ПРО ЩІЛЬНІСТЬ МНОЖИНИ НЕІНТЕГРОВНИХ ГАМІЛЬТОНІАНІВ У РЕДУКОВАНІЙ ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТОЧОК НА ПРЯМІЙ З ПОТЕНЦІАЛОМ ПОПАРНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

© *2007 р. Сергій ПІДКУЙКО*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 3 вересня 2007 р.

У роботі отримано аналог відомого результату Зігеля (та його узагальнення, доведеного автором) про щільність у класі гамільтонових систем, аналітичних в околі точки рівноваги, множини неінтегровних гамільтоніанів (з цього ж класу).

Показано, що неінтегровні гамільтонові системи редукованої задачі трьох точок на прямій з потенціалом попарної взаємодії утворюють всюди щільну систему у множині всіх гамільтонових систем цього класу.

Розглядаємо клас гамільтонових систем задачі трьох точок на прямій з потенціалом попарної взаємодії, який визначається гамільтоніаном вигляду

$$H = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U(x_1 - x_2) + V(x_2 - x_3) + W(x_1 - x_3)\,, \qquad (1)$$

де x_j, p_j позначають, відповідно, координату та імпульс j-ої точки, а функції U, V, W — потенціали взаємодії між відповідними парами точок системи. Позначимо через $\mathcal{A}(c)$ множину функцій f, визначених в деякому околі точки $c \in \mathbf{R}$, які є аналітичними в цій точці і мають такі властивості: $f'(c) = 0$, $f''(c) > 0$. На функції U, V, W накладемо такі умови:

$$U \in \mathcal{A}(a), \quad V \in \mathcal{A}(b), \quad W \in \mathcal{A}(a+b). \qquad (2)$$

УДК 517.913; MSC 2000: 37K10

Нехай $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ — точка фазового простору гамільтонової системи (1), де $a_1 - a_2 = a$, $a_2 - a_3 = b$. Тоді гамільтоніан H буде аналітичним в деякому околі цієї точки, і матиме в цій точці локальний мінімум.

Оскільки гамільтонова система (1) має два функціонально незалежних перших інтеграли — сам гамільтоніан (1) і повний імпульс системи

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \,, \tag{3}$$

то для повної інтегровності за Ліувілем системи (1) досить, щоб ця гамільтонова система мала ще один додатковий перший інтеграл, функціонально незалежний з H і P, і який перебуває з P в інволюції. Слід зазначити, що до повного інволютивного набору перших інтегралів функцію P включати, взагалі кажучи, не обов'язково, але тоді для повної інтегровності системи (1) потрібно мати два додаткових перших інтеграли, що перебувають в інволюції і разом з гамільтоніаном H утворюють функціонально незалежну трійку функцій.

Природньо шукати перші інтеграли системи з того ж класу, до якого належить сам гамільтоніан H, тобто які задовольняють умову аналітичності в околі точки $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ фазового простору.

Визначимо редуковану відносно повного моменту (3) гамільтонову систему (1). Канонічним перетворенням

$$\begin{gathered} y_1 = x_1 - x_2 \,, \quad y_2 = x_2 - x_3 \,, \quad y = x_1 + x_2 + x_3 \\ q_1 = (2p_1 - p_2 - p_3)/3 \,, \;\; q_2 = (p_1 + p_2 - 2p_3)/3 \,, \;\; q = (p_1 + p_2 + p_3)/3 \,, \end{gathered}$$

гамільтонова система (1) зводиться до вигляду

$$J = \frac{3}{2}\, q^2 + (q_1^2 + q_2^2 - q_1\, q_2) + U(y_1) + V(y_2) + W(y_1 + y_2). \tag{4}$$

Означення 1. *Гамільтонову систему з гамільтоніаном*

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1\, p_2 + U(a + x_1) + V(b + x_2) + W(a + b + x_1 + x_2) \tag{5}$$

будемо називати ***редукованою відносно повного моменту*** (3) *гамільтоновою системою задачі трьох точок на прямій з потенціалом попарної взаємодії.*

У цій роботі отримано аналог результату Зігеля [3] (і його узагальнення, доведеного автором [1, 2]) про щільність в класі гамільтонових систем (5) множини неінтегровних гамільтоніанів (з цього ж класу).

Лема 1. *Гамільтонова система* (1) *допускає аналітичний в точці* $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл, який перебуває в інволюції з* P, *і який* *є функціонально незалежним з H і P, тоді й лише тоді, коли гамільтонова система* (5) *допускає аналітичний в точці* $(0,0,0,0)$ *перший інтеграл, функціонально незалежний з K.*

Основний результат роботи сформульовано в теоремах, твердження яких, згідно з лемою 1, є еквівалентними.

Теорема 1. *Нехай $\{\varepsilon_k\}$ — довільна додатня послідовність, і нехай потенціали U, V, W гамільтонової системи* (1) *задовольняють умови* (2)*. Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{V} \in \mathcal{A}(b)$, для якого:*

1)

$$|V^{(k)}(b) - \widetilde{V}^{(k)}(b)| < \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

2) будь-який аналітичний в точці $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0)$ *перший інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном*

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U(x_1 - x_2) + \widetilde{V}(x_2 - x_3) + W(x_1 - x_3), \tag{7}$$

який перебуває в інволюції з P, є функцією від $\widetilde{H}$ і P.

Теорема 2. *Нехай $\{\varepsilon_k\}$ — довільна додатня послідовність, і нехай потенціали U, V, W гамільтонової системи* (5) *задовольняють умови* (2)*. Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{V} \in \mathcal{A}(b)$, для якого*

1)

$$|V^{(k)}(b) - \widetilde{V}^{(k)}(b)| < \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

2) будь-який аналітичний в точці $(0,0,0,0)$ *перший інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном*

$$\widetilde{K} = p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2 + U(a + x_1) + \widetilde{V}(b + x_2) + W(a + b + x_1 + x_2)\,, \tag{9}$$

є функцією від $\widetilde{K}$.

Доведення теореми 2 спирається на кілька лем.

Лема 2. *Існує такий потенціал $V_1 \in \mathcal{A}(b)$, для якого:*

1)

$$|V_1''(b) - V''(b)| < \frac{1}{2}\,\varepsilon_2, \quad V_1^{(k)}(b) = V^{(k)}(b), \quad k = 3, 4, \ldots, \tag{10}$$

2) існує таке лінійне канонічне перетворення змінних (x_1, x_2, p_1, p_2) *у змінні* (u_1, u_2, v_1, v_2)*, яке квадратичну частину K_2 гамільтонової системи з гамільтоніаном*

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1\,p_2 + U(a + x_1) + V_1(b + x_2) + W(a + b + x_1 + x_2) \tag{11}$$

зводить до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{11}\, u_1\, v_1 + \lambda_{12}\, u_2\, v_2\,, \tag{12}$$

де коефіцієнти λ_{11}, λ_{12} *— суто уявні і раціонально незалежні.*

Згідно з [3] виберемо два цілі числа q, r, що задовольняють нерівності

$$q > 1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + 2\,|\lambda_{12}|\,{\varepsilon_2}^{-1}\,, \qquad \left|q\,\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + r\right| < 1\,,$$

і визначимо три послідовності $\{q_m\}, \{r_m\}, \{l_m\}\,(m = 1,\,2,\ldots)$:

$$l_m = q_m + |r_m|, \quad r_m = q_m\left(\frac{r}{q} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{q_k}\right)\,, \quad q_1 = q^2,$$

q_{m+1} є найменший цілий степінь q, що задовільняє нерівність

$$q_{m+1} > q_m^2 + 4\,|\lambda_{12}|\,{\varepsilon_{l_m}}^{-1}\,{l_m}^{ml_m}\,. \tag{13}$$

Нехай

$$\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_{12}\,, \qquad \widetilde{\lambda}_1 = \lambda_{12}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_m} - \frac{r}{q}\right)\,. \tag{14}$$

Тоді: 1) послідовність $\{l_m\}$ строго зростає, $l_1 \geq 4$; 2) числа $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2$ є суто уявними і раціонально незалежними, до того ж $|\widetilde{\lambda}_1 - \lambda_{11}| < \varepsilon_2$; 3) виконується оцінка

$$q_m\,|\widetilde{\lambda}_1\,q_m + \widetilde{\lambda}_2\,r_m|^{-1}\,\varepsilon_{l_m} > 2\,{l_m}^{ml_m}, \quad m = 1,\,2,\ldots\,. \tag{15}$$

Лема 3. *Існує такий потенціал* $V_2 \in \mathcal{A}(b)$, *для якого*
1)

$$|V_2''(b) - V''(b)| < \varepsilon_2, \quad V_2^{(k)}(b) = V^{(k)}(b), \quad k = 3,\,4,\ldots, \tag{16}$$

2) існує таке лінійне канонічне перетворення змінних (x_1, x_2, p_1, p_2) *у змінні* (u_1, u_2, v_1, v_2), *яке квадратичну частину* K_2 *гамільтонової системи з гамільтоніаном*

$$K = p_1^2 + p_2^2 - p_1\,p_2 + U(a + x_1) + V_2(b + x_2) + W(a + b + x_1 + x_2) \tag{17}$$

зводить до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{21}\, u_1\, v_1 + \lambda_{22}\, u_2\, v_2\,, \tag{18}$$

де коефіцієнти $\lambda_{21}, \lambda_{22}$ — суто уявні і раціонально незалежні, і задовольняють такі умови:

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_2}, \qquad \left|\frac{\lambda_{22}}{\widetilde{\lambda}_2}\right| < 2. \tag{19}$$

Гамільтоніан K, записаний в нових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2), позначимо через E. Гамільтоніан E задовольняє систему канонічних рівнянь Гамільтона

$$\dot{u}_k = E_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -E_{u_k}, \qquad k = 1,\, 2. \tag{20}$$

В околі точки $(0,0,0,0)$ його можна подати у вигляді суми ряду Тейлора

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} E_n\,, \tag{21}$$

де E_n позначає однорідну степеня n компоненту степеневого ряду E. Гамільтоніан $\widetilde{K}$, записаний в нових змінних, позначимо через $\widetilde{E}$. Тоді

$$\widetilde{E} = \sum_{n=2}^{\infty} \widetilde{E}_n\,.$$

Крім того, введемо таке позначення: для однорідного многочлена G від кількох змінних через $\overline{|G|}$ будемо позначати абсолютну величину максимального за модулем коефіцієнта многочлена G. Тобто, якщо

$$G = \sum_{i_1+\ldots+j_n=l} a_{i_1\ldots j_n} u_1^{i_1}\ldots u_n^{i_n} v_1^{j_1}\ldots v_n^{j_n}\,,$$

то $\overline{|G|} = \{|a_{i_1\ldots j_n}|\,/i_1+\ldots+j_n = l\}$. Відомо [3], що існує такий (*біркгофівський*) перший інтеграл s гамільтонової системи (20)

$$s = u_1\,v_1 + \sum_{n=3}^{\infty} s_n \tag{22}$$

без членів вигляду

$$c\prod_{k=1}^{n}(u_k\,v_k)^{\alpha_k}\,, \qquad \alpha_1+\ldots+\alpha_n > 1\,, \tag{23}$$

що кожен перший інтеграл системи (20) є рядом за степенями E, s. Потрібно зазначити, що степеневий ряд s, взагалі кажучи, розбіжний.

Позначимо через $\widetilde{s}$ відповідний (*біркгофівський*) інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном $\widetilde{E}$.

Лема 4. *Існує такий потенціал* $\widetilde{V} \in \mathcal{A}(b)$, *для якого*

$$\begin{aligned} \widetilde{V}''(b) &= V_2''(b), && (24)\\ \widetilde{V}^{(n)}(b) &= V^{(n)}(b), \qquad n \notin \{l_m \,/\, m = 1, 2, \ldots\}, && (25)\\ \widetilde{V}^{(l_m)}(b) &= V^{(l_m)}(b) \pm \frac{1}{2}\,\varepsilon_{l_m}, \quad m = 1, 2, \ldots. && (26) \end{aligned}$$

До того ж, у формулі (26) *знаки* (+) *або* (−) *можна вибрати так, щоб виконувались нерівності*

$$\overline{|\widetilde{s}_{l_m}|} > \frac{1}{2}\, {l_m}^{m\, l_m}, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

[1] *Пидкуйко С.И.* О плотности множества неинтегрируемых гамильтонианов // Изв. Росс. Акад. Наук. – Сер. Матем., Т. 56. – 1992, № 4. – С. 863–876.

[2] *Pidkuyko S.I.* On the denseness of the set of nonintegrable Hamiltonians // Russian Acad. Sci. – Izv. Math. – Vol. 41. – 1993, No. 1. – P. 143–155.

[3] *Siegel C.L.* On the integrals of canonical systems // Ann. of Math., 2 (42). – 1941. – P. 806–822.

[4] *Siegel C.L.* Uber die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosung // Math. Ann., 128. – 1954. – P. 144–170.

ON DENSENESS OF THE SET OF NONINTEGRABLE HAMILTONIANS OF REDUCED THREE-BODY PROBLEM WITH PAIRWISE INTERACTION POTENTIAL

Serhiy PIDKUYKO

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

In the paper the analogue of the well-known result of Siegel (and its generalization proved by the author) on denseness of nonintegrable Hamiltonians in the class of Hamiltonian systems analytical in the neighbourhood of equilibrium point is obtained.

It is shown that nonintegrable Hamiltonian systems of the reduced three-body problem with pairwise interaction potential are dense in the set of all Hamiltonian systems of that class.