ДО ПИТАННЯ ПРО ПОБУДОВУ ДИФУЗІЙНОГО ПРОЦЕСУ, ЯКИЙ ДОПУСКАЄ УЗАГАЛЬНЕНІ ВЕКТОР ПЕРЕНОСУ ТА МАТРИЦЮ ДИФУЗІЇ

©2007 р. Андрій НОВОСЯДЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 15 вересня 2007 р.

За допомогою методів класичної теорії потенціалу побудовано напівгрупу операторів, що описує дифузійний процес, для якого вектор переносу і матриця дифузії є узагальненими функціями.

Розглянемо в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, дві області:

$$\mathcal{D}_m = \{x : x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ (-1)^m x_d > 0\}, \quad m = 1, 2.$$

Через $\overline{\mathcal{D}}_m$ та S будемо позначати відповідно замикання та межу $\mathcal{D}_m$, тобто $\overline{\mathcal{D}}_m = \mathcal{D}_m \cup S$, $S = \{x : x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d, x_d = 0\} = \mathbb{R}^{d-1}$.

Нехай у $\mathcal{D}_m$, $m = 1, 2$, задано дифузійний процес, керований твірним диференціальним оператором зі сталими коефіцієнтами

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij} \ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,, \tag{1}$$

де матриця дифузії $b = (b_{ij})$ є симетричною та додатно визначеною.

Припускаємо також, що на S задані дійсні параметри q_1, q_2, β_{kl}, α_k, $(k, l = 1, \dots, d-1)$, які відповідатимуть за поведінку процесу в точках межі областей. При цьому $\beta = (\beta_{kl})$ — симетрична додатно визначена матриця, а q_1 та q_2 задовольняють умову

$$q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad q_1 + q_2 > 0. \tag{2}$$

УДК 519.21; MSC 2000:60J60

Поставимо задачу про опис достатньо загального класу неперервних феллерівських процесів в $\mathbb{R}^d$, для яких твірний диференціальний оператор в точках областей $\mathcal{D}_1$ і $\mathcal{D}_2$ збігається з оператором L, а їх поведінка в точках межі S визначається додатково заданою умовою спряження типу Вентцеля [3]. Дану задачу ще називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів (див. [9, 10]). Для її розв'язання ми використовуємо аналітичні методи. При такому підході шуканий клас процесів буде породжуватися напівгрупою операторів, яку визначимо за допомогою розв'язку відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку. Ця задача полягає у знаходженні функції $u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, для якої виконуються рівності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathcal{D}_m, \quad m = 1,2, \tag{3}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{4}$$

$$u(t,x',-0) = u(t,x',+0), \quad (t,x') \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} L_0 u \equiv \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_{kl} \frac{\partial^2 u(t,x',0)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{d-1} \alpha_k \frac{\partial u(t,x',0)}{\partial x_k} - \\ -q_1 \frac{\partial u(t,x',-0)}{\partial x_d} + q_2 \frac{\partial u(t,x',+0)}{\partial x_d} = 0, \quad (t,x') \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}. \end{gathered} \tag{6}$$

Зауважимо, що співвідношення (6) відповідає загальній граничній умові Вентцеля для багатовимірних дифузійних процесів, а рівність (5) означає, що шуканий процес буде феллерівським.

Існування класичного розв'язку задачі (3)–(6) отримано нами за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайного потенціалу простого шару. При цьому ми доводимо, що побудований за допомогою розв'язку задачі (3)–(6) феллерівський процес можна трактувати як узагальнену дифузію у розумінні М.І.Портенка [7]. Нагадаємо, що раніше подібна задача розглядалася за допомогою аналітичних методів у [9, 10], де в інтегральному зображенні для шуканої напівгрупи було використано конструкцію спеціального параболічного потенціалу простого шару. Крім того, початково-крайова задача для загального параболічного рівняння другого порядку з граничною умовою Вентцеля вивчалася у роботі [2] за допомогою методу регуляризації. На думку автора, застосований у даній роботі підхід, є перспективним у тому плані, що його розвиток на випадок змінних коефіцієнтів дасть можливість встановити класичну розв'язність сформульованої задачі при мінімальних припущеннях гладкості щодо її вихідних даних. Нарешті, відзначимо роботи [1,11], де проблема побудови узагальненої дифузії вивчалася за допомогою методів стохастичного аналізу.

Позначимо через $g(t,x,y)$ $(t>0, x,y \in \mathbb{R}^d)$ фундаментальний розв'язок (ф.р.) оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t} - L\right)$ [5]. У даному випадку функція $g(t,x,y)$ задається формулою

$$g(t,x,y) = g(t,x-y) = (2\pi t)^{-d/2}(\det b)^{-1/2}\exp\Big\{-\big(b^{-1}(y-x), y-x\big)/(2t)\Big\},$$

де b^{-1} — обернена матриця до b, а $\big(b^{-1}(y-x), y-x\big)$ означає скалярний добуток векторів $b^{-1}(y-x)$ та $(y-x)$ в $\mathbb{R}^d$.

Відзначимо деякі очевидні властивості ф.р. $g(t,x,y)$, які надалі будемо використовувати в роботі:

1) функція $g(t,x,y)$ нескінченно диференційовна за всіма змінними, при фіксованому y задовольняє рівняння (3) і для неї при $t>0$, $x,y \in \mathbb{R}^d$ справедливі оцінки

$$\Big|D_t^r D_x^p\, g(t,x,y)\Big| \le Ct^{-\frac{d+2r+p}{2}}\exp\big\{-c|y-x|^2/t\big\}, \tag{7}$$

де D_t^r і D_x^p — символи частинної похідної за t з порядком r і будь-якої частинної похідної за x з порядком p, а C і c — деякі додатні сталі;

2) для всіх $t_1>0$, $t_2>0$, $x,y \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t_1,x,z)g(t_2,z,y)dz = g(t_1+t_2,x,y);$$

3) для всіх $t>0$, $x,\theta \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)dy = 1, \tag{8}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)(y-x,\theta)dy = 0, \tag{9}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)(y-x,\theta)^2 dy = (b\,\theta,\theta)t. \tag{10}$$

Нас буде цікавити класичний розв'язок задачі (3)–(6), що визначатиметься функцією $u(t,x)$, яка неперервна в області $(t,x) \in [0,\infty)\times\mathbb{R}^d$, обмежена на нескінченності за просторовою змінною x, має неперервні похідні $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i,j=1,\dots,d)$ в точках областей $(t,x)\in(0,\infty)\times\mathcal{D}_m$, $m=1,2$, задовольняє в цих областях рівняння (3), а в точках межі S умови (5), (6). До того ж, як випливає з (6), похідні $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$,

$(i, j = 1, \dots, d-1)$ повинні існувати та бути неперервними в усіх точках області $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$. Існування такого розв'язку встановлюється у наступній теоремі.

Теорема 1. *Нехай матриці* $b = \big(b_{ij}\big)_{i,j=1}^{d}$ *і* $\beta = \big(\beta_{kl}\big)_{k,l=1}^{d-1}$ *у формулах* (1) *і* (6) *— симетричні та додатно визначені, параметри* q_1 *та* q_2 *з* (6) *задовольняють умову* (2)*, а функція* φ *з* (4) *двічі неперервно диференційовна і обмежена разом зі своїми похідними в* $\mathbb{R}^d$*. Тоді задача* (3)–(6) *має єдиний класичний розв'язок, для якого при* $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ *(*$T > 0$ *— фіксоване) справедлива оцінка*

$$\big|u(t,x)\big| \le C\,\|\varphi\|, \tag{11}$$

де

$$||\varphi|| = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\varphi(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} \Big|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\Big| + \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{i,j=1}^{d} \Big|\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j}\Big| ,$$

а C *— деяка стала, скінченна при* $T < \infty$.

Доведення. Розв'язок задачі (3)–(6) шукаємо у вигляді

$$u(t,x) = u_0(t,x) + u_1(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathcal{D}_m, \quad m = 1,2, \tag{12}$$

де

$$u_0(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)dy,$$

$$u_1(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g(t-\tau,x,y')V(\tau,y')dy',$$

$V(t,x)$ $(t \ge 0, x' \in \mathbb{R}^{d-1})$ — невідома функція. У теорії параболічних рівнянь функції u_0 та u_1 називаються потенціалом Пуассона та потенціалом простого шару відповідно. З умов теореми та властивостей потенціалів (див. [5]) випливає, що для будь-якої обмеженої і вимірної функції V функція u з (12) задовольняє рівняння (3) та умови (4), (5). До того ж для u_0 є правильними умова

$$u_0 \in C^{1,2}_{t,x}\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^d\big) \tag{13}$$

та оцінка

$$\big|D^r_t\, D^p_x\, u_0(t,x)\big| \le C\,\|\varphi\|, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, \quad 2r+p \le 2. \tag{14}$$

Отже, для розв'язання задачі потрібно підібрати V так, щоб для u виконувались рівність (6), нерівність (11) та решта властивостей визначеного нами класичного розв'язку.

Припустимо a priori, що шукана щільність V — неперервна при $t \geq 0$, $x' \in S$, обмежена за змінною x' і за цією ж змінною вона є принаймні один раз неперервно диференційовною. Для її знаходження використаємо умову спряження (6). Виділивши у виразі для $L_0 u$ конормальну похідну, після нескладних перетворень отримаємо рівність

$$L_0' u \equiv \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_{kl}^{(0)} \frac{\partial^2 u(t,x',0)}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{d-1} \alpha_k^{(0)} \frac{\partial u(t,x',0)}{\partial x_k} - \\ - u(t,x',0) = \Theta^{(0)}(t,x'), \quad t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \tag{15}$$

де

$$\beta_{kl}^{(0)} = \frac{\sqrt{b_{dd}}}{q_1+q_2} \beta_{kl}, \quad \alpha_k^{(0)} = \frac{\sqrt{b_{dd}}}{q_1+q_2} \alpha_k - \frac{q}{\sqrt{b_{dd}}} b_{kd}, \quad k,l = 1,\dots,d-1,$$

$$\Theta^{(0)}(t,x') = \frac{1}{2}\ \frac{1-q}{\sqrt{b_{dd}}}\ \frac{\partial u(t,x',-0)}{\partial N(x')} - \frac{1}{2}\ \frac{1+q}{\sqrt{b_{dd}}}\ \frac{\partial u(t,x',+0)}{\partial N(x')} - u(t,x',0),$$

$$q = \frac{q_2-q_1}{q_1+q_2}, \quad |q| \leq 1,$$

а $N(x') = b\nu(x')$ — вектор конормалі в $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\nu(x') = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^d$. На підставі теореми про стрибок конормальної похідної від потенціалу простого шару (див. [7], [5]) маємо

$$\frac{\partial u(t,x',\pm 0)}{\partial N(x')} = \frac{\partial u_0(t,x',0)}{\partial N(x')} \mp V(t,x'), \quad t > 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{16}$$

Враховуючи (12) та (16), функцію $\Theta^{(0)}$ можна записати у вигляді

$$\Theta^{(0)}(t,x') = \frac{V(t,x')}{\sqrt{b_{dd}}} - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g(t-\tau,x',y')V(\tau,y')dy' - \\ - \frac{q}{\sqrt{b_{dd}}}\ \frac{\partial u_0(t,x',0)}{\partial N(x')} - u_0(t,x',0). \tag{17}$$

Далі розглядатимемо рівність (15) як автономне еліптичне рівняння відносно $u(t,x',0)$ в просторі $\mathbb{R}^{d-1}$. Насамперед відзначимо, що умови теореми 1 гарантують існування для оператора L_0' головного фундаментального розв'язку $\Gamma(x', y')$ (див. [4,6,8]), який у нашому випадку можна виразити формулою

$$\Gamma(x', y') = \int_0^{\infty} e^{-s}\, G(s, x', y')ds,$$

де $G(s, x', y')$ $(s > 0, x', y' \in \mathbb{R}^{d-1})$ — ф.р. параболічного оператора зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{d-1} \beta_{kl}^{(0)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k=1}^{d-1} \alpha_k^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial s},$$

тобто

$$G(s, x', y') = G(s, x' - y') = (2\pi s)^{-\frac{d-1}{2}} (\det \beta_0)^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\Big\{ -\frac{1}{2s}\big(\beta_0^{-1}(x' - y' + \alpha_0 s), x' - y' + \alpha_0 s\big)\Big\}, \qquad (18)$$

де $\beta_0 = \big(\beta_{kl}^{(0)}\big)_{k,l=1}^{d-1}$, $\alpha_0 = \big(\alpha_k^{(0)}\big)_{k=1}^{d-1}$. Що стосується правої частини рівняння (15), то на підставі умов теореми, апріорного припущення стосовно V та відомих властивостей параболічних потенціалів, робимо висновок, що $\Theta_0(t, x')$ $(t \geq 0, x' \in S)$ є неперервною за обидвома змінними, а за змінною x' — обмеженою та неперервно диференційовною при $t > 0$, $x' \in S$. Тоді (див. [6, гл. III, §20]) розв'язок рівняння (15) виражається формулою

$$u(t, x', 0) = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \Gamma(x', z')\ \Theta^{(0)}(t, z')dz' =$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-s}ds \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G(s, x', z')\ \Theta^{(0)}(t, z')dz', \quad t > 0,\ x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \qquad (19)$$

Отже, маємо два різні вирази для функції $u(t, x', 0)$: рівність (19) та співвідношення (12), де треба покласти $(t, x) = (t, x', 0)$. Прирівнюючи їхні праві частини і враховуючи при цьому (17), дістаємо шукане рівняння відносно V:

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} K(t - \tau, x', y')\ V(\tau, y')dy' + \int_0^{\infty} e^{-s}ds \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G(s, x', z') \frac{V(t, z')}{\sqrt{b_{dd}}} dz' = \psi(t, x'), \quad t > 0,\ x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \qquad (20)$$

де

$$K(t-\tau,x',y') = g(t-\tau,x',y') - \int_0^\infty e^{-s}ds \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G(s,x',z')\; g(t-\tau,z',y')dz',$$

$$\psi(t,x') = \int_0^\infty e^{-s}ds \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G(s,x',z') \times$$

$$\times \Big(\frac{q}{\sqrt{b_{dd}}} \frac{\partial u_0(t,z',0)}{\partial N(z')} + u_0(t,z',0)\Big) dz' - u_0(t,x',0). \tag{21}$$

Аналізуючи функцію $\psi(t,x')$, встановлюємо, що вона неперервна, двічі неперервно диференційовна за x' при $t \geq 0,\; x' \in S$, нескінченно неперервно диференційовна за двома змінними при $t > 0,\; x' \in S$, і для неї справедливі такі оцінки ($t \in (0,T],\; x' \in \mathbb{R}^{d-1}$):

$$\big|D^p_{x'}\psi(t,x')\big| \leq C\,||\varphi||, \quad p \leq 2\,, \tag{22}$$

$$\big|D^p_{x'}\psi(t,x')\big| \leq C\,||\varphi||\,t^{-\frac{p-2}{2}}, \quad p \geq 3\,, \tag{23}$$

$$\big|D^r_t\psi(t,x')\big| \leq C\,||\varphi||\,t^{-\frac{2r-1}{2}}, \quad r \geq 1\,, \tag{24}$$

$$\big|D^r_t D^p_{x'}\psi(t,x')\big| \leq C\,||\varphi||\,t^{-(r-1)-\frac{p}{2}}, \quad r \geq 1,\, p \geq 1. \tag{25}$$

Справді, у випадку, коли $t > 0,\; x' \in S$, то існування похідних будь-якого порядку для функції $\psi(t,x')$ є наслідком аналогічного твердження для ф.р. g і G (див. властивість 1)) та можливості застосувати в інтегралах, які входять до виразу для $\psi(t,x')$ метод інтегрування частинами. Наприклад, щоб обгрунтувати існування $D^2_{x'}\psi(t,x')$ та виконання для цієї функції нерівності (22), спочатку знаходимо рівність

$$\frac{\partial^2\psi(t,x')}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^\infty e^{-s}ds \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{\partial G(s,x',z')}{\partial x_j} \Big[\int_{\mathbb{R}^d} g(t,z',y) \big(\frac{q}{\sqrt{b_{dd}}} \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial N(y')\partial y_i} +$$

$$+ \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}\big) dy \Big] dz' - \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x',y) \frac{\partial^2\varphi(y)}{\partial y_i \partial y_j} dy, \quad i,j = 1,\ldots,d-1.$$

Звідси, на підставі (7) та умови теореми щодо функції φ маємо

$$\Big|\frac{\partial^2\psi(t,x')}{\partial x_i \partial x_j}\Big| \leq C||\varphi|| \Big[\int_0^\infty e^{-s}ds \int_{\mathbb{R}^{d-1}} s^{-d/2} \exp\big\{-c|x'-z'+\alpha_0\, s|^2/s\big\} \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} \exp\big\{-c|z'-y'|^2/t\big\}\, dy \Big) dz' +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} t^{-d/2} \exp\big\{-c|y-x'|^2/t\big\}\, dy \Big] \leq C||\varphi||, \quad t > 0,\; x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Далі, оскільки

$$\frac{\partial^2\psi(0,x')}{\partial x_i\partial x_j}=\int_0^\infty e^{-s}ds\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{\partial G(s,x',z')}{\partial x_j}\Big(\frac{q}{\sqrt{b_{dd}}}\frac{\partial^2\varphi(y)}{\partial N(z')\partial z_i}+ \\ +\frac{\partial\varphi(z',0)}{\partial z_i}\Big)dz'-\frac{\partial^2\varphi(x',0)}{\partial x_i\partial x_j},\quad i,j=1,\dots,d-1,$$

то можна стверджувати, що функція $\frac{\partial^2\psi(t,x')}{\partial x_i\partial x_j}$ є неперервною при $t\geq 0$, $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$, і для неї виконується нерівність (22) при $p=2$.

Інші оцінки з (22)–(25) встановлюються за аналогічною схемою.

Як бачимо, рівняння (20) є інтегральним рівнянням вольтеррівсько-фредгольмового типу I-го роду. З метою його регуляризації запровадимо інтегро-диференціальний оператор $\mathcal{E}$, який діє за правилом

$$\mathcal{E}(t,x')\psi=\sqrt{2/\pi}\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\Big[h(\widehat{t}-\tau,x',y')+ \\ +\int_0^\infty(1-\frac{u}{t-\tau})e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\int_{\mathbb{R}^{d-1}}h(\widehat{t}-\tau,x',v')\,G(u,v',y')dv'\Big]\times \\ \times\psi(\tau,y')dy'\Big\}\Big|_{\widehat{t}=t},\quad t>0,\quad x'\in\mathbb{R}^{d-1}, \tag{26}$$

де $h(t,x',y')$ ($t>0$, $x',y'\in\mathbb{R}^{d-1}$) — ф.р. параболічного оператора зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d-1}\widetilde{b}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},\qquad \widetilde{b}_{ij}=b_{ij}-\frac{b_{id}\,b_{jd}}{b_{dd}},\quad i,j=1,\dots,d-1.$$

Застосування оператора $\mathcal{E}$ до обох частин рівняння (20) веде до рівності

$$V(t,x')=(b_{dd})^{1/2}\mathcal{E}(t,x')\psi,\quad t>0,\quad x'\in\mathbb{R}^{d-1}. \tag{27}$$

Дослідимо функцію $V(t,x')$. На підставі властивості 3), застосованої до ф.р. h, знаходимо формулу

$$\sqrt{\pi/2}\;\mathcal{E}(t,x')\psi=-\frac{1}{2}\int_0^t(t-\tau)^{-3/2}d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}h(t-\tau,x'-y')\times \\ \times\big(\psi(\tau,y')-\psi(\tau,x')-(\nabla'\psi(\tau,x'),y'-x')\big)dy'+ \\ +\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}dy'\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}\Big[(t-\tau)^{-1/2}(1-\frac{u}{t-\tau})\exp\big\{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}\big\}\Big]du\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d-1}} h(t-\tau, x'-y'-v')G(u,v')\Big(\psi(\tau,y')-\psi(\tau,x'-v')-$$

$$-(\nabla'\psi(\tau,x'-v'), y'-x'+v')\Big)dv' + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau \int_0^\infty (1-\frac{u}{t-\tau})\times$$

$$\times \exp\big\{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}\big\}du \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G(u,v')\big(\psi(\tau,x'-v')-\psi(\tau,x')\big)dv' +$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \psi(t,x') = \sum_{i=1}^4 I_i, \tag{28}$$

де $\nabla' = \big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{d-1}}\big)$. Оцінимо за модулем кожен із чотирьох членів правої частини, враховуючи співвідношення (7), (22)–(25). Перший і другий члени оцінюються однаково. Наприклад,

$$|I_1| \le C||\varphi|| \int_0^t (t-\tau)^{-3/2}d\tau \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (t-\tau)^{\frac{d-1}{2}} e^{-c\frac{|x'-y'|^2}{t-\tau}}\ |y'-x'|^2 dy' \le$$

$$\le C||\varphi||t^{1/2}, \quad t>0,\ x' \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Далі, I_3 можна записати у вигляді

$$I_3 = \int_0^t \tau^{-1/2}d\tau \int_0^\infty (1-\frac{u}{\tau})\exp\{-\frac{u^2}{2\tau}\}du \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G(u,x'-v')\times$$

$$\times\left(\frac{\partial\psi(t-\tau,v')}{\partial t} - \frac{\partial\psi(t-\tau,x')}{\partial t}\right)dv' + t^{-1/2}\int_0^\infty (1-\frac{u}{t})\exp\big\{-\frac{u^2}{2t}\big\}du\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}} G(u,x'-v')\Big(\psi(0,v')-\psi(0,x')-(\nabla'\psi(0,x'),v'-x')\Big)dv' +$$

$$+\Big(\alpha_0, \nabla'\psi(0,x')\Big)(\sqrt{t}-\sqrt{\pi/2}\,),$$

і тому для $t \in (0,T]$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ маємо

$$|I_3| \le C||\varphi||\Big[\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\ \tau^{-1/2}d\tau \int_0^\infty |1-u/\tau|\exp\big\{-u^2/(2\tau)\big\}\,du\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}} u^{-\frac{d-1}{2}}\exp\big\{-c|x'-v'+\alpha_0 u|^2/u\big\}\ |x'-v'|dv' +$$

$$+\,t^{-1/2}\int_0^\infty |1-u/t|\exp\big\{-u^2/(2t)\big\}du\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}} u^{-\frac{d-1}{2}}\exp\big\{-c|x'-v'+\alpha_0 u|^2/u\big\}\ |v'-x'|^2dv' + (\sqrt{t}+1)\Big] \le C||\varphi||.$$

Очевидно, така ж нерівність виконується і для члена I_4. Вона випливає з (22). Відзначимо також, що детальніший аналіз члена I_3 з (28) дає можливість встановити співвідношення

$$V(0,x') = \lim_{t\downarrow 0} V(t,x') = -(b_{dd})^{1/2} L_0' \; \psi(0,x').$$

Отже, функція $V(t,x')$ є неперервною в області $t \geq 0$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ і задовольняє нерівність

$$|V(t,x')| \leq C\, ||\varphi|| \tag{29}$$

в кожній з областей вигляду $t \in [0,T]$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ з деякою сталою C.

Аналогічно доводимо, що функція $V(t,x')$ — двічі неперервно диференційовна за змінною x' в області $t > 0$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, і для її похідних виконується оцінка

$$|D^p_{x'} V(t,x')| \leq C\, ||\varphi||\, t^{-\frac{p}{4}}\,, \quad t \in (0,T],\, x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad p = 1,2. \tag{30}$$

Оцінки (14), (29), (30) гарантують існування шуканого розв'язку задачі (3)–(6), для якого виконуються нерівності (11).

Обгрунтуємо тепер твердження про єдиність знайденого розв'язку. Для цього достатньо лише зауважити, що побудований за формулами (12), (27) розв'язок задачі (3)–(6) в кожній з областей $t > 0$, $x \in \mathcal{D}_m$, $m = 1,2$, можна розглядати як єдиний розв'язок наступної параболічної першої крайової задачі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathcal{D}_m, \quad m = 1,2,$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\mathcal{D}}_m, \quad m = 1,2,$$
$$u(t,x',0) = v(t,x'), \quad (t,x') \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^{d-1},$$

при виконанні умови узгодження

$$v(0,x') = \varphi(x',0)\,, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

де функція $v(t,x')$ визначається за допомогою співвідношення (19).

Теорему 1 доведено.

Побудуємо шуканий процес. Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ банахів простір всіх дійсних обмежених вимірних функцій на $\mathbb{R}^d$ з нормою

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x)|\,.$$

Визначимо на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ сім'ю операторів T_t, $t>0$, за формулою

$$T_t\varphi(x) = T_t^{(0)}\varphi(x) + T_t^{(1)}\varphi(x)\,, \quad x\in\mathbb{R}^d\,, \tag{31}$$

де $T_t^{(0)}\varphi(x)=u_0(t,x)$, $T_t^{(1)}\varphi(x)=u_1(t,x)$, а функція $V(t,x',\varphi)$ для $t>0$, $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$ визначена співвідношенням (27).

Спочатку переконаємося в тому, що оператори T_t, $t>0$, можна застосовувати до функцій φ з класу $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Отже, нехай $\varphi\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Тоді існування першого доданка у (31) випливає з очевидної нерівності

$$T_t^{(0)}\varphi(x)\le C||\varphi||\,, \tag{32}$$

яка виконується при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^d$ з деякою сталою C.

Тепер оцінимо функцію $V(t,x',\varphi)$. Для цього використаємо формулу (28), елементарні оцінки для ф.р. g,h та G, а також такі нерівності для функції ψ ($t\in(0,T]$, $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$):

$$\begin{aligned}
&\big|\psi(t,x')\big|\le C\,||\varphi||\,t^{-1/2},\\
&\big|D^p_{x'}\psi(t,x')\big|\le C\,||\varphi||\,t^{-p/2}\,,\quad p\ge 1\,,\\
&\big|D^r_t\psi(t,x')\big|\le C\,||\varphi||t^{-\frac{2r+1}{2}},\quad r\ge 1\,,\\
&\big|D^r_tD^p_{x'}\psi(t,x')\big|\le C\,||\varphi||\,t^{-\frac{2r+p}{2}},\quad r\ge 1,\,p\ge 1\,.
\end{aligned} \tag{33}$$

Відзначимо, що нерівності (33) легко встановлюються за схемою, яка застосовувалася при доведенні нерівностей (22)–(25).

У зображенні (28) оцінимо для визначеності члени I_1 та I_3, оскільки член I_2 оцінюється так само, як I_1, а оцінка для I_4 є наслідком першої нерівності у (33). Розглядаючи доданок I_1, запишемо його у вигляді

$$\begin{aligned}
I_1 = -\frac{1}{2}\int_0^{t/2}(t-\tau)^{-3/2}d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}h(t-\tau,x'-y')\big(\psi(\tau,y')-\psi(\tau,x')\big)dy'-\\
-\frac{1}{2}\int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}h(t-\tau,x'-y')\big(\psi(\tau,y')-\psi(\tau,x')-\\
-(\nabla'\psi(\tau,x'),y'-x')\big)dy'\,.
\end{aligned}$$

Звідси для $t\in(0,T]$, $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$ буде випливати нерівність

$$|I_1|\le C||\varphi||\Big[\int_0^{t/2}(t-\tau)^{-3/2}\tau^{-1/2}d\tau\int_{\mathbb{R}^{d-1}}(t-\tau)^{-\frac{d-1}{2}}\times$$

$$\times \exp\big\{-c|x'-y'|^2/(t-\tau)\big\}|y'-x'|dy' + \int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-3/2}\tau^{-1}d\tau\times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{d-1}}(t-\tau)^{-1/2}\exp\big\{-c|x'-y'|^2/(t-\tau)\big\}|y'-x'|^2dy'\Big] \le C||\varphi||\times$$

$$\times\Big[\int_0^{t/2}(t-\tau)^{-1}\tau^{-1/2}d\tau + \int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-1/2}\tau^{-1}d\tau\Big] \le C||\varphi||\ t^{-1/2}. \qquad (34)$$

Далі, використовуючи рівність (21), а також формулу типу згортки, застосовану до ф.р. G (див. властивість 2)), після нескладних перетворень для I_3 знаходимо ще одне зображення

$$I_3 = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}d\tau\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\int_{\mathbb{R}^{d-1}}G(u,x'-z')\times$$

$$\times\Big(\frac{q}{\sqrt{b_{dd}}}\,\frac{\partial u_0(\tau,z',0)}{\partial N(z')} + u_0(\tau,z',0)\Big)dz' - \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t(t-\tau)^{-1/2}d\tau\times$$

$$\times\int_0^\infty\,(1-\frac{u}{t-\tau})e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\int_{\mathbb{R}^{d-1}}G(u,x'-v')\,\Big(u_0(\tau,v',0)-$$

$$-u_0(\tau,x',0)\Big)dv' - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-s}ds\int_{\mathbb{R}^{d-1}}G(s,x'-z')\times$$

$$\times\Big(\frac{q}{\sqrt{b_{dd}}}\,\frac{\partial u_0(t,z',0)}{\partial N(z')} + u_0(t,z',0)\Big)dz' = \sum_{j=1}^{3}I_{3j}\,.$$

При цьому, перед тим, як розкрити похідну, наприклад, від інтеграла, що входить до виразу для I_{31}, спочатку запишемо цей інтеграл (позначимо його через I) у формі

$$I = \frac{1}{t}\Big[\int_0^t(t-\tau)^{1/2}d\tau\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2(t-\tau)}}du\int_{\mathbb{R}^{d-1}}G(u,x'-z')\times$$

$$\Big(\frac{q}{\sqrt{b_{dd}}}\,\frac{\partial u_0(\tau,z',0)}{\partial N(z')} + u_0(\tau,z',0)\Big)dz' + \int_0^t\tau^{-1/2}d\tau\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2\tau}}du\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{d-1}}G(u,x'-z')\,(t-\tau)\,\Big(\frac{q}{\sqrt{b_{dd}}}\,\frac{\partial u_0(t-\tau,z',0)}{\partial N(z')} + u_0(t-\tau,z',0)\Big)dz'\Big]\,,$$

а потім продиференціюємо отриманий вираз за змінною t. Аналогічно можна розкрити похідну від інтеграла, який входить до I_{32}. Оцінюючи після цього члени I_{3j}, $j = 1, 2, 3$, робимо висновок, що для I_3 як і для I_1, I_2 та I_4 виконується нерівність (34).

З отриманих нами оцінок випливає, що у випадку, коли $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ функція $V(t, x', \varphi)$ — неперервна в області $t > 0$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, і для неї виконується оцінка

$$|V(t, x', \varphi)| \leq C||\varphi||\, t^{-1/2}, \quad t \in (0, T],\, x' \in \mathbb{R}^{d-1}. \tag{35}$$

Оцінки (7), (35) гарантують виконання для функції $T_t^{(1)}\varphi(x)$, а, отже, і для $T_t\varphi(x)$, нерівності (32) в кожній області $t \in (0, T]$, $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$.

Із явних виразів для функцій $V(t, x', \varphi)$ та $T_t\varphi(x)$, за допомогою нерівностей (7), (35) дістаємо таку властивість для сім'ї операторів $(T_t)_{t>0}$: якщо послідовність $\varphi_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ є такою, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^d$ і, крім того, $\sup\limits_{n,x} |\varphi_n(x)| < \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} V(t, x', \varphi_n) = V(t, x', \varphi)$, а, отже, і $\lim\limits_{n\to\infty} T_t\varphi_n(x) = T_t\varphi(x)$ для всіх $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Дане зауваження дозволяє перевірити виконання деяких потрібних для нас властивостей функції $T_t\varphi(x)$ лише для гладких φ. Зокрема, діючи за схемою праці [10], далі встановлюємо, що побудована за формулами (27), (31) сім'я операторів $(T_t)_{t>0}$ утворює напівгрупу, і що при виконанні умови (2) ці оператори залишають інваріантним конус невід'ємних функцій простору $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Оскільки, очевидно, $T_t\varphi(x) \equiv 1$ для $\varphi(x) \equiv 1$, то робимо висновок, що сім'я операторів $(T_t)_{t>0}$ визначає на $\mathbb{R}^d$ однорідний необривний феллерівський процес, і йому відповідає така ймовірність переходу $P(t, x, dy)$, що

$$T_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\, P(t, x, dy).$$

На завершення наших досліджень за допомогою безпосередніх обчислень доводимо, що ймовірність переходу $P(t, x, dy)$ володіє такими властивостями:

а)
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |y - x|^6\, P(t, x, dy) \leq C\, t^{3/2}\,, \quad t \in (0, T], \tag{36}$$

де C — деяка додатна стала;

б) для будь-якої фінітної неперервної функції $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, та всіх $\Theta \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \Big[\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} (y - x, \Theta) P(t, x, dy)\Big] dx = (\bar{\alpha}, \Theta) \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(x', 0) dx',$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\Big[\frac{1}{t}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(y-x,\Theta)^2P(t,x,dy)\Big]dx=(b\Theta,\Theta)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)dx+$$
$$+(\bar{\beta}\Theta,\Theta)\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\varphi(x',0)\,dx', \tag{37}$$

де $\bar{\alpha}=\dfrac{b_{dd}}{q_1+q_2}\Big(\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1},q_2-q_1\Big)\in\mathbb{R}^d$, $\overline{\beta}=\Big(\overline{\beta}_{ij}\Big)_{i,j=1}^{d}$,

$$\overline{\beta}_{ij}=\begin{cases}\dfrac{b_{dd}}{q_1+q_2}\,\beta_{ij} & \text{якщо } i,j=1,\ldots,d-1\,,\\ 0 & \text{якщо } i=d \text{ або } j=d.\end{cases}$$

З нерівності (36) випливає, що траєкторії побудованого процесу є неперервними, а співвідношення (37) вказують на те, що цей процес можна трактувати як узагальнену дифузію в розумінні М.І.Портенка [7]. При цьому вектор переносу та матриця дифузії для нього відповідно дорівнюють

$$\overline{\alpha}\;\delta_S(x)\quad\text{та}\quad b+\overline{\beta}\,\delta_S(x)\,,$$

де $\delta_S(x)$ — узагальнена функція на $\mathbb{R}^d$, яка зосереджена на поверхні S.

Отже, нами доведена теорема.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів операторів L та L_0 з* (1) *та* (6) *виконані умови теореми 1. Тоді розв'язок задачі* (3)–(6) *визначає напівгрупу операторів, яка описує узагальнений дифузійний процес в $\mathbb{R}^d$ з характеристиками, що виражаються формулами* (37).

[1] *Анулова С.В.* Диффузионные процессы: розрывные коэффициенты, вырождающаяся диффузия, рандомизированный снос // ДАН СССР. – 1981. – 260, № 5. – С. 1036–1040.

[2] *Базалий Б.В.* Об одной модельной задаче со вторыми производными по геометрическим переменным в граничном условии для параболического уравнения второго порядка // Мат. заметки. – 1998. – 63, вып. 3. – С. 468–473.

[3] *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. – 1959. – **4**, № 2. – С. 172–185.

[4] *Конёнков А.Н.* О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений // Дифференц. уравнения, 2002. – **38**, № 2. – С. 247–256.

[5] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

[6] *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957. – 256 с.

[7] *Портенко Н.И.* Обобщённые диффузионные процессы. – К.: Наук. думка, 1982. – 208 с.

[8] *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

[9] *Kopytko B.I., Portenko N.I.* Analitical Methods of Pasting Together of Diffusion Processes // Lecture Notes in Mathematics, 1983. – N 1021. – P. 320–326.

[10] *Kopytko B.I.* Diffusion Processes with Generalized Drift Vector and Diffusion Matrix // Proc. of the Sixth USSR–Japan Symposium Probability Theory And Mathematical Statistics. – Kiev, USSR, August 5-10, 1991. – World Sci. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. – P. 169–175.

[11] *Zaitseva L.* On stochastic continuity of generalized diffusion processes constructed as the strong solution to an SDE // Theory of Stochastic Processes, 2005. – **11 (27)**, № 12. – P. 125–135.

TO A PROBLEM ABOUT CONSTRUCTION OF DIFFUSION PROCESS WHICH SUPPOSES GENERALIZED VECTOR OF TRANSPOSITION AND MATRIX OF DIFFUSION

Andrij NOVOSJADLO

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Using method of classical potential theory it was constructed semigroup of operators, that describes diffusion process, for which vector of transposition and matrix of diffusion are generalized functions.