ПРО МАКСИМУМ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНИЙ ЧЛЕН АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

©2007 р. *Тетяна САЛО* [1], *Олег СКАСКІВ* [2]

[1]Національний університет „Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, Львів 79013
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 12 серпня 2007 р.

Для абсолютно збіжних у півплощині $\{z : \mathrm{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{z\lambda_n}$ відшукано найменшу зростаючу функцію Φ таку, що з умови $\varlimsup\limits_{\sigma\to-0} \ln \mu(\sigma, F)/\Phi(\sigma) = +\infty$ випливає, що співвідношення $\sup\{|F(\sigma+it)| :\ t \in \mathbb{R}\} \sim \mu(\sigma, F) \sim \inf\{|F(\sigma+it)| :\ t \in \mathbb{R}\}$, де $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n} :\ n \geq 0\}$, виконуються при $\sigma \to -0$ зовні деякої множини нульової нижньої лінійної лівосторонньої у точці $\sigma = 0$ щільності.

Нехай $H_a(\lambda)$ — клас абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_a = \{z : \mathrm{Re}\, z < a\}$ рядів Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{z\lambda_n}$ з фіксованою послідовністю показників $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leq n \uparrow +\infty)$. Для функції $F \in H_a(\lambda)$ і $\sigma < a$ позначимо

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\}.$$

Нехай L — клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. У випадку цілих рядів Діріхле (тобто, класу $H(\lambda) = H_+\infty(\lambda)$) відомо [4], що умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\lambda_n) < +\infty$$

УДК 517.76; MSC 2000: 30B50

забезпечує справедливість з функцією $\omega(x) = \ln x$ співвідношення

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \to 0 \tag{1}$$

для кожної функції $F \in H(\lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри (власне, зовні деякої системи інтервалів із скінченною сумою довжин). Подібне твердження правильне і у випадку співвідношення (1) з функцією $\omega(x) = x$, як тільки виконується умова (див. [3])

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty. \tag{2}$$

Якщо функція $F \in H(\lambda)$ задовольняє деяке обмеження вигляду

$$\ln \mu(\sigma, F) \leq \sigma \Phi(\sigma) \quad (\sigma \in [\sigma_0, +\infty)),$$

де $\Phi \in L$ — фіксована функція, то згадану вище умову на показники можна послабити, при цьому, наприклад, співвідношення (1) з функцією $\omega(x) = \ln x$ виконується при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності на $[0, +\infty)$ (див. [11]).

Якщо ж $\omega \in L$ — довільна фіксована диференційовна функція з незростаючою на $[0, +\infty)$ похідною такою, що $\frac{1}{t} = O(\omega'(t))$, $t \to +\infty$, то в роботі [10] знайдено також умову лише на показники λ, яка забезпечує справедливість співвідношення (1) для кожної функції $F \in H(\lambda)$ при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри.

У випадку класу $H_0(\lambda)$ знайдено умови на показники λ, які забезпечують справедливість при $\sigma \to -0$ зовні деяких „малих“ множин співвідношення (1) (у [5] з $\omega(x) = \ln x$, а у [6] з $\omega(x) = x$) для кожної функції $F \in H_0(\lambda)$, що задовольняє одну з умов

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq |\sigma| \Phi(1/|\sigma|), \qquad \varlimsup_{\sigma \to -0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{|\sigma| \Phi(1/|\sigma|)} > 0, \tag{3}$$

де $\Phi \in L$ — деяка фіксована функція. Зокрема, якщо $F \in H_0(\lambda)$ і виконується друга із записаних щойно умов на максимальний член ряду Діріхле, то у випадку, коли функція $\Phi \in L$ є такою, що для оберненої до неї функції φ виконується умова $\varphi(x/\varphi(x)) = (1 + o(1))\varphi(x)$ $(x \to +\infty)$, а показники задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} t \sum_{\lambda_n \geq \Phi(t)} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} = 0,$$

співвідношення (1) з $\omega(x) = x$ виконується при $\sigma \to -0$ зовні деякої множини нульової нижньої лінійної щільності у точці $\sigma = 0$.

Виникає природне питання: чи можна в класі $H_0(\lambda)$ отримати аналоги описаних вище теорем із $[3, 4, 10, 11]$, накладаючи обмеження лише на показники, можливо одночасно з обмеженням на зростання функції $F \in H_0(\lambda)$ вигляду

$$\ln \mu(\sigma, F) \le |\sigma| \Phi(1/|\sigma|) \quad (\sigma \in [\sigma_0, 0)),$$

де $\Phi \in L$ — деяка фіксована функція? Негативну відповідь на це запитання отримуємо з наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай ω, $\Psi \in L$ — довільні функції, $\omega(x) \equiv 0$ для $x < 0$. Для кожної послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \uparrow +\infty)$ існує функція $F \in H_0(\lambda)$, для якої виконуються співвідношення:*

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) - \omega(\ln \mu(\sigma, F)) \to +\infty, \quad \textit{якщо} \quad \sigma \to -0, \tag{4}$$

$$\sup\{|a_n| : n \ge 0\} = +\infty, \tag{5}$$

$$\ln \mu(\sigma, F) \le \Psi(1/|\sigma|) \quad \textit{для всіх} \quad \sigma \in [\sigma_0; 0). \tag{6}$$

Доведення. Нехай (h_n) — така зростаюча до $+\infty$ послідовність, що $(\omega(\ln n) - h_n)$ також неспадає до $+\infty$. Позначимо $L_n = \omega^{-1}(\omega(\ln n) - h_n)$, $c_n = L_{n-1} - L_{n-2}$ і припустимо, що виконуються умови

$$\ln n = o(\lambda_n) \ (n \to +\infty), \quad \sum_{j=3}^{\infty} (c_j/\lambda_j) \Psi^{-1}(L_{j-1}) \le 1, \tag{7}$$

У протилежному випадку здійснюємо елементарну у цьому випадку процедуру проріджування послідовності (λ_n), тобто, вибору такої підпослідовності $\{\lambda_j^*\} \subset \{\lambda_j\}$, для якої умови (7) виконуються. Після цього покладаємо $a_n = 0$, якщо $\lambda_n \notin \{\lambda_j^*\}$, а решту коефіцієнтів вибираємо, як і нижче. Отже, вважаємо, що для послідовності (λ_n) виконуються умови (7). Коефіцієнти ряду Діріхле виберемо у наступний спосіб:

$$\ln a_n = L_{n-1} + \lambda_n \sum_{j=n+1}^{\infty} (c_j/\lambda_j) \quad (n \ge 1).$$

Зауважимо, що $x_n = (\ln a_{n-1} - \ln a_n)/(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = -\sum_{j=n+1}^{\infty} (c_j/\lambda_j) \uparrow 0$ $(n \to +\infty)$. У цьому випадку добре відомо, що $\ln \mu(\sigma, F) = \ln a_n + \sigma\lambda_n$

для всіх $\sigma \in [x_n, x_{n+1})$. Тому для всіх $\sigma \in [x_n, x_{n+1})$ маємо

$$\ln \mu(\sigma, F) \le L_{n-1} + \lambda_n \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j} + \lambda_n x_{n+1} = L_{n-1} + \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} c_{n+1} \le L_n. \quad (8)$$

З іншого боку, для $1 \le m \le n-1$ і $\sigma \in [x_n, x_{n+1})$

$$\ln a_m + \sigma\lambda_m \ge L_{m-1} + \lambda_m \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda_j} + x_n\lambda_m = \lambda_m \sum_{j=m+1}^{n} \frac{c_j}{\lambda_j} + L_{m-1} \ge 0,$$

тому для $\sigma \in [x_n, x_{n+1})$, враховуючи (8), послідовно одержуємо, що

$$M(\sigma, F) = F(\sigma) \ge \sum_{m=1}^{n} a_m \mathrm{e}^{\sigma\lambda_m} \ge n,$$

а також

$$\omega(\ln M(\sigma, F)) \ge \omega(\ln n) - h_n + h_n = \omega(L_n) + h_n \ge \omega(\ln \mu(\sigma, F)) + h_{\nu(\sigma,F)}.$$

Звідси дістаємо умову (4). Для того, щоб одержати (6), зауважимо, що із (7) випливає нерівність

$$\Psi^{-1}(L_n) \sum_{j=n+1}^{\infty} (c_j/\lambda_j) \le 1 \quad (n \ge 2),$$

тому $L_n \le \Psi\big(1/|x_n|\big)$ і, отже, з врахуванням оцінки (8) при $\sigma \in [x_n, x_{n+1})$ одержуємо (6). Співвідношення (4) виводимо негайно, оскільки за побудовою $\ln a_n \ge L_{n-1} \to +\infty \ \ (n \to +\infty)$. Крім того, із (7) випливає, що $F \in H_0(\lambda)$ (див. [1, с. 85]). Теорему 1 доведено.

Зауваження. *Твердження теореми 1 цілком справедливе і стосовно співвідношення*

$$M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ \inf\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\}. \quad (9)$$

Для того, щоб у цьому переконатися, досить замість побудованої у доведенні теореми 1 функції F з коефіцієнтами a_n розглянути функцію $F_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \mathrm{e}^{z\lambda_n}$ і повторити міркування з праці [9, с. 127].

Теорему 1 у випадку співвідношення (1) з $\omega(x) = x$ та у слабшій за (4) формі встановлено в [6]. Відзначимо також, що якщо послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ є такою, що (2) не виконується, то жодне обмеження знизу на

$\mu(\sigma, F)$ також не дозволяє одержати співвідношення (1) з $\omega(x) = x$, а також співвідношення (9) навіть для деякої послідовності $\sigma = \sigma_j \to -0$ (для кожного із співвідношень своєї). Правильне таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $\Psi \in L$ — довільна функція. Для кожної послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \uparrow +\infty)$ такої, що умова (2) не виконується, існує функція $F \in H_0(\lambda)$, для якої співвідношення (1) з $\omega(x) = x$ і (9) не можуть виконуватись хоча б вздовж деякої послідовності значень $\sigma \to -0$, при цьому*

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \Psi\big(1/|\sigma|\big) \ (\sigma_0 \leq \sigma < 0).$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що якщо $F \in H_0(\lambda)$ і послідовність $x_n = (\ln|a_{n-1}| - \ln|a_n|)/(\lambda_n - \lambda_{n-1})$ не спадає, то

$$|a_{n+1}|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_{n+1}} \geq \mathrm{e}^{-q}|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n} \quad (\forall\ \sigma \in [x_n, x_{n+1}]),$$

тоді і тільки тоді, коли $l_n \equiv x_{n+1} - x_n \leq q/(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$, $q > 0$. Виберемо тепер послідовність (l_n), а, отже, (x_n) і (a_n). Не зменшуючи загальності, покладемо $a_0 = 1, x_1 = -1$. Далі, нехай $\Psi_n \uparrow +\infty$ $(n \uparrow +\infty)$ — деяка послідовність і $\Psi(1/|\sigma_n|) = \Psi_{n-1}$. Зрозуміло, що $\sigma_n \uparrow 0$. Тепер, вважаючи, що $\sigma_1 = -1$, $\Psi_1 = \ln \mu(\sigma_1, F)$, виберемо

$$n_1 = \min\left\{n :\ \lambda_n \geq \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\right\}, \quad l_1 = l_2 = \cdots = l_{n_1 - 1} = 0,$$

тобто $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n_1}$. Оскільки $\sum\limits_{n=n_1}^{+\infty} 1/(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = +\infty$, то існує $m_1 > n_1$ таке, що $0 < l_j \leq q/(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$ $(n_1 \leq j \leq m_1 - 1)$, а також $\sum\limits_{j=n_1}^{m_1-1} l_j = \sigma_2 - \sigma_1$, тобто $x_{m_1} = \sigma_2$. Зауважимо, що $\nu(\sigma_1, F) \geq n_1$, тому

$$\ln \mu(\sigma_2, F) = \ln \mu(\sigma_1, F) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \lambda_{\nu(\sigma,F)} d\sigma \geq \ln \mu(\sigma_1, F) + (\sigma_2 - \sigma_1)\lambda_{n_1} \geq$$

$$\geq \ln \mu(\sigma_1, F) + \Psi_2 - \Psi_1 = \Psi\big(1/|\sigma_3|\big).$$

Припустимо тепер, що n_k, m_k вибрано так, що

$$\sum_{j=n_k}^{m_k - 1} l_j = \sigma_{k+1} - \sigma_k, \quad x_{m_k} = \sigma_k, \quad \ln \mu(\sigma_k, F) \geq \Psi\big(1/|\sigma_{k+1}|\big).$$

Виберемо

$$n_{k+1}=\min\left\{n>m_k: \lambda_n \geq \frac{\Psi_{k+1}-\Psi_k}{\sigma_{k+1}-\sigma_k}\right\},$$

$$l_{m_k}=l_{m_{k+1}-1}=\ldots=l_{n_{k+1}-1}=0,$$

тобто $x_{m_k}=x_{m_k+1}=\ldots=x_{n_{k+1}}$. Оскільки

$$\sum_{n=n_{k+1}}^{+\infty} 1/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=+\infty,$$

то знайдеться $m_{k+1}>n_{k+1}$ таке, що $0<l_j\leq q/(\lambda_{j+1}-\lambda_j)$ $(n_{k+1}\leq j\leq m_{k+1}-1)$, $\sum\limits_{j=n_{k+1}}^{m_{k+1}-1} l_j=\sigma_{k+1}-\sigma_k$, тобто $x_{m_{k+1}}=\sigma_{k+1}$. Враховуючи, що $\sigma_k=x_{m_k}=x_{n_{k+1}}$, маємо $\nu(\sigma_k,F)\geq n_{k+1}$, тому

$$\ln\mu(\sigma_{k+1},F)-\ln\mu(\sigma_k,F)=\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}}\lambda_{\nu(\sigma,F)}d\sigma\geq$$

$$(\sigma_{k+1}-\sigma_k)\lambda_{n_{k+1}}\geq\Psi_{k+1}-\Psi_k,$$

звідки отримуємо, що $\ln\mu(\sigma_{k+1},F)\geq\Psi\big(1/|\sigma_{k+2}|\big)$. Зауважимо тепер, що побудована функція F належить до класу $H_0(\lambda)$, а оскільки $x_{n+1}-x_n=l_n\leq q/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ $(n\geq 0)$, то

$$a_{\nu(\sigma)+1}\mathrm{e}^{\sigma\lambda_{\nu(\sigma)+1}}\geq\mathrm{e}^{-q}a_{\nu(\sigma)}\mathrm{e}^{\sigma\lambda_{\nu(\sigma)}}\ (x_1\leq\sigma<0)$$

і, отже,

$$F(\sigma)\geq(1+\mathrm{e}^{-q})\mu(\sigma,F)\quad(x_1\leq\sigma<0).$$

Крім того, для $\sigma\in[\sigma_k,\ \sigma_{k+1})$ і для кожного $k\geq 1$ виконується оцінка

$$\ln\mu(\sigma,F)\geq\ln\mu(\sigma_k,F)\geq\Psi\left(1/|\sigma_{k+1}|\right)\geq\Psi\left(1/|\sigma|\right).$$

З огляду на згадані вище міркування з роботи [9], теорему 2 вважаємо доведеною.

У зв'язку з доведеними і цитованими теоремами для класу $H_0(\lambda)$ виникає наступне питання. Нехай $\lambda=(\lambda_n)$ — довільна фіксована послідовність, для якої виконується умова (2). Чи існує у певному сенсі „найменша“ функція $\Phi\in L$ така, що із правильності однієї з умов (3) (або деяких їхніх різновидів) випливає справедливість при $\sigma\to-0$ співвідношень (1) зовні деякої малої множини?

Певну позитивну відповідь на це запитання отримуємо у випадку співвідношень (1) з $\omega(x) = x$ та (9) з наступних теорем, для формулювання яких нам потрібні деякі приготування. У випадку, коли виконується умова (2), позначимо $\Delta_0 = 0$ і для $n \geq 1$ приймемо

$$\Delta_n = \sum_{j=0}^{n-1}(\lambda_{j+1} - \lambda_j) \sum_{m=j+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} + \frac{1}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} \right),$$

і для $q > 0$ та $\sigma < 0$

$$\alpha_q(\sigma) = \sup\{\Delta_n q + \sigma\lambda_n : n \geq 0\}.$$

Зауважимо, що $\Delta_n \geq n \, (n \geq 1)$, тому

$$(\forall q > 0): \; \alpha_q(\sigma) \to +\infty \; (\sigma \to -0).$$

Теорема 3. *Нехай для послідовності* (λ_n) *виконується умова* (2). *Якщо для функції* $F \in H_0(\lambda)$ *і для всіх* $q > 0$ *виконується умова*

$$\varlimsup_{\sigma \to -0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\alpha_q(\sigma)} = +\infty, \tag{10}$$

то співвідношення (1) *з* $\omega(x) = x$ *та* (9) *виконуються при* $\sigma \to -0$ *зовні деякої множини* $E \in [-1; 0)$ *нульової нижньої лінійної лівосторонньої щільності в точці* $\sigma = 0$.

Теорема 4. *Нехай для послідовності* (λ_n) *виконується умова* (2). *Якщо для функції* $F \in H_0(\lambda)$ *і для всіх* $q > 0$ *виконується умова*

$$\lim_{\sigma \to -0} \frac{\ln \mu(\sigma, F)}{\alpha_q(\sigma)} = +\infty, \tag{11}$$

то співвідношення (1) *з* $\omega(x) = x$ *та* (9) *виконуються при* $\sigma \to -0$ *зовні деякої множини* $E \in [-1; 0)$ *нульової лінійної лівосторонньої щільності в точці* $\sigma = 0$.

З доведення теореми 2 випливає, що ряд Діріхле

$$F_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{\Delta_n q + \sigma\lambda_n}$$

абсолютно збіжний в $\{z : \mathrm{Re} z < 0\}$ ($F_q \in H_0(\lambda)$ для кожного $q > 0$) і для нього співвідношення (1) з $\omega(x) = x$ та (9) не можуть виконуватись навіть на деякій послідовності $\sigma_j \to -0$, при цьому $\ln\mu(\sigma, F_q) = \alpha_q(\sigma)$. Таким чином, твердження теорем 3, 4 у цьому сенсі покращити не можна, а $\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{\alpha_q(\sigma)}{|\sigma|}$ — найменша в описаному розумінні функція, що володіє потрібною властивістю.

Доведення теореми 3. Розглянемо функцію

$$f_q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(a_n^*/\alpha_n\big)\mathrm{e}^{z\lambda_n}, \quad q > 0,$$

де $\alpha_n = \mathrm{e}^{\Delta_n q}$, a_n^* — коефіцієнти-мажоранти Ньютона функції F, тобто, такої функції (див. [7,8]) $F_N(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^* \mathrm{e}^{z\lambda_n}$ з класу $H_0(\lambda)$, що:

а) $a_{n+1}^* \geq a_n^* \geq |a_n|$ для всіх $n \geq 0$;
б) $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma, F_N)$ для всіх $\sigma < 0$;
в) $x_n^* = \frac{\ln a_{n-1}^* - \ln a_n^*}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \uparrow -0$ при $n \uparrow +\infty$;
г) $a_n^* \exp\{\sigma\lambda_n\} = \mu(\sigma, F)$ для кожного $\sigma \in [x_n^*; x_{n+1}^*]$.

Оскільки $\Delta_n \geq 0$, то $f_q \in H_0(\lambda)$. Крім того, з умови (10) випливає, що

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln|a_n|}{\Delta_n} = +\infty, \tag{12}$$

і тому $\sup\left\{\ln\frac{a_n^*}{\alpha_n} : n \geq 0\right\} \geq \sup\{\ln|a_n| - \Delta_n q : n \geq 0\} = +\infty$, отже, $\nu(\sigma, f_q) \to +\infty (\sigma \to -0)$, де $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n}\} = \mu(\sigma, F)\}$ — центральний індекс ряду Діріхле.

Наступну лему можна встановити так само, як і лему 1 праці [2], тому наводимо її без доведення.

Лема 1. *Для всіх $n \geq 0$ і $k \geq 1$ виконуеться нерівність*

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathrm{e}^{\tau_k(\lambda_n - \lambda_k)} \leq \mathrm{e}^{-q|n-k|}, \tag{13}$$

де $q > 0$, $\tau_k = \tau_k(q) = qx_k + q/(\lambda_k - \lambda_{k-1})$, $x_k = (\Delta_{k-1} - \Delta_k)/(\lambda_k - \lambda_{k-1})$.

Продовжимо доведення теореми 3. Нехай (R_j) — послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(\sigma, f_q)$, яка занумерована так, що $\nu(\sigma, f_q) = j$ для $\sigma \in [R_j, R_{j+1})$ у випадку $R_j < R_{j+1}$. Тоді, якщо $\sigma \in [R_k, R_{k+1})$, то $(a_n^*/\alpha_n)\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n} \leq (a_k^*/\alpha_k)\mathrm{e}^{\sigma\lambda_k}$ $(n \geq 0)$. За лемою 1 звідси випливає, що для $\sigma \in [R_k + \tau_k, R_{k+1} + \tau_k)$

$$\frac{a_n^*\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n}}{a_k^*\mathrm{e}^{\sigma\lambda_k}} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathrm{e}^{\tau_k(\lambda_n - \lambda_k)} \leq \mathrm{e}^{-q|n-k|} \quad (n \geq 0).$$

Отже, $\nu(\sigma,F)=k$, $\mu(\sigma,F)=a_k^*\mathrm{e}^{\sigma\lambda_k}$, а також

$$\big|R_\nu(\sigma+i\tau)\big|=\big|F(\sigma+i\tau)-a_{\nu(\sigma)}\mathrm{e}^{(\sigma+i\tau)\lambda_{\nu(\sigma)}}\big|\le$$

$$\le\sum_{n\ne\nu(\sigma)}\mu(\sigma,F)\mathrm{e}^{-q|n-\nu(\sigma)|}\le 2\frac{\mathrm{e}^{-q}}{1-\mathrm{e}^{-q}}\mu(\sigma,F),$$

для $\sigma\in[R_k+\tau_k,R_{k+1}+\tau_k)$. Остання нерівність завдяки довільності k, виконується для всіх $\sigma\notin E_1(q)=\bigcup_k[R_{k+1}+\tau_k,R_{k+1}+\tau_{k+1})$. Зауважимо, що $\mathrm{meas}(E_1(q)\cap[R_{k+1}+\tau_{k+1},0))\le|\tau_{k+1}|$. Для того, щоб довести, що нульова нижня лінійна лівостороння щільність множини $E_1(q)$ у точці 0 дорівнює нулю, тобто $dE_1(q)\equiv\varliminf\limits_{\sigma\to-0}|\sigma|^{-1}\mathrm{meas}(E_1(q)\cap[\sigma,0))=0$, досить перевірити, що $\varliminf\limits_{k\to+\infty}|\tau_k|/|R_k|=0$. Припустимо, від супротивного, що $|\tau_k|\ge|R_k|b\ \ (k\ge k_0)$, $b>0$, тобто $\tau_k/b\le R_k(k\ge k_0)$.

Нехай тепер $\widetilde{\nu}(\sigma,q)=\max\{n:\ \Delta_nq+\sigma\lambda_n=\alpha_q(\sigma)\}$. Зауважимо, що

$$\alpha_q(\sigma)=\alpha_q(-1)+\int_{-1}^{\sigma}\lambda_{\widetilde{\nu}(t)}dt.$$

Нагадаємо, що $\tau_k=\tau_k(q)=q\tau_k(1)$, тому $\tau_k(q)/b=\tau_k(q/b)$. Оскільки $\tau_k\big(q/b\big)\le R_k$, то звідси при $\sigma\in\big[\tau_{k-1}\big(q/b\big);\tau_k\big(q/b\big)\big]$ одночасно отримуємо $\widetilde{\nu}\big(\sigma,q/b\big)\ge k-1$, $\nu(\sigma,f_q)<k-1$. Тоді при $\sigma\to-0$

$$\ln\mu(\sigma,f_q)=O(1)+\int_{-1}^{\sigma}\lambda_{\nu(t,f_q)}dt\le O(1)+\int_{-1}^{\sigma}\lambda_{\widetilde{\nu}\left(t,q/b\right)}dt=\alpha_{q/b}(\sigma)+O(1).$$

Останнє ж співвідношення суперечить умові (10). Нехай тепер $q_k\to+\infty$, $E_1(q_k)$ — множина з $dE_1(q_k)=0$, яка відповідає $q_k>0$, а для кожного $k\ge1$, $\sigma_k\uparrow0$ — таке, що $\mathrm{meas}\big(E_1(q_k)\cap[\sigma_k,0)\big)\le k^{-2}|\sigma_k|$. Виберемо $E_1=\bigcup_{k=1}^{\infty}\big(E_1(q_k)\cap[\sigma_k,\sigma_{k+1})\big)$. Тоді

$$\mathrm{meas}\big(E_1\cap[\sigma_n,0)\big)\le\sum_{k=n}^{\infty}\mathrm{meas}(E_1\cap[\sigma_k,\sigma_{k+1}))\le$$

$$\le\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}|\sigma_k|\le|\sigma_n|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}=o(|\sigma_n|),$$

тобто $dE_1=0$. Залишилося зауважити, що для всіх $\sigma\in[\sigma_k,\sigma_{k+1})\setminus E_1$ виконується нерівність

$$|R_\nu(\sigma+i\tau)|\le2\mu(\sigma,F)\frac{\mathrm{e}^{-q_k}}{1-\mathrm{e}^{-q_k}},$$

тому при $\sigma \to -0$ ($\sigma \notin E_1$), завдяки тому, що $q_k \to +\infty$, одержуємо $|R_\nu(\sigma+i\tau)| = o(\mu(\sigma,F))$. Теорему 3 доведено.

Із теореми 3, зокрема, випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Якщо послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ задовольняє умову Адамара, тобто $(\exists q>1)(\forall n\in\mathbb{N})[\lambda_{n+1}\ge q\lambda_n]$, і $\overline{\lim\limits_{\sigma\to-0}}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\ln(1/|\sigma|)} = +\infty$, то співвідношення* (1) *з $\omega(x)=x$ та* (9) *виконуються при $\sigma\to-0$ зовні деякої множини $E\in[-1;0)$ нульової нижньої лінійної лівосторонньої щільності в точці $\sigma=0$.*

Справді, нескладно перевірити, що за умови Адамара виконується нерівність $\alpha_q(\sigma)\le B_q\ln(1/|\sigma|)$, $0<B_q<+\infty$ ($\sigma\to-0$), тому досить використати теорему 3.

Наслідок 2. *Якщо послідовність $\lambda=(\lambda_n)$ задовольняє умову Островського, тобто $\lambda_{n+1}/\lambda_n\to+\infty$ $(n\to+\infty)$, і $\overline{\lim\limits_{\sigma\to-0}}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\ln(1/|\sigma|)}>0$, то співвідношення* (1) *з $\omega(x)=x$ та* (9) *виконуються при $\sigma\to-0$ зовні деякої множини $E\in[-1;0)$ нульової нижньої лінійної лівосторонньої щільності в точці $\sigma=0$.*

Справді, з умови Островського випливає, що $\alpha_q(\sigma)=o(\ln(1/|\sigma|))$ $(\sigma\to-0)$, тому застосування теореми 3 дозволяє встановити наслідок 2.

Подібні наслідки можна отримати і з теореми 4. Відзначимо також, що з теорем 3, 4 нескладно отримати також відповідні твердження статті [6]. При цьому додаткові умови на функцію Φ з умов (3) (такі, наприклад, як у твердженні, сформульованому у вступі), крім природної умови $\Phi(t)/t\to+\infty$ $(t\to+\infty)$, будуть відсутні.

Доведення теореми 4 проводиться в цілому подібно до доведення теореми 3, а тому ми його тут не наводимо.

[1] *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

[2] *Луцишин М.Р., Скасків О.Б.* Асимптотичні властивості кратного ряду Діріхле // Матем. студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1994. – Вип. 3. – С. 41–48.

[3] *Скасків О.Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1984. – №11. – С. 22–24.

[4] *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, № 1. – С. 41–47.

[5] *Скасків О.Б.* Про поведінку максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1988. – № 8. – С. 19–21.

[6] *Скаскив О.Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1989. – Т. 53, № 4. – С. 833–850.

[7] *Скаскив О.Б.* О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, № 11. – С. 1532–1541.

[8] *Скаскив О.Б.* О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, № 5. – С. 681–693.

[9] *Скаскив О.Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, № 5. – С. 117–128.

[10] *Скаскив О.Б.* О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66, № 2. – С. 282–292.

[11] *Шеремета М.Н.* Об еквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле // Матем. заметки. – 1987. – Т. 42, № 2. – С. 215–226.

ON THE MAXIMUM MODULUS AND MAXIMAL TERM ABSOLUTE CONVERGENT DIRICHLET SERIES

Tetyana SALO [1], *Oleh SKASKIV* [2]

[1]Lviv Polytechnic National University,
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine
[2]Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

For absolutely convergent in half-plane $\{z : \mathrm{Re} z < 0\}$ Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{z\lambda_n}$ of the minimal growing function Φ is found such that from condition $\overline{\lim\limits_{\sigma\to -0}} \ln \mu(\sigma, F)/\Phi(\sigma) = +\infty$ follows that the relations

$$\sup\{|F(\sigma+it)| : \ t \in \mathbb{R}\} \sim \mu(\sigma, F) \sim \inf\{|F(\sigma+it)| : \ t \in \mathbb{R}\}$$

are holds as $\sigma \to -0$ outside of some set of a zero lower linear density in a point $\sigma = 0$, where $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n} : \ n \geq 0\}$.