для майже всіх векторів $\vec{A}$.

У [9] авторами досліджено задачу з інтегральними умовами у вигляді моментів для випадку довільного (без обмежень на тип та кількість просторових змінних) лінійного рівняння

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(D_x)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}=0, \tag{6}$$

де $D_x=(-i\partial_{x_1},\dots,-i\partial_{x_p})$, $A_0(\xi),\dots,A_{n-1}(\xi)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів N_j, $N_j\in\mathbb{N}$, відповідно ($\xi\in\mathbb{R}^p$). У [9] запропоновано нову (порівняно з [22, §2.3]) методику для оцінювання знизу малих знаменників інтегральної задачі і встановлено загальний результат про коректність цієї задачі для майже всіх (стосовно міри та розмірності Гаусдорфа на прямій) її верхніх меж для довільного лінійного рівняння.

В.С.Ільків [5] дослідив задачу про знаходження розв'язку системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

$$\sum_{s_0+s_1+\ldots+s_p\le n} A_s(t)\partial_{x_1}^{s_1}\ldots\partial_{x_p}^{s_p}\partial_t^{s_0}\vec{U}(t,x)=0,$$

$$\int_0^T(\mu(t)+\nu)\partial_t^{j-1}\vec{U}(t,x)dt=\vec{\Phi}_j(x),\quad j=1,\ldots,n,$$

де матриці $A_s(t)$ є квадратними, елементи яких є неперервними за змінною t на відрізку $[0,T]$, $A_{n,0,\ldots,0}$ — одинична матриця. У [5] встановлено коректність цієї задачі у шкалі просторів Соболєва для всіх параметрів $\nu\in\mathbb{C}$ (за винятком множини як завгодно малої міри Лебега в $\mathbb{C}$).

Основною метою даної роботи є встановлення результату про розв'язність у шкалі просторів Соболєва задачі (1), (2) для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень параметра відхилення $h\in\Omega$.

2. КОРЕКТНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

Нехай H_α^n ($\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$) — поповнення простору скінченних векторних тригонометричних поліномів

$$\vec{\Phi}(x)=\sum\vec{\Phi}_k e^{ikx},\quad \vec{\Phi}_k=\mathrm{col}\,(\Phi_k^1,\ldots,\Phi_k^n)\in\mathbb{C}^n,$$

за нормою

$$\|\vec{\Phi}(x);H_\alpha^n\|=\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\vec{\Phi}_k\|^2(1+|k|)^{2\alpha}},\quad \|\vec{\Phi}_k\|^2=|\Phi_k^1|^2+\ldots+|\Phi_k^n|^2;$$

$C^m([0,T];H_\alpha^n)$ — простір вектор-функцій $\vec{U}(t,x)$ таких, що для фіксованого $t\in[0,T]$ похідні $\partial^j\vec{U}(t,x)/\partial t^j$, $0\le j\le m$, належать до простору H_α^n і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в просторі $C^m([0,T];H_\alpha^n)$ задаємо формулою

$$\|\vec{U}(t,x);C^m([0,T];H_\alpha^n)\|=\sum_{j=0}^{m}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^j\vec{U}(t,x)}{\partial t^j};H_\alpha^n\right\|.$$

Означення. *Задачу* (1), (2) *будемо називати* $(\alpha_0;\alpha_1,\alpha_2)$*–коректною, якщо для довільних* $\vec{\Phi}(x)\in H_{\alpha_1}^n$, $\vec{F}(t,x)\in C([0,T];H_{\alpha_2}^n)$ *у просторі* $C^1([0,T];H_{\alpha_0}^n)$ *існує єдиний розв'язок* $\vec{U}(t,x)$ *задачі* (1), (2), *для якого виконується нерівність*

$$\|\vec{U};C^1([0,T];H_{\alpha_0}^n)\|\le C_1\left(\|\vec{\Phi}(x);H_{\alpha_1}^n\|+\|\vec{F}(t,x);C([0,T];H_{\alpha_2}^n)\|\right),\quad (7)$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від вибору вектор-функцій $\vec{\Phi}(x), \vec{F}(t,x)$.

Для встановлення умов коректності інтегральної задачі (1), (2) нам знадобляться деякі допоміжні твердження про оцінки власних значень та власних векторів матриць. Матрицю $A^* = \|a^*_{ij}\|^n_{i,j=1}$ називаємо приєднаною до матриці $A = \|a_{ij}\|^n_{i,j=1}$, якщо $a^*_{ij} = A_{ji}$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, де A_{ij} — алгебричне доповнення елемента a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$.

Лема 1. [3, с. 95]. *Якщо λ — просте власне значення матриці A, то матриця $(\lambda E - A)^*$ має ненульовий стовпець. Цей стовпець є власним вектором матриці A, що відповідає власному значенню λ.*

Лема 2. *Нехай λ — просте власне значення матриці $A_N, \vec{\xi}$ — ненульовий стовпець матриці $(\lambda E - A_N)^*$, який має номер q. Тоді існують такі сталі $C_1 > 0$, $K_1 > 0$, що для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $|k| \geq K_1$:*

1) матриця $k^{-N}A(k)$ має таке просте власне значення $\lambda(k)$, для якого виконується нерівність

$$|\lambda(k) - \lambda| \leq C_1|k|^{-1};$$

2) матриця $\big(\lambda(k)E - k^{-N}A(k)\big)^*$ має ненульовий q-ий стовпець $\vec{\xi}(k)$, такий, що

$$\|\vec{\xi}(k) - \vec{\xi}\| \leq C_1|k|^{-1},$$

при цьому вектор $\vec{\xi}(k)$ є власним вектором матриці $k^{-N}A(k)$, який відповідає її власному значенню $\lambda(k)$.

Доведення леми 2 проводиться стандартними засобами теорії асимптотик. Із лем 1, 2 випливає наступне твердження.

Лема 3. *Нехай усі власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матриці A_N є простими. Тоді для досить великих за модулем $k \in \mathbb{Z}$ усі власні значення $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ матриці $A(k)$ є простими. Ці власні значення можна занумерувати так, щоб виконувались нерівності*

$$|\lambda_j(k) - \lambda_j k^N| \leq C_2|k|^{N-1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Якщо простому власному значенню λ_j матриці A_N відповідає ненульовий стовпець $\vec{\xi}_j$ матриці $(\lambda_j E - A_N)^*$, який має номер $q(j)$, то для досить великих за модулем $k \in \mathbb{Z}$ матриця $(\lambda_j(k)E - A(k))^*$ має такий ненульовий $q(j)$-ий стовпець $\vec{\xi}_j(k)$, що

$$\|\vec{\xi}_j(k) - \vec{\xi}_j k^N\| \leq C_2|k|^{N-1}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Вектор $\vec{\xi}_j(k)$ є власним вектором матриці $A(k)$, що відповідає власному значенню $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$.

Лема 4. *Нехай матриця B_M — невироджена. Тоді для досить великих за модулем $k \in \mathbb{Z}$ матриця $B(k)$ є невиродженою, при цьому для оберненої матриці $B^{-1}(k)$ виконується нерівність*

$$\|B^{-1}(k)\vec{\Psi}\| \leq C_3(1+|k|)^{-M}\|\vec{\Psi}\|. \tag{8}$$

Доведення. Очевидно, що існує додатна стала C_4, яка менша від 1, така, що для досить великих $k \in \mathbb{Z}$ виконуються такі оцінки для норми:

$$\|B_M^{-1}B_{M-1}k^{-1} + \ldots + B_M^{-1}B_0k^{-M}\| \leq C_4 < 1.$$

Тому згідно з теоремою 5 на с. 230 у [6] матриця

$$\left(E + B_M^{-1}B_{M-1}k^{-1} + \ldots + B_M^{-1}B_0k^{-M}\right)$$

є оборотною, при цьому

$$\left\|\left(E + B_M^{-1}B_{M-1}k^{-1} + \ldots + B_M^{-1}B_0k^{-M}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-C_4}. \tag{9}$$

Оскільки $B(k) = B_M k^M\left(E + B_M^{-1}B_{M-1}k^{-1} + \ldots + B_M^{-1}B_0k^{-M}\right)$, то для досить великих за модулем $k \in \mathbb{Z}$ матриця $B(k)$ є оборотною, як добуток невироджених матриць, при цьому

$$B^{-1}(k) = \left(E + B_M^{-1}B_{M-1}k^{-1} \ldots + B_M^{-1}B_0k^{-M}\right)^{-1} B_M^{-1}k^{-M}.$$

З отриманої рівності та оцінки (9) випливає нерівність (8). Лему доведено.

Для подальших викладок нам знадобляться наступні позначення. Нехай $\Delta(k) = \int_0^T \exp(A(k)e^{ikh}t)dt$, $k \in \mathbb{Z}$. Зрозуміло, що

$$\det \Delta(k) = \prod_{j=1}^{n} \int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt,$$

де $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ — власні значення матриці $A(k)$. Якщо для всіх $k \in \mathbb{Z}$ виконуються нерівності

$$\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

то можна коректно означити матриці

$$R_k(t) = \Delta^{-1}(k)\exp(A(k)e^{ikh}t), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Лема 5. *Нехай для всіх $k \in \mathbb{Z}$ виконується умова* (10) *і нехай існує стала $\omega \in \mathbb{R}$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k виконуються нерівності*

$$\left|\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt\right| \geq (1+|k|)^{-\omega}\max\{1; e^{T\mathrm{Re}(\lambda_j(k)e^{ikh})}\},\ j=1,\dots,n. \tag{12}$$

Якщо усі власні значення матриці A_N є простими, то для досить великих за модулем $k \in \mathbb{Z}$ виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]} \|R_k(t)\| \leq C_5(1+|k|)^{\omega}, \tag{13}$$

$$\max_{t\in[0,T]} \|R'_k(t)\| \leq C_5(1+|k|)^{\omega+N}, \tag{14}$$

Доведення. Згідно з лемою 3 для великих за модулем $k \in \mathbb{Z}$ власні значення матриці $A(k)$ є простими. Цим власним значенням відповідають власні вектори $\vec{\xi}_1(k),\dots,\vec{\xi}_n(k)$, нехай $\vec{\xi}_j(k) = \mathrm{col}(\xi_j^1(k),\dots,\xi_j^n(k))$, $j=1,\dots,n$. Із того, що власні значення є простими, випливає, що вектори $\vec{\xi}_1(k),\dots,\vec{\xi}_n(k)$ утворюють базу простору $\mathbb{C}^n$. Розглянемо довільний вектор $\vec{\Psi} = \mathrm{col}(\Psi^1,\dots,\Psi^n) \in \mathbb{C}^n$ з одиничною нормою $\|\vec{\Psi}\| = 1$. Розвинемо цей вектор за базовими векторами $\vec{\xi}_1(k),\dots,\vec{\xi}_n(k)$:

$$\vec{\Psi} = \psi_k^1\vec{\xi}_1(k) + \ldots + \psi_k^n\vec{\xi}_n(k). \tag{15}$$

Сталі ψ_k^q, $q=1,\dots,n$, у формулі (15) є розв'язками такої системи лінійних рівнянь

$$\Psi^j = \sum_{s=1}^n \xi_q^j(k)\psi_k^q, \quad j=1,\dots,n.$$

Згідно з правилом Крамера ці розв'язки зображуються рівностями

$$\psi_k^q = \sum_{j=1}^n \frac{V_{jq}(k)}{V(k)}\Psi^j, \quad q=1,\dots,n,$$

де $V_{jq}(k),\ j,q=1,\dots,n,$ — алгебричне доповнення елемента $\xi_q^j(k), j,q = 1,\dots,n$, у визначнику $V(k) \equiv \det\|\xi_j^q(k)\|_{j,q=1}^n$. З леми 3 випливають такі оцінки:

$$\|\vec{\xi}_j(k)\| \leq C_6(1+|k|^N), \quad j=1,\dots,n, \tag{16}$$

$$|V_{jq}(k)| \leq C_7(1+|k|^{N(n-1)}), \quad |V(k)| \geq C_8(1+|k|^{nN}).$$

Тому

$$|\psi_k^q| \le C_9(1+|k|)^{-N}\|\vec{\Psi}\| = C_9(1+|k|)^{-N}, \quad q = 1,\dots,n. \tag{17}$$

Враховуючи, що матриця $R_k(t)$ є функцією матриці $A(k)$, дістаємо, що

$$R_k(t)\vec{\xi}_j(k) = \frac{\exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)}{\displaystyle\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt}\,\vec{\xi}_j(k), \quad j = 1,\dots,n.$$

Тоді

$$R_k(t)\vec{\Psi} = \sum_{j=1}^n \psi_k^j \frac{\exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)}{\displaystyle\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt}\,\vec{\xi}_j(k).$$

Оскільки для довільного $t \in [0,T]$ виконуються нерівності

$$|\exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)| \le \max\{1; e^{T\mathrm{Re}(\lambda_j(k)e^{ikh})}\}, \quad j = 1,\dots,n,$$

то, враховуючи умову (12) та оцінки (17), (16), отримуємо, що для довільного вектора $\vec{\Psi} \in \mathbb{C}^n$ з одиничною нормою $\|\vec{\Psi}\| = 1$

$$\|R_k(t)\vec{\Psi}\| \le \sum_{j=1}^n |\psi_k^j| \left| \frac{\exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)}{\displaystyle\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt} \right| \|\vec{\xi}_j(k)\| \le C_{10}(1+|k|)^{\omega}.$$

З отриманої нерівності випливає оцінка (13). Доведення оцінки (14) проводиться аналогічно і випливає з рівності

$$R_k'(t)\vec{\Psi} = \sum_{j=1}^n \psi_k^j \frac{\lambda_j(k)e^{ikh}\exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)}{\displaystyle\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt}\,\vec{\xi}_j(k)$$

та нерівностей

$$|\lambda_j(k)| \le C_{11}(1+|k|^N), \quad j = 1,\dots,n, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Встановимо тепер достатні умови коректності задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай для всіх $k \in \mathbb{Z}$ виконуються умови* (10), *матриця $B(k)$ є невиродженою, і нехай існує стала $\omega \in \mathbb{R}$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) цілих чисел k виконуються нерівності* (12).

Якщо матриця B_M — невироджена, а всі власні значення матриці A_N є простими, то для довільного $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ задача (1), (2) *є* $(\alpha_0;\alpha_1,\alpha_2)$*–коректною, де*

$$\alpha_1 \geq \alpha_0 + \omega + N - M, \quad \alpha_2 \geq \alpha_0 + \omega + N.$$

Доведення. Нехай $\vec{\Phi} \in H^n_{\alpha_0}$. Покажемо, що в просторі $C^1([0,T];H^n_\alpha)$ існує єдина вектор-функція $\vec{U}(t,x)$, яка є розв'язком задачі (1), (2) і справджує співвідношення (7). Функцію $\vec{U}(t,x) \in C^1([0,T];H^n_\alpha)$ можна зобразити у вигляді векторного ряду Фур'є

$$\vec{U}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{U}_k(t)e^{ikx},$$

де $\vec{U}_k(t) \in C^1[0,T]$, $k \in \mathbb{Z}$. З умов (2) випливає, що кожна вектор-функція $\vec{U}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком такої інтегральної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\vec{U}_k'(t) = A(k)e^{ikh}\vec{U}_k(t) + \vec{F}_k(t), \tag{19}$$

$$B(k)\int_0^T \vec{U}_k(t)dt = \vec{\Phi}_k, \tag{20}$$

де $\vec{\Phi}_k$, $\vec{F}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $\vec{\Phi}(x)$ та $\vec{F}(t,x)$ відповідно. Легко перевірити, що при виконанні умов теореми для кожного $k \in \mathbb{Z}$ існує єдиний розв'язок задачі (19), (20) в класі $C^1[0,T]$. Цей розв'язок зображується формулою

$$\vec{U}_k(t) = R_k(t)B^{-1}(k)\vec{\Phi}_k + \int_0^T\int_\xi^t R_k(t+\xi-\tau)\vec{F}_k(\tau)d\tau d\xi,$$

де матриці $R_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, означені рівностями (11). Із лем 4, 5 випливає, що в кожній точці $t \in [0,T]$ виконуються такі оцінки:

$$\|R_k(t)B^{-1}(k)\vec{\Phi}_k\| \leq C_{12}(1+|k|)^\omega\|B^{-1}(k)\vec{\Phi}_k\| \leq C_{13}(1+|k|)^{\omega-M}\|\vec{\Phi}_k\|,$$

$$\|R_k'(t)B^{-1}(k)\vec{\Phi}_k\| \leq C_{14}(1+|k|)^{\omega+N}\|B^{-1}(k)\vec{\Phi}_k\| \leq C_{15}(1+|k|)^{\omega+N-M}\|\vec{\Phi}_k\|,$$

$$\left|\int_0^T\int_\xi^t R_k(t+\xi-\tau)\vec{F}_k(\tau)d\tau d\xi\right| \leq C_{16}(1+|k|)^\omega\left(\int_0^T\|\vec{F}_k(t)\|^2dt\right)^{1/2},$$

$$\left|\frac{d}{dt}\int_0^T\int_\xi^t R_k(t+\xi-\tau)\vec{F}_k(\tau)d\tau d\xi\right| \leq C_{17}(1+|k|)^{\omega+N}\left(\int_0^T\|\vec{F}_k(t)\|^2dt\right)^{1/2}.$$

Таким чином, для вектор-функцій $\vec{U}_k(t)$ та $\vec{U}'_k(t)$ виконуються нерівності

$$\max_{t\in[0,T]} \|\vec{U}_k^{(i)}(t)\| \le C_{18}(1+|k|)^{\omega+iN}\times$$
$$\times\left((1+|k|)^{-M}\|\vec{\Phi}_k\| + \sqrt{\int_0^T \|\vec{F}_k(t)\|^2 dt}\right), \quad i=0,1, \tag{21}$$

Із оцінок (21) отримуємо, що при $\alpha_1 \ge \alpha_0+\omega+N-M$, $\alpha_2 \ge \alpha_0+\omega+N$

$$\|\vec{U}(t,x); C^1([0,T]; H^n_{\alpha_0})\| \le C_{20}\Big(\|\vec{\Phi}(x); H^n_{\alpha_0+\omega+N-M}\| + \|\vec{F}(t,x);$$
$$C([0,T]; H^n_{\alpha_0+\omega-M})\|\Big) \le C_{21}\Big(\|\vec{\Phi}(x); H^n_{\alpha_1}\| + \|\vec{F}(t,x); C([0,T]; H^n_{\alpha_2})\|\Big).$$

Теорему доведено.

3. МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ЗНИЗУ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ

Дослідимо питання про можливість виконання оцінок (12). Для цього використаємо таку лему.

Лема 6. *Нехай $f : I \to J$ — таке відображення інтервалу I на інтервал $J = f(I)$, що $|f'(x)| \ge \delta > 0$ для всіх $x \in I$. Тоді для довільної вимірної множини $E \subset I$*

$$\operatorname{mes} E \le \frac{1}{\delta}\operatorname{mes} f(E).$$

Теорема 2. *Нехай усі власні значення матриці A_N є простими. Якщо $\omega > N+1$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $h \in \Omega$ кожна з оцінок* (12) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) цілих чисел k.*

Доведення. Згідно з лемою 3 для досить великих за модулем $k \in \mathbb{Z}$ усі власні значення $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ матриці $A(k)$ є простими. Якщо $\lambda_{j_0}(k) = 0$ для деякого j_0, то $\int_0^T \exp(\lambda_{j_0}(k)e^{ikh}t)dt = T$ і відповідна оцінка у формулі (12) виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) цілих чисел k.

Нехай тепер усі власні значення $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ є відмінними від нуля. Тоді

$$\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt = \frac{\exp(\lambda_j(k)e^{ikh}T) - 1}{\lambda_j(k)e^{ikh}}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Оскільки для довільного $z \in \mathbb{C}$ виконується оцінка

$$|e^z - 1| \ge \max\{1; e^{\operatorname{Re} z}\} \cdot |\sin(\operatorname{Im} z)|,$$

то з попередньої рівності дістаємо, що

$$\left|\int_0^T \exp(\lambda_j(k)e^{ikh}t)dt\right| \geq \max\{1, e^{T\mathrm{Re}(\lambda_j(k)e^{ikh})}\}\times \\ \times\frac{|\sin(T\mathrm{Im}(\lambda_j(k)e^{ikh}))|}{|\lambda_j(k)|}, \quad j=1,\ldots,n. \tag{22}$$

Таким чином, для доведення теореми досить перевірити, що при $\omega > N+1$ для майже всіх значень $h \in \Omega$ кожна з нерівностей

$$\frac{|\sin(T\mathrm{Im}(\lambda_j(k)e^{ikh}))|}{|\lambda_j(k)|} \geq (1+|k|)^{-\omega}, \quad j=1,\ldots,n.$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) цілих чисел k. З огляду на лему Бореля–Кантеллі для цього досить встановити, що при $\omega > N+1$ збігаються ряди $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{mes}\, M_{j,\omega}(k)$, $j=1,\ldots,n$, де

$$M_{j,\omega}(k) \equiv \left\{h\in\Omega : \frac{|\sin(T\mathrm{Im}(\lambda_j(k)e^{ikh}))|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\}.$$

Нехай $\lambda_j(k) = |\lambda_j(k)|e^{i\varphi_j(k)}$, $j=1,\ldots,n$, де $\varphi_j(k)$ — аргумент комплексного числа $\lambda_j(k)$. Тоді $\mathrm{Im}(\lambda_j(k)e^{ikh}) = |\lambda_j(k)|\sin(kh+\varphi_j(k))$, $j=1,\ldots,n$. Розглянемо випадок, коли $k>0$. Очевидно, що

$\mathrm{mes}\, M_{j,\omega}(k) =$

$$\frac{1}{k}\mathrm{mes}\left\{H\in(0,2\pi k) : \frac{|\sin(T|\lambda_j(k)|\sin(H+\varphi_j(k))|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\} =$$

$$= \frac{1}{k}\mathrm{mes}\left\{H\in(\varphi_j(k),\varphi_j(k)+2\pi k) : \frac{|\sin(T|\lambda_j(k)|\sin H|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\}.$$

Для заданого $\delta = (\omega-N-1)/2 > 0$ розіб'ємо відрізок $[\varphi_j(k),\varphi_j(k)+2\pi k]$ на такі відрізки I_q $(q=1,\ldots,N_1(k))$ та відрізки J_q $(q=1,\ldots,N_2(k))$, щоб виконувались умови

$$\forall\, H\in I_q \quad |\cos H| \geq \frac{1}{k^{\delta+1}}, \quad q=1,\ldots,N_1(k),$$

$$\forall\, H\in J_q \quad |\cos H| \leq \frac{1}{k^{\delta+1}}, \quad q=1,\ldots,N_2(k).$$

Для кількостей $N_1(k)$, $N_2(k)$ цих відрізків, очевидно, справджуються оцінки $N_1(k) \leq C_{22}k$, $N_2(k) \leq C_{22}k$. Оскільки $\mathrm{mes}\, J_q \leq C_{23}k^{-\delta-1}$, $q =$

$1, \ldots, N_2(k)$, то $\operatorname{mes}\left(\bigcup\limits_{q=1}^{N_2(k)} J_q\right) \leq C_{24} k^{-\delta}$. Згідно з лемою 6 виконуються оцінки

$$\operatorname{mes}\left\{H \in I_q : \frac{|\sin(T|\lambda_j(k)|\sin H)|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\} \leq$$

$$\leq k^{1+\delta} \operatorname{mes}\left\{t \in \sin(I_q) : \frac{|\sin(T|\lambda_j(k)|t)|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\} \leq$$

$$\leq k^{1+\delta} \operatorname{mes}\left\{t \in [-1;1] : \frac{|\sin(T|\lambda_j(k)|t)|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\}.$$

При доведенні леми 10 у [13] встановлено, що

$$\operatorname{mes}\left\{t \in [-1;1] : \frac{|\sin(T|\lambda_j(k)|t)|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\} \leq$$

$$\leq C_{25}(1+|\lambda_j(k)|)(1+|k|)^{-\omega} \leq C_{26}(1+|k|)^{N-\omega},$$

внаслідок виконання оцінок (18). Таким чином, для $k > 0$

$\operatorname{mes} M_{j,\omega}(k) \leq$

$$C_{27} k^{-1} \sum_{q=1}^{N_2(k)} \operatorname{mes}\left\{H \in I_q : \frac{|\sin(T|\lambda_j(k)|\sin H)|}{|\lambda_j(k)|} \leq (1+|k|)^{-\omega}\right\} +$$

$$+C_{28} k^{-1} \sum_{q=1}^{N_2(k)} \operatorname{mes} J_q \leq C_{29} k^{-1-\delta} + C_{30} k^{\delta+N-\omega} =$$

$$= C_{29} k^{-1-\delta} + C_{30} k^{-1-(\omega-N-1)/2}.$$

Аналогічно розглядається випадок $k < 0$. Звідси отримуємо збіжність рядів $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{mes} M_{j,\omega}(k)$, $j = 1, \ldots, n$.

Теорему доведено.

4. РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МАЙЖЕ ВСІХ ЧИСЕЛ h

Із результатів, встановлених у пунктах 2, 3 роботи, випливає наступне твердження про розв'язність задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва для майже всіх чисел $h \in \Omega$.

Теорема 3. *Нехай матриці B_M, $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, є невиродженими, а всі власні значення матриці A_N є простими. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень $h \in \Omega$ задача* (1), (2) *є* $(\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2)$*–коректною, де*

$$\alpha_1 \geq \alpha_0 + 2N - M + 1, \quad \alpha_2 \geq \alpha_0 + 2N + 1.$$

[1] *Антоневич А.Б.* Линейные функцтональные уравнения. Операторный подход. – Минск: Университетское, 1988. – 232 с.

[2] *Вігак В.М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.

[3] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[4] *Иванчов Н.И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. – 2004.– Т. 40, № 4.– С. 547–564.

[5] *Ільків В.С.* Задача з інтегральними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і змінними коефіцієнтами // Вісник ДУ „Львівська політехніка". Прикл. матем. – 1999. – № 364.– С. 318–323.

[6] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4, перераб. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

[7] *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

[8] *Литвинчук Г.С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

[9] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними // Мат. Студії. – 2007. – Т. 28, № 2. – С.

[10] *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

[11] *Мышкис А.Д.* О некоторых проблемах теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. – 1977. – Т. 32, вып. 2. – С. 173–202.

[12] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[13] *Пташник Б.Й., Симотюк М.М.* Діофантові наближення характеристичного визначника задачі Діріхле для лінійного рівняння з частинними похідними // Spectral and evolution problems. – 2006, vol. 16. – С. 25–32.

[14] *Тихонов И.В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Серия матем. – 2003. – Т. 67, № 2. – С. 133–166.

[15] *Фардигола Л.В.* Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.

[16] *Фардигола Л.В.* Свойства T–устойчивости интегральной краевой задачи в слое // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. – 1991. – № 55. – С. 78–80.

[17] *Фардигола Л.В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.

[18] *Фардигола Л.В.* Интегральная краевая задача в слое // Матем. заметки. – 1993. – **53**, вып. 6.– С. 122–129.

[19] *Фардигола Л.В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Матем. сборник. – 1995. – **186**, № 11. – С. 123–144.

[20] *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Наука, 1970. – 310 с.

[21] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 422 с.

[22] *Штабалюк П.И.* Почти–периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов // Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. – Львов. – 1984. – 146 с.

[23] *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with transformed argument an algebraic approach. – Warszawa: PWN, 1973. – 354 p.

THE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR LINEAR SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DELAY

Oksana MEDVID, Mykhaylo SYMOTYUK

Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

In this paper we established the conditions of existing in the Sobolev spaces of the unique solution of the integral problem for evolutional systems of partial differential equations with delay. We proved that this conditions are satisfied for almost all (respect to Lebesgue measure) values of parameter of delay.