МІШАНА ЗАДАЧА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАНЬ БАЛКИ ЗІ ЗБУРЕНИМ ЛІНІЙНИМ ОПЕРАТОРОМ

©2007 р. *Петро ПУКАЧ*

Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С. Бандери, 12, Львів 79013

Редакція отримала статтю 19 вересня 2007 р.

Праця присвячена дослідженню першої мішаної задачі для нелінійного рівняння, що узагальнює рівняння коливань балки, в необмеженій за просторовими змінними області. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Класи існування та єдиності є просторами локально інтегровних функцій.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ

У цій праці досліджено першу мішану задачу для нелінійного рівняння

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\Big(a_{\alpha\beta}(x,t) D^{\alpha} u_t\Big) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^{2}(x,t) \left|u_{tx_ix_j}\right|^{p_2-2} u_{tx_ix_j}\right)_{x_ix_j} - \sum_{i=1}^{n} \left(a_{i}^{1}(x,t) \left|u_{tx_i}\right|^{p_1-2} u_{tx_i}\right)_{x_i} +$$

$$+ d(x,t)u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\left(b_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u\right) +$$

$$+ \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_{\alpha}(x,t) D^{\alpha} u + g(x,u_t) = f(x,t), \tag{1}$$

де $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1{}^{\alpha_1}\ldots \partial x_n{}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $i = 1,\ldots,n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, в необмеженій за просторовими змінними області.

УДК 517.95; MSC 2000: 35G30

Рівняння вигляду (1), яке узагальнює модель коливання балки у середовищі з опором, вивчають у теорії пружності (див. [9] та подану там бібліографію). Розглянуте в [9] рівняння є частинним випадком (1) за умов $n = 1$, $p_2 = 2$, $a_{\alpha\beta} = 0$, $b_{\alpha\beta} = 0$, $0 \le |\alpha| = |\beta| \le 1$, $a_{1,i} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $c_\alpha = 0$, $1 \le |\alpha| \le 2$, $g(x, u_t) = 0$. Різноманітні крайові умови в мішаних задачах для (1) описують певні механічні моделі, що вивчають в теорії пружності. Зокрема, задача динамічного в'язкопружного тертя зі зношуванням вперше була сформульована в праці [11], а в [7] досліджено динамічний контакт між балкою та рухомою поверхнею, термопружний контакт вивчено в [10].

У цій праці досліджено мішану задачу в необмеженій області для рівняння п'ятого порядку (1), деякі коефіцієнти якого можуть степеневим чином зростати при $|x| \to \infty$. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку без обмежень на поведінку при $|x| \to \infty$ розв'язку, правої частини рівняння та початкових даних. При цьому припускаємо, що $1 < p_2 < 2$, $1 < p_1 < 2$.

Зазначимо, що отримані умови коректності розв'язку продовжують та розвивають результати праці [3], в якій розглянуто мішану задачу для рівняння вигляду (1) за умов $p_2 = 2$, $p_1 = 2$, та результати праці [4], в якій аналогічна задача вивчена в припущенні $p_2 = 2$, $1 < p_1 < 2$.

В області $Q_T = \Omega \times (0, T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, розглядаємо для рівняння (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x) \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0, \tag{4}$$

де $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$ — бічна поверхня циліндричної області Q_T, ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Припускаємо, що Ω — необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, причому $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ — область для довільного $R > 1$ з регулярною за Кальдероном [1, с. 45] межею $\partial\Omega^R$. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0, \tau)$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0, \tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t | \, t = \tau\}$ для довільних $\tau \in [0, T]$, $R > 1$, $\partial\Omega^R = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R$, $\Gamma_1^R = \partial\Omega \cap \partial\Omega^R$, $\Gamma_2^R = \partial\Omega^R \backslash \Gamma_1^R$.

Використовуємо надалі такі функціональні простори:

$$H^2_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R)=\left\{u\in H^2(\Omega^R):\, u|_{\Gamma_1^R}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\Gamma_1^R}=0\right\},$$

$$H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})=\left\{u: u\in H^2_{0,\Gamma_1^R}\left(\Omega^R\right)\forall R>1\right\},$$

$$W^{1,p_1}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R)=\left\{u\in W^{1,p_1}(\Omega^R):\, u|_{\Gamma_1^R}=0\right\},$$

$$W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega})=\left\{u: u\in W^{1,p_1}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R)\ \forall R>1\right\},$$

$$W^{2,p_2}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R)=\left\{u\in W^{2,p_2}(\Omega^R):\, u|_{\Gamma_1^R}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\Gamma_1^R}=0\right\},$$

$$W^{2,p_2}_{0,loc}(\overline{\Omega})=\left\{u: u\in W^{2,p_2}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R)\ \forall R>1\right\},$$

$$L^r_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)=\left\{u: u\in L^r(\Omega^R)\forall R>1\right\},\ \ r\in(1,+\infty].$$

Всюди далі $p'=p/(p-1)$, $p_2'=p_2/(p_2-1)$, $p_1'=p_1/(p_1-1)$.

Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) та початкових даних припускаємо виконання таких умов:

(A) $\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T^R}|a_{\alpha\beta}(x,t)|\le a_2^2R^{\omega_2}$ для довільного $R>1$, де $0\le\omega_2<1$, $a_2^2>\ 0$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta\ge a_{0,2}\sum_{|\alpha|=2}|\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел $\xi_\alpha, |\alpha|=2$, та для майже всіх $(x,t)\in Q_T$, де $a_{0,2}$ — додатна стала; функції $a_{\alpha\beta,x_ix_j}(|\alpha|=|\beta|=2; i,j=1,\dots,n)$ належать до $L^\infty\left(Q_T\right)$; $d\in L^\infty\left((0,T)\,;L^\infty_{loc}(\overline{\Omega})\right)$, $d(x,t)\ge d_0$ для майже всіх $(x,t)\in Q_T$, де d_0 — стала; $a_{\alpha\beta}(x,t)=a_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t)\in Q_T$, $|\alpha|=|\beta|=2$.

(A21) $a_2\le a^2_{ij}(x,t)\le a^2R^{\alpha_2}$, $a_1\le a^1_i(x,t)\le a^1R^{\alpha_1}$ для довільних $R>1$, $(x,t)\in Q_T^R$, де $0\le\alpha_s<1$, $a_s>\ 0$, $a^s>\ 0$, $\alpha_s\in[0;\frac{(n+2)p_s-2n}{2p_s})$, $i,j=1,\dots,n$, $s=1,2$; функції $(a^2_{ij})_{x_ix_i}$, $(a^2_{ij})_t$, $(a^1_i)_{x_i}$, $(a^1_i)_t$ належать до простору $L^\infty\big(Q_T\big)$, $i,j=1,\dots,n$.

(B) $\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \operatorname*{esssup}\limits_{x\in\Omega^R}|b_{\alpha\beta}(x)|\le b_2R^{\varkappa_2}$ для довільного $R>1$, де $0\le\varkappa_2<1$, $b_2>\ 0$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\ge b_{0,2}\sum_{|\alpha|=2}|\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $x \in \Omega$, де $b_{0,2}$ — додатна стала; функції $b_{\alpha\beta,x_ix_j}(|\alpha| = |\beta| = 2; i,j = 1,\dots,n)$, $b_{\alpha\beta,x_i}(|\alpha|=|\beta|=1; i = 1,\dots,n)$, b_{00} належать до простору $L^\infty(\Omega)$; $b_{\alpha\beta}(x) = b_{\beta\alpha}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $1 \le |\alpha| = |\beta| \le 2$.

(C) Функції c_α, $c_{\alpha,t}$ належать до $L^\infty(Q_T)$, $1 \le |\alpha| \le 2$.

(G) Функція $g(x,\eta)$ — вимірна за x для всіх η, неперервна за η для майже всіх $x \in \Omega$, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ та для майже всіх $x \in \Omega$: $(g(x,\xi) - g(x,\eta))(\xi - \eta) \ge g_0 |\xi - \eta|^p$, $|g(x,\eta)| \le g_1 |\eta|^{p-1}$, де g_0, g_1 — додатні сталі, $p > 2$; функція g_ξ — неперервна за ξ для майже всіх $x \in \Omega$.

(F) $f \in L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{\Omega}))$.

(U) $u_0 \in H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})$; $u_1 \in H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2p-2}_{loc}(\overline{\Omega})$, $|u_{1,x_ix_i}|^{p_2-2}u_{1,x_ix_ix_ix_i} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $|u_{1,x_ix_i}|^{\frac{p_2-2}{3}}u_{1,x_ix_ix_i} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $|u_{1,x_i}|^{p_1-2}u_{1,x_ix_i} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$.

(P2) $1 < p_2 < 2$, якщо $n = 1,2,3,4$; $\dfrac{2n}{n+4} < p_2 < 2$, якщо $n \ge 5$.

(P1) $1 < p_1 < 2$, якщо $n = 1,2$; $\dfrac{2n}{n+2} < p_1 < 2$, якщо $n \ge 3$.

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі* (1)–(4) *в області* Q_T *називаємо функцію* $u \in C([0,T]; H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ *таку, що*

$$u_t \in C\left([0,T]; L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right) \cap L^2\left((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})\right) \cap L^p\left((0,T); L^p_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right),$$

яка задовольняє умову (2) *та інтегральну тотожність*

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[-u_tv_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t D^\beta v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) |u_{tx_ix_j}|^{p_2-2} \times$$

$$\times u_{tx_ix_j} v_{x_ix_j} \Big] dxdt + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\sum_{i=1}^n a_i^1(x,t) |u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta v - f(x,t)v + \sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t) D^\alpha uv + g(x,t,u_t)v \Big] dxdt +$$

$$+ \int\limits_\Omega u_t(x,\tau)v(x,\tau)dx - \int\limits_\Omega u_1(x)v(x,0)dx = 0 \qquad (5)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ *і для довільної функції* $v \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$.

Основним результатом цієї праці є наступне твердження.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(A)**–**(P1)**. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок* u *задачі* (1)–(4) *в* Q_T.

2. ДОПОМІЖНЕ ТВЕРДЖЕННЯ

Для доведення сформульованої теореми використаємо таке допоміжне твердження.

Лема. *Нехай виконуються умови* **(A)**–**(P1)** *і нехай u та u^0 — узагальнені розв'язки відповідно задачі* (1)–(4) *та задачі* (2)–(4) *для рівняння $\mathcal{A}(u) = f^0$. Тоді для довільних τ, R, R_0 таких, що $\tau \in (0,T]$, $1 < R_0 < R$, правильна оцінка*

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}} \Big[\big|u_t(x,\tau) - u_t^0(x,\tau)\big|^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big|D^\alpha \left(u(x,\tau) - u^0(x,\tau)\right)\big|^2 \Big] dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|=2} \big|D^\alpha \left(u_t - u_t^0\right)\big|^2 + \big|u_t - u_t^0\big|^p \Big] dxdt \le \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma \Big(M_1 R^{n-\beta} +$$

$$+ M_2 R^{n+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}} + M_3 R^{n+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}} + M_4 \int\limits_{Q_\tau^R} \big|f - f^0\big|^{p'} dxdt \Big), \qquad (6)$$

де $\beta = \min\{(1-\omega_2)\frac{4q}{q-2}; (1-\varkappa_2)\frac{4q}{q-2}; \frac{2q}{q-2}\}$, $q \in (2,p]$ — довільне число, $\gamma > \frac{4q}{q-2}$, $M_1, M_2, M_3, M_4 > 0$ — сталі, які не залежать від u, u^0, f, f^0.

Доведення. Нехай $R > 1$, $\tau \in (0,T]$, γ — достатньо велике додатне число, значення якого буде уточнене пізніше. Розглянемо функцію [8]

$$\varphi_R(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{R}, & |x| \le R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Легко перевірити правильність оцінок

$$R - |x| \le \varphi_R(x) \le 2(R - |x|), \left|\left(\varphi_R^\gamma(x)\right)_{x_i}\right| \le 2\gamma\varphi_R^{\gamma-1}(x),$$

$$\left|\left(\varphi_R^\gamma(x)\right)_{x_i x_j}\right| \le 6\gamma^2 \varphi_R^{\gamma-2}(x). \qquad (7)$$

Позначимо $w = u - u^0$ та віднімемо від інтегральної рівності (5) відповідну інтегральну рівність, аналогічну до (5), для u^0, f^0, поклавши $v = w_t\varphi_R^\gamma$. Використовуючи умови леми та результати [5, с. 67–68], [6, с. 52–53], робимо висновок, зокрема, що $w_{tt} \in L^2\left((0,T); L^2\left(\Omega^R\right)\right)$ для довільного $R > 1$. Тому одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[w_{tt} w_t \varphi_R^\gamma + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha w_t D^\beta \left(w_t \varphi_R^\gamma\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le 2} b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha w \times$$

$$\times D^{\beta}\left(w_t\varphi_R^{\gamma}\right)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^{2}(x,t)\left(|u_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u_{tx_ix_j}-|u^0_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_j}\right)\times$$

$$\times\left((u_t-u_t^0)\varphi_R^{\gamma}\right)_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i^1(x,t)\left(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tix_i}-|u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\right)\times$$

$$\times\left((u_t-u_t^0)\varphi_R^{\gamma}\right)_{x_i}+d(x,t)w_t\varphi_R^{\gamma}+\sum_{1\le|\alpha|\le 2}c_\alpha(x,t)D^\alpha w w_t\varphi_R^{\gamma}+$$

$$+\ \left(g(x,u_t)-g(x,u_t^0)\right)\left(u_t-u_t^0\right)\varphi_R^{\gamma}-\left(f-f^0\right)w_t\varphi_R^{\gamma}\Big]dxdt=0. \qquad (8)$$

Оскільки $w_t(x,0)=0$ для майже всіх $x\in\Omega$, то

$$\int\limits_{Q_\tau^R} w_{tt}w_t\varphi_R^{\gamma}dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}|w_t(x,\tau)|^2\varphi_R^{\gamma}dx.$$

Використовуючи формулу Лейбніца для похідної добутку функції багатьох змінних, одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}\,D^\alpha w_t\,D^\beta\left(w_t\varphi_R^{\gamma}\right)\,dxdt=\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}\,D^\alpha w_t\,D^\beta\,w_t\,\varphi_R^{\gamma}\,dxdt\,+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}a_{\alpha\beta}\,D^\alpha w_t\,D^\sigma w_t\,D^{\beta-\sigma}\,\varphi_R^{\gamma}\,dxdt\,+$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}a_{\alpha\beta}\,D^\alpha w_t\,w_t\,D^\beta\varphi_R^{\gamma}\,dxdt=\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3,$$

де $\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}$ — біномні коефіцієнти. Враховуючи умови леми та нерівності (7), інтеграли $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_3$ оцінимо так, як це зроблено в [3]:

$$\mathcal{I}_1\ge a_{0,2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^{\gamma}dxdt;$$

$$|\mathcal{I}_2|\le\left(a_2\delta_1+C_1\delta_2\right)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^{\gamma}dxdt+C_2\delta_3\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^{\gamma}dxdt\,+$$

$$+\,C_2\delta_3\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\,\varphi_R^{\gamma}dxdt+C_2C_3R^{\gamma+n+(\omega_2-1)\frac{4q}{q-2}},$$

де $q \in (2,p]$, $\gamma > \frac{4q}{q-2}$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ — довільні числа, C_1 — додатна стала, яка залежить від γ, δ_1, a_2^2, $C_2 > 0$ — стала, яка залежить від γ, a_2^2, n, δ_1, C_3 — додатна стала, яка залежить від γ, T, n, δ_3;

$$|\mathcal{I}_3| \le \delta_4 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + C_4\delta_4 \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ C_4\delta_4 \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + C_5 R^{\gamma+n+(\omega_2-2)\frac{2q}{q-2}},$$

де $\delta_4 > 0$ — довільна стала, $C_4 > 0$ — стала, яка залежить від γ, δ_4, a_2^2, C_5 — додатна стала, яка залежить від γ, T, n, δ_4, a_2^2.

Перетворимо далі

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x,t)\Big(|u_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u_{tx_ix_j} - |u^0_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_j}\Big)\Big((u_t-u_t^0)\varphi_R^\gamma\Big)_{x_ix_j} dxdt=$$

$$= \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n \Big[a_{ij}^2(x,t)\left(|u_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u_{tx_ix_j} - |u^0_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_j}\right)(u_{tx_ix_j} - u^0_{tx_ix_j})\varphi_R^\gamma +$$

$$+2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x,t)\left(|u_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u_{tx_ix_j} - |u^0_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_j}\right)(u_{tx_i} - u^0_{tx_i})\varphi^\gamma_{R,x_j} +$$

$$+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(x,t)\Big(|u_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u_{tx_ix_j} - |u^0_{tx_ix_j}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_j}\Big)(u_t-u_t^0)\varphi^\gamma_{R,x_ix_j}\Big]dxdt=$$

$$= \mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_5 + \mathcal{I}_6.$$

Враховуючи умови леми, інтеграли $\mathcal{I}_4$, $\mathcal{I}_5$ оцінимо так:

$$\mathcal{I}_4 \ge a_2 \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n \big(|u_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u_{tx_ix_i} - |u^0_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_i}\big)\big(u_{tx_ix_i} - u^0_{tx_ix_i}\big)\varphi_R^\gamma dxdt \ge 0;$$

$$\mathcal{I}_5 \ge -\delta_5 \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n \Big||u_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u_{tx_ix_i} - |u^0_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_i}\Big|^{p_2'} \varphi_R^\gamma dxdt -$$

$$-\delta_5 \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n \Big|u_{tx_i} - u^0_{tx_i}\Big|^2 \varphi_R^\gamma dxdt - C_6(\delta_5,n,\gamma)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n \Big|a_{2,i}\varphi_R^{\gamma-1-\frac{\gamma}{p_2'}-\frac{\gamma}{2}}\Big|^{\frac{2p_2}{2-p_2}} \times$$

$$\times dxdt \ \geq -2^{2-p_2}\delta_5 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \Big(|u_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u_{tx_ix_i} - |u^0_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_i}\Big)\times$$

$$\times\Big(u_{tx_ix_i} - u^0_{tx_ix_i}\Big)\varphi_R^\gamma dxdt - \delta_5 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \Big|u_{tx_i} - u^0_{tx_i}\Big|^2 \varphi_R^\gamma dxdt -$$

$$- C_7(\delta_5, n, \gamma, a_2, T) R^{\gamma+n+\frac{2p_2(\alpha_2-1)}{2-p_2}},$$

$\delta_5 > 0$ — довільна стала, $C_6 > 0$, $C_7 > 0$. Аналогічно оцінимо

$$\mathcal{I}_6 \geq -2^{2-p_2}\delta_6 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \Big(|u_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u_{tx_ix_i} - |u^0_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u^0_{tx_ix_i}\Big)\Big(u_{tx_ix_i} - u^0_{tx_ix_i}\Big)\varphi_R^\gamma \times$$

$$\times dxdt - \delta_6 T \int\limits_{\Omega^R} \sum_{i=1}^{n} \Big|u_t(x,\tau) - u^0_t(x,\tau)\Big|^2 \varphi_R^\gamma dx - C_8(\delta_6, n, \gamma, a_2, T) R^{\gamma+n+\frac{2p_2(\alpha_2-2)}{2-p_2}},$$

$\delta_6 > 0$ — довільна стала, $C_8 > 0$. Продовжимо перетворення та оцінювання інтегралів рівності (8). Зокрема, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(x,t) \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\right) \left((u_t - u^0_t)\varphi_R^\gamma\right)_{x_i} dxdt \ =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(x,t) \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\right) (u_{tx_i} - u^0_{tx_i})\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(x,t) \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\right) (u_t - u^0_t)\varphi^\gamma_{R,x_i} dxdt = \mathcal{I}_7 + \mathcal{I}_8.$$

Інтеграли $\mathcal{I}_7$, $\mathcal{I}_8$ оцінимо наступним чином:

$$\mathcal{I}_7 \geq a_1 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\right) \left(u_{tx_i} - u^0_{tx_i}\right) \varphi_R^\gamma dxdt \geq 0;$$

$$\mathcal{I}_8 \geq -2^{2-p_2}\delta_7 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \Big(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\Big)\Big(u_{tx_i} - u^0_{tx_i}\Big)\varphi_R^\gamma dxdt -$$

$$- \ \delta_7 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \Big|u_{tx_i} - u^0_{tx_i}\Big|^2 \varphi_R^\gamma dxdt \ - C_9(\delta_7, n, \gamma, a_1, T) R^{\gamma+n+\frac{2p_1(\alpha_1-1)}{2-p_1}},$$

$\delta_7 > 0$ — довільна стала, $C_9 > 0$. Застосовуючи далі лему Берніса [8], оцінимо

$$(\delta_5+\delta_7)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\Big|u_{tx_i}-u^0_{tx_i}\Big|^2\varphi_R^\gamma dxdt \le (\delta_5+\delta_7)\delta_8\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}\Big|D^\alpha w_t\Big|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+\frac{\delta_5+\delta_7}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+C_{10}(\delta_5,\delta_7)\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^{\gamma-2}dxdt \le (\delta_5+\delta_7)\delta_8\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}\Big|D^\alpha w_t\Big|^2\varphi_R^\gamma dxdt+\frac{\delta_5+\delta_7}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+C_{10}(\delta_5,\delta_7)\times$$

$$\times\Big[\delta_9\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt+\delta_9\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+C_{11}(\delta_9)R^{\gamma+n+\frac{2q}{q-2}}\Big]=$$

$$=(\delta_5+\delta_7)\delta_8\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}\Big|D^\alpha w_t\Big|^2\varphi_R^\gamma dxdt+\Big(\frac{\delta_5+\delta_7}{\delta_8}+C_{10}\delta_9\Big)\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+C_{10}\delta_9\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt+C_{12}(\gamma,T,n,\delta_5,\delta_7,\delta_9)R^{\gamma+n+\frac{2q}{q-2}},$$

де $\delta_8 > 0$, $\delta_9 > 0$ — довільні сталі, $C_{10} > 0$, $C_{11} > 0$, $C_{12} > 0$.

Крім того, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R}d(x,t)\,|w_t|^2\,\varphi_R^\gamma dxdt \ge -|d_0|\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\,\varphi_R^\gamma dxdt.$$

Можна також одержати

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha w\,D^\beta\left(w_t\varphi_R^\gamma\right)\,dxdt=\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha w\,D^\beta w_t\,\varphi_R^\gamma\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\ \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha w\,D^\sigma w_t\,D^{\beta-\sigma}\,\varphi_R^\gamma\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha w\,w_t\,D^\beta\varphi_R^\gamma\,dxdt=\mathcal{I}_9+\mathcal{I}_{10}+\mathcal{I}_{11}.$$

Оцінимо інтеграли $\mathcal{I}_9$ – $\mathcal{I}_{11}$ аналогічно до того, як це зроблено в [3]:

$$\mathcal{I}_9 \geq \frac{b_{0,2}}{2}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\,\varphi_R^\gamma dx;$$

$$|\mathcal{I}_{10}| \leq b_2\delta_{10}T\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dxdt + C_{13}(\gamma,b_2,\delta_{10})\delta_{11}\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + C_{14}(\gamma,b_2,n,\delta_{10},\delta_{11})\delta_{12}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+C_{14}(\gamma,b_2,n,\delta_{10},\delta_{11})\delta_{12}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+C_{15}(\gamma,n,T,b_2,\delta_{10},\delta_{11},\delta_{12})R^{\gamma+n+\frac{4(\varkappa_2-1)q}{q-2}},$$

$\delta_{10}>0$, $\delta_{11}>0$, $\delta_{12}>0$ — довільні числа, $C_{13}>0$, $C_{14}>0$, $C_{15}>0$;

$$|\mathcal{I}_{11}| \leq b_2\delta_{13}T\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx + C_{16}(\gamma,b_2,n,\delta_{13})\delta_{14}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma\times$$

$$\times dxdt + C_{16}(\gamma,b_2,n,\delta_{13})\delta_{14}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt + C_{17}R^{\gamma+n+\frac{2(\varkappa_2-2)q}{q-2}},$$

$\delta_{13}>0$, $\delta_{14}>0$ — довільні числа, $C_{16}>0$, $C_{17}>0$.

Крім того, можна отримати подібно до того, як це зроблено в [3], що

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha w\,D^\beta\left(w_t\varphi_R^\gamma\right)\,dxdt = \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha w\,D^\beta w_t\,\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}\,D^\alpha w\,w_t\,D^\beta\varphi_R^\gamma\,dxdt = \mathcal{I}_{12}+\mathcal{I}_{13};$$

$$|\mathcal{I}_{12}| = \int\limits_{Q_T^R}\sum_{|\alpha|=1}b_{\alpha\beta}D^\beta w_t\,D^\alpha\left[\int\limits_0^t w_\tau(x,\tau)d\tau\right]\varphi_R^\gamma\,dxdt \leq C_{18}(b_1,T)\delta_{15}\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\,\varphi_R^\gamma dxdt + C_{19}(b_1,T,\delta_{15},\delta_{16})\times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + C_{20}(b_1, T, \gamma)\delta_{16} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^\gamma dxdt + C_{21} R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}},$$

$\delta_{15} > 0$, $\delta_{16} > 0$ — довільні числа, $C_{18} > 0$, $C_{19} > 0$, $C_{20} > 0$, $C_{21} > 0$;

$$|\mathcal{I}_{13}| \leq b_1 T \delta_{17} \delta_{18} \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + \delta_{17}\delta_{19} C_{22} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ C_{23}(b_1, T, \gamma, \delta_{17}, \delta_{19}) \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + C_{24}(b_1, T, n, \gamma, \delta_{17}, \delta_{19}) R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}},$$

$\delta_{17} > 0$, $\delta_{18} > 0$, $\delta_{19} > 0$ — довільні сталі, C_{22} – C_{24} — додатні сталі.

Завершимо оцінювання інтегралів рівності (8):

$$\int\limits_{Q_\tau^R} b_{00}(x) w w_t \varphi_R^\gamma dxdt \leq b_0 T \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt, \quad b_0 = \operatorname*{esssup}_{x\in\Omega} |b_{00}(x)|;$$

$$\Big| \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} c_\alpha D^\alpha w \, w_t \, \varphi_R^\gamma \, dxdt \Big| \leq \frac{c_2 n}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w|^2 \varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ \frac{c_2}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt, \quad c_2 = \max_{|\alpha|=2} \operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T} |c_\alpha(x,t)|;$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha D^\alpha w \, w_t \, \varphi_R^\gamma dxdt \leq c_1 T \delta_{20} \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ C_{25}(c_1, T, \delta_{20}) \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt \leq c_1 T \delta_{20} \delta_{21} \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+ C_{26} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^\gamma dxdt + C_{27}\delta_{21} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^\gamma dxdt + C_{28} R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}},$$

$c_1 = \max\limits_{|\alpha|=1} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T} |c_\alpha(x,t)|$, $\delta_{20} > 0$, $\delta_{21} > 0$ — довільні числа, $C_{26} > 0$ — стала, яка залежить від c_1, T, δ_{20}, δ_{21}, γ, $C_{27} > 0$ — стала, яка залежить від c_1, T, δ_{20}, δ_{21}, γ, $C_{28}>0$ — стала, яка залежить від c_1, T, δ_{20}, δ_{21}, γ, n;

$$\int\limits_{Q_\tau^R} (g(x,u_t) - g(x,u_t^0))(u_t - u_t^0) \varphi_R^\gamma dxdt \geq g_0 \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^\gamma dxdt;$$

$$\int\limits_{Q_\tau^R} (f-f^0)w_t\varphi_R^\gamma dxdt \le \delta_{22}\int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p\,\varphi_R^\gamma dxdt + C_{29}\int\limits_{Q_\tau^R} \left|f-f^0\right|^{p'}\varphi_R^\gamma dxdt,$$

$\delta_{22}>0$ — довільна стала, $C_{29}>0$ — деяка стала, яка залежить від p, δ_{22}. Враховуючи наведені вище оцінки інтегралів, рівності (8) та послідовно вибираючи належним чином достатньо малі додатні сталі $\delta_1,\dots,\delta_{22}$, можна отримати після відповідних перепозначень, що

$$\int\limits_{\Omega^R} |w_t(x,\tau)|^2\,\varphi_R^\gamma dx + \int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx + \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\,\varphi_R^\gamma dxdt \le C_{30}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\,\varphi_R^\gamma dxdt + C_{31}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w|^2\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+C_{32}R^{\gamma+n-\beta} + C_{33}R^{\gamma+n+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}} + C_{34}R^{\gamma+n+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}} +$$

$+C_{35}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|f-f^0\right|^{p'}dxdt$, причому додатні сталі C_{30} – C_{35} не залежать від R. Якщо використаємо лему Гронуола та врахуємо (7), то одержимо

$$\Big(R-R_0\Big)^\gamma\Big[\int\limits_{\Omega^{R_0}}\Big(|w_t(x,\tau)|^2 + \sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\Big)dx +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\left(\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2 + |w_t|^p\right)dxdt\Big] \le C_{36}R^{\gamma+n-\beta} + C_{37}R^{\gamma+n+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}} +$$

$$+C_{38}R^{\gamma+n+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}} + C_{39}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|f-f^0\right|^{p'}dxdt, \tag{9}$$

для довільних τ, R, R_0 таких, що $1<R_0<R$, $\tau\in(0,T]$, де C_{36} – C_{39} — деякі додатні сталі, які не залежать від u, u^0, f, f^0. З нерівності (9) легко одержати (6). Лему доведено.

3. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ

Доведення теореми. *Існування.* Нехай $\{\Omega^k\}$, $k=2,3,\dots,$ — послідовність областей. Позначимо $S_T^k=\partial\Omega^k\times(0,T)$. Розглянемо в обмеженій області Q_T^k допоміжну задачу:

$$\mathcal{A}(u) = f^{k,k}(x,t), \tag{10}$$

$$u(x,0)=u_0^{k,k}(x), \tag{11}$$

$$u_t(x,0)=u_1^{k,k}(x),\ x\in\Omega^k, \tag{12}$$

$$u|_{S_T^k}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{S_T^k}=0, \tag{13}$$

де $f^{k,k}(x,t)=\begin{cases} f^k(x,t), |x|\le k,\\ 0, |x|>k,\end{cases}$, початкові умови мають такий вигляд: $u_0^{k,k}(x)=u_0^k(x)\chi^k(x),\ u_1^{k,k}(x)=u_1^k(x)\chi^k(x)$, причому $\chi^k\in C^4(\mathbb{R}^n)$, $\chi^k(x)=\begin{cases} 1,\ |x|\le k-1,\\ 0,\ |x|>k,\end{cases}$, $0\le\chi^k(x)\le 1$. Послідовності $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$ такі, що $f^k\in C^1([0,T];C_0^1(\Omega))$, $u_0^k\in C_0^4(\Omega)$, $u_1^k\in C_0^2(\Omega)$ і $f^k\to f$ в $L^2((0,T);L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u_0^k\to u_0$ в $H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}), u_1^k\to u_1$ в $H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})\cap L^{2p-2}_{loc}(\overline{\Omega})$ при $k\to\infty$.

На підставі [5, 6] можна стверджувати: існує єдиний узагальнений розв'язок $u^k\in C([0,T];H_0^2(\Omega^k))$ задачі (10)–(13) в області Q_T^k такий, що

$$u_t^k\in C([0,T];L^2(\Omega^k))\cap L^\infty((0,T);H_0^2(\Omega^k))\cap L^p(Q_T^k),$$

$$u_{tt}^k\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega^k))\cap L^2((0,T);H_0^2(\Omega^k)).$$

Розглянемо послідовність задач вигляду (10)–(13) для $k=2,3,\ldots,$ доозначивши u^k нулем на $Q_T\backslash Q_T^k$. Покажемо, що послідовність $\{u^k\}$ — фундаментальна у просторі $C([0,T];H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, а послідовність $\{u_t^k\}$ — фундаментальна у просторі

$$C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))\cap L^p((0,T);L^p_{loc}(\overline{\Omega})).$$

В області Q_τ^R, де $R>R_0$, розглянемо різницю u^l-u^m, $l,m\in\mathbb{N}$, та використаємо лему. Аналогічно до (6) можна отримати

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}}\left[|u_t^l(x,\tau)-u_t^m(x,\tau)|^2+\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha\left(u^l(x,\tau)-u^m(x,\tau)\right)\right|^2\right]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\left[\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha\left(u_t^l-u_t^m\right)\right|^2+\left|u_t^l-u_t^m\right|^p\right]dxdt\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma C_{40}R^{n-\beta}+$$

$$+\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma\left(C_{41}R^{n+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}}+C_{42}R^{n+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}}\right)+$$

$$+C_{43}(R)\left\|u_0^{l,l}-u_0^{m,m}\right\|^2_{H_0^2(\overline{\Omega})}+\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma\times$$

$$\times\left(C_{44}\left\|u_1^{l,l}-u_1^{m,m}\right\|^2_{L^2(\overline{\Omega})}+C_{45}\left\|f^{l,l}-f^{m,m}\right\|^{p'}_{L^{p'}\left((0,T);L^{p'}(\overline{\Omega})\right)}\right),\qquad(14)$$

де C_{40} – C_{45} — деякі додатні сталі, що залежать від n, p, γ, q та коефіцієнтів (10). Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне як завгодно мале число. Оскільки $\lim\limits_{q\to 2+0}\dfrac{q}{q-2} = +\infty$, то існує таке $\beta_0 \le \beta$, що $n < \beta_0$. Оскільки $\lim\limits_{R\to+\infty}\left(\dfrac{R}{R-R_0}\right)^{\gamma}=1$, то існує таке $R_1 > R_0$, що $C_{40}\left(\dfrac{R_1}{R_1-R_0}\right)^{\gamma}R_1^{n-\beta_0}<\dfrac{\varepsilon}{4}$. Зазначимо, що з умови **(A21)** випливає існування такого достатньо великого додатного числа (без обмеження загальності знову позначимо його R_1), що $\left(\dfrac{R_1}{R_1-R_0}\right)^{\gamma}\left(C_{41}R^{n+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}}+C_{42}R^{n+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}}\right)<\dfrac{\varepsilon}{4}$. Враховуючи збіжності послідовностей $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$ і $\{u_1^k\}$ у відповідних функціональних просторах, можемо вибрати таке $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > [R_1]+1$, що для всіх $l, m > k_0$ правильна оцінка

$$C_{43}(R_1)\left\|u_0^{l,l}-u_0^{m,m}\right\|^2_{H_0^2\left(\Omega^{R_1}\right)}+\left(\frac{R_1}{R_1-R_0}\right)^{\gamma}\times$$

$$\times\left(C_{44}\left\|u_1^{l,l}-u_1^{m,m}\right\|^2_{L^2\left(\Omega^{R_1}\right)}+C_{45}\left\|f^{l,l}-f^{m,m}\right\|^{p'}_{L^{p'}\left((0,T);L^{p'}(\Omega^{R_1})\right)}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином, з (14) випливає: для довільного фіксованого $R_0 > 1$ та довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, що

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}}\left[|u_t^l(x,\tau)-u_t^m(x,\tau)|^2+\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}\left(u^l(x,\tau)-u^m(x,\tau)\right)\right|^2\right]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}\left(u_t^l-u_t^m\right)\right|^2dxdt+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\left|u_t^l-u_t^m\right|^p dxdt<\varepsilon$$

для довільних $l, m > k_0$, $\tau \in [0,T]$. Отже, послідовність $\{u^k\}$ — фундаментальна в $C([0,T];H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, а $\{u_t^k\}$ — фундаментальна в

$$C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega}))\cap L^2((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))\cap L^p((0,T);L^p_{loc}(\overline{\Omega})).$$

Враховуючи довільність R_0, отримаємо, що $\{u^k\}$ збігається до u в просторі $C([0,T];H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, а $\{u_t^k\}$ збігається до u_t в $C\left([0,T];L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)\cap$

$L^2((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))\cap L^p((0,T);L^p_{loc}(\overline{\Omega}))$. При цьому для функції u виконуються умови (2)–(4). Крім того, зі сильної збіжності $\{u_t^k\}$ до u_t легко отримати, що $g(x,u_t^k)\to g(x,u_t)$ слабко в $L^{p'}((0,T);L^{p'}_{loc}(\overline{\Omega}))$ [2, с. 25, лема 1.3]. Зауважимо також, що аналогічно до нерівності (6) можна одержати оцінки

$$\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\sum_{i=1}^n\left|u^k_{tx_ix_i}\right|^{p_2}dxdt\le C_{46},C_{46}>0,\qquad \int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\sum_{i=1}^n\left|u^k_{tx_i}\right|^{p_1}dxdt\le C_{47},C_{47}>0,$$

з яких на підставі сильних збіжностей маємо

$$\left(\left|u^k_{tx_ix_i}\right|^{p_2-2}u^k_{tx_ix_i}\right)_{x_ix_i}\to\left(|u_{tx_ix_i}|^{p_2-2}u_{tx_i}\right)_{x_ix_i}\text{слабко в } L^{p_2'}\left((0,T);W^{-2,p_2'}_{loc}(\overline{\Omega})\right),$$

$$\left(\left|u^k_{tx_i}\right|^{p_1-2}u^k_{tx_i}\right)_{x_i}\to\left(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i}\right)_{x_i}\text{ слабко в } L^{p_1'}\left((0,T);W^{-1,p_1'}_{loc}(\overline{\Omega})\right).$$

Таким чином, u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Єдиність. Розглянемо два довільні розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)–(4). Подібно до (6) можна отримати оцінку

$$\mathcal{I}\equiv\int\limits_{\Omega^{R_0}}\left[\left|u_t^1(x,\tau)-u_t^2(x,\tau)\right|^2+\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha\left(u^1(x,\tau)-u^2(x,\tau)\right)\right|^2\right]dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\Big[\sum_{|\alpha|=2}\left|D^\alpha\left(u_t^1-u_t^2\right)\right|^2+\left|u_t^1-u_t^2\right|^p\Big]dxdt\le\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma\Big(M_1R^{n-\beta}+$$

$$+M_2R^{n+(\alpha_2-1)\frac{2p_2}{2-p_2}}+M_3R^{n+(\alpha_1-1)\frac{2p_1}{2-p_1}}\Big)$$

для довільних τ, R, R_0 таких, що $1<R_0<R$, $\tau\in[0,T]$. Аналогічно, як при доведенні фундаментальності, одержуємо, спрямувавши $R\to+\infty$, що $\mathcal{I}\le 0$ для довільного фіксованого $R_0>1$. Отже, $u^1=u^2$ майже скрізь в $Q_T^{R_0}$. Довільність R_0 завершує доведення єдиності. Теорему доведено.

[1] *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978.

[2] *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– М.: Эдиториал УРСС, 2002.

[3] *Пукач П.Я.* Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області // Математичні студії. – 2007. – **50**, № 2. – С. 126–136.

[4] *Пукач П.Я.* Мішана задача для одного нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 159–170.

[5] *Пукач П.Я.* Змішана задача для одного сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області // Прикладні проблеми мех. та матем. – 2006. – Вип. 4. – С. 59–69.

[6] *Пукач П.Я.* Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки п'ятого порядку в обмеженій області // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – № 566. – 2006. – С. 52–58.

[7] *Andrews K.T., Shillor M., Wright S.* On the dynamic vibrations of an elastic beam in frictional contact with a rigid obstacle // J. Elasticity. – **42**. – 1996. – P. 1–30.

[8] *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. Anal. – **106**. – 1989, № 3. – P. 217–241.

[9] *Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M.* Frictional wear of a thermoelastic beam // J. Math. Anal. And Appl. – **242**. – 2000. – P. 212–236.

[10] *Martins J.A.C., Oden J.T.* Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with normal and friction interface laws // Nonlin. Anal. – **11**. – 1987. – P. 407–428.

[11] *Strömberg N., Johansson L., Klarbring A.* Derivation and analysis of a generalized standard model for a contact friction and wear // Intern. J. Solids Structures. – **13**. – 1996. – P. 1817–1836.

THE MIXED PROBLEM FOR THE EQUATION OF BEAM VIBRATIONS TYPE WITH PERTURBED LINEAR OPERATOR IN UNBOUNDED DOMAIN

Petro PUKACH

Lviv Polytechnic National University,
12 S.Bandera Str., Lviv 79013, Ukraine

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for some nonlinear equation in domain unbounded with respect to space variables. Described equation generalizes the equation of beam vibrations. The conditions of the existence and uniqueness of generalized solution have been obtained. The classes of the existence and uniqueness are the spaces of local integrable functions.