БЕРІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

©*2007 р. Володимир МИХАЙЛЮК*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 6 листопада 2007 р.

Показано, що для довільного топологічного простору Y та довільної функції $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$, яка n разів диференційовна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної, функція $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, y)$ є функцією першого класу Бера.

1. Відображення $f : X \to \mathbb{R}$, визначене на топологічному просторі X, називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність (f_n) неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Для довільного не більш, ніж зліченного ординала α відображення $f : X \to \mathbb{R}$ називається *функцією берівського класу* α, якщо існує послідовність (f_n) функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, які є функціями берівського класу, меншого, ніж α, така, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$. Функції берівського класу α, де α — деякий не більш, ніж зліченний ординал, називаються *вимірними за Бером*.

Дослідження берівської класифікації нарізно неперервних функцій двох чи більшої кількості змінних, тобто функцій, визначених на добутках топологічних просторів і неперервних відносно кожної змінної, зокрема, беруть свій початок з класичної праці А.Лебега [3] і були продовжені в роботах багатьох математиків (Г.Гана, В.Морана, В.Рудіна, Г.Вери, В.Маслюченка, О.Собчука, Т.Банаха, М.Бурке та інших) і залишаються предметом сучасних наукових студій в загальній теорії функцій, що містить чимало цікавих задач і відкритих питань.

З іншого боку, оскільки $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ для довільної диференційовної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, то похідна $f'(x)$ є функцією першого

УДК 515.12, 517.51, MSC 2000: 54C10, 26B05

класу Бера. Тому природно постає питання про берівську класифікацію частинних похідних функцій $f:\mathbb{R}\times Y\to\mathbb{R}$, які диференційовні відносно першої змінної і неперервні відносно другої, чи аналогічні питання про частинні похідні вищих порядків. Г.Толстов у [6] показав, що частинна похідна f'_x нарізно неперервної функції $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, яка диференційовна відносно першої змінної, є функцією першого класу Бера. Л.Снайдер у [5] узагальнив цей результат на випадок апроксимативної частинної похідної функції двох дійсних змінних.

У даній статті ми за допомогою техніки розбиттів одиниці покажемо, що для довільного топологічного простору Y і довільної функції $f:\mathbb{R}\times Y\to\mathbb{R}$, яка n разів диференційовна відносно першої змінної та неперервна відносно другої змінної, функція $g(x,y)=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y)$ є функцією першого класу Бера.

2. Розпочнемо з простого комбінаторного твердження. Для зручності при $n=m=0$ вважатимемо, що $n^m=1$.

Твердження 1. *Нехай* $n\in\mathbb{N}$ *і* $k\in\{0,1,\dots,n\}$. *Тоді*

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}i^kC_n^i=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad 0\le k\le n-1;\\ n!, & \text{якщо}\quad k=n.\end{cases}$$

Доведення. Використаємо індукцію за n.

Легко бачити, що це твердження виконується при $n=1$ і $k=0,1$.

Припустимо, що дане твердження істинне для всіх натуральних чисел $n\le m$ і $k\in\{0,\dots,n\}$ і доведемо його для $n=m+1$.

Зауважимо, що при $k=0$ відповідна рівність є очевидною.

Нехай $k\in\{1,\dots,m+1\}$. Врахувавши, що $C_{m+1}^i=(m+1)C_m^{i-1}$ для кожного $i\in\{1,\dots,m+1\}$, одержимо

$$\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^{m+1-i}i^kC_{m+1}^i=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{m+1-i}i^kC_{m+1}^i=$$

$$=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^{m+1-i}i^{k-1}(m+1)C_m^{i-1}=(m+1)\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i(i+1)^{k-1}=$$

$$=(m+1)\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-1}^j\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i i^j.$$

Згідно з індуктивним припущенням

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}i^jC_m^i=0\quad\text{при}\quad j\in\{0,1,\dots,m-1\}.$$

Тому $\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^{m+1-i}i^k C_{m+1}^i = 0$ при $k \in \{1,\dots,m\}$ і

$$\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^{m+1-i}i^{m+1}C_{m+1}^i =$$

$$= (m+1)C_m^m\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i i^m = (m+1)m! = (m+1)!$$

3. Наступний результат є одним із варіантів формули Ньютона для скінченних різниць [1, с. 40].

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — $(n-1)$ раз диференційовна в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}$ і має похідну n-го порядку в точці x_0 і $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ — послідовність точок $x_k \in \mathbb{R}$ таких, що $x_0 \in [x_k, x_k + \frac{n}{k}]$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{k\to\infty} k^n\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f\left(x_k + \frac{i}{k}\right)\right).$$

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і згідно з формулою Тейлора [2, с. 295] виберемо $\delta > 0$ таке, що

$$\left|f(x_0+t) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}t - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}t^n\right| \le \varepsilon\left(\frac{|t|}{2n}\right)^n$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \delta$. Візьмемо $k_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $n/k_0 < \delta$, зафіксуємо довільний номер $k \ge k_0$ і позначимо $t = x_k - x_0$. Для кожного $i \in \{0,\dots,n\}$ покладемо

$$\alpha_i = f\left(x_k + \frac{i}{k}\right) - \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\left(t + \frac{i}{k}\right)^j.$$

Оскільки $x_0, x_k + i/k \in [x_k + n/k]$, то

$$\left|x_k + \frac{i}{k} - x_0\right| = \left|t + \frac{i}{k}\right| \le \frac{n}{k} \le \frac{n}{k_0} < \delta$$

і згідно з вибором δ для кожного $i \in \{0,\dots,n\}$ маємо

$$|\alpha_i| \le \varepsilon\left(\frac{|t+\frac{i}{k}|}{2n}\right)^n \le \varepsilon\left(\frac{\frac{n}{k}}{2n}\right)^n = \frac{\varepsilon}{2^n k^n}.$$

Використовуючи твердження 1, одержимо

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\left(t+\frac{i}{k}\right)^j=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\left(t+\frac{i}{k}\right)^j=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\sum_{m=0}^{j}C_j^m t^{j-m}\frac{i^m}{k^m}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\sum_{m=0}^{j}C_j^m\frac{t^{j-m}}{k^m}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i i^m=$$

$$=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}C_n^n\frac{t^{n-n}}{k^n}n!=\frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n}.$$

Тепер маємо

$$\left|k^n\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f(x_k+\frac{i}{k})\right)-f^{(n)}(x_0)\right|=$$

$$=\left|k^n\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\alpha_i+\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\left(t+\frac{i}{k}\right)^j\right)-\right.$$

$$\left.-f^{(n)}(x_0)\right|=\left|k^n\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\alpha_i+\frac{f^{(n)}(x_0)}{k^n}\right)-f^{(n)}(x_0)\right|=$$

$$=\left|k^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\alpha_i\right|\le k^n\frac{\varepsilon}{2^nk^n}\sum_{i=0}^{n}C_n^i=\frac{\varepsilon}{2^n}2^n=\varepsilon.$$

4. Тепер з допомогою техніки розбиттів одиниці, які вперше були застосовані в [4] при доведенні належності до першого класу Бера нарізно неперервних відображень на добутку метризовного і топологічного просторів і зі значеннями в локально опуклому просторі, доведемо основний результат даної статті.

Теорема 3. *Нехай $n\in\mathbb{N}$, $X=\mathbb{R}$, Y — топологічний простір, $f: X\times Y\to\mathbb{R}$ — функція, неперервна відносно другої змінної і*

$$E=\left\{(x,y)\in X\times Y:\ \text{існує}\ \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y)\right\}.$$

Тоді функція $g: E\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y)$, є функцією першого класу Бера.

Доведення. Для довільних $x_0 \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ запровадимо функцію $\varphi_{x_0,m} : \mathbb{R} \to [0,1]$, визначену формулою

$$\varphi_{x_0,m}(x) = \begin{cases} m(x - x_0) + 1, & \text{якщо} \quad x \in [x_0 - \frac{1}{m}, x_0], \\ m(x_0 - x) + 1, & \text{якщо} \quad x \in (x_0, x_0 + \frac{1}{m}], \\ 0, & \text{якщо} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m}]. \end{cases}$$

Зауважимо, що функції $\varphi_{x_0,m}$ неперервні. Покажемо, що $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{\frac{k}{m},m}(x) = 1$ для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$. Нехай $m \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}$. Виберемо $k_0 \in \mathbb{Z}$ так, щоб $x \in (\frac{k_0}{m}, \frac{k_0+1}{m}]$. Зауважимо, що $\varphi_{\frac{k}{m},m}(x) = 0$, якщо $k > k_0 + 1$ або $k < k_0$. Тому

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{\frac{k}{m},m}(x) = \varphi_{\frac{k_0}{m},m}(x) + \varphi_{\frac{k_0+1}{m},m}(x) = m\left(\frac{k_0}{m} - x\right) + 1 +$$

$$= +m\left(x - \frac{k_0+1}{m}\right) + 1 = k_0 - mx + 1 + mx - k_0 - 1 + 1 = 1.$$

Для довільних $m \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ функцію $g_{m,k} : Y \to \mathbb{R}$ означимо рівністю

$$g_{m,k}(y) = (mn)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i f\left(\frac{k-1}{2m} + \frac{i}{mn}, y\right).$$

Із неперервності функції f відносно змінної y випливає, що всі функції $g_{m,k}$ — неперервні.

Для довільних $m \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ позначимо $\psi_{m,k} = \varphi_{\frac{k}{2m},2m}$. Функцію $g_m : X \times Y \to \mathbb{R}$ означимо таким чином:

$$g_m(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_{m,k}(x) g_{m,k}(y).$$

Оскільки

$$\operatorname{supp} \psi_{m,k} = \{x \in X : \psi_{m,k}(x) \neq 0\} =$$

$$= \left\{x \in X : \varphi_{\frac{k}{2m},2m}(x) \neq 0\right\} = \left(\frac{k-1}{2m}, \frac{k+1}{2m}\right),$$

то для довільного $\ell \in \mathbb{Z}$ і $x \in \left(\frac{\ell-1}{2m}, \frac{\ell+1}{2m}\right)$ отримаємо

$$g_m(x,y) = \psi_{m,\ell-1}(x) g_{m,\ell-1}(y) + \psi_{m,\ell}(x) g_{m,\ell}(x) + \psi_{m,\ell+1}(x) g_{m,\ell_1}(y).$$

Тому звуження функції g_m на множину $\left(\frac{\ell-1}{2m}, \frac{\ell+1}{2m}\right) \times Y$ є неперервним як сума неперервних функцій. Отже, кожна функція g_m є неперервною.

Залишилось встановити, що $g(p) = \lim\limits_{m\to\infty} g_m(p)$ для кожного $p \in E$.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in E$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ позначимо

$$N_m = \{k \in \mathbb{Z} : \psi_{m,k}(x_0) \neq 0\}.$$

Покажемо, що для довільної послідовності $(k_m)_{m=1}^{\infty}$ номерів $k_m \in N_m$

$$\lim_{m\to\infty} g_{m,k_m}(y_0) = g(x_0, y_0).$$

Зауважимо, що умова $k_m \in N_m$ означає, що $x_0 \in \left(\frac{k_m-1}{2m}, \frac{k_m+1}{2m}\right)$. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ позначимо $z_{mn} = \frac{k_m-1}{2m}$. Крім того, для кожного $j \in \mathbb{N} \setminus \{mn : m \in \mathbb{N}\}$ виберемо довільну точку $z_j \in \mathbb{R}$ так, щоб $x_0 \in [z_j, z_j + \frac{n}{j}]$. Отже, функція $f_{y_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$, яка має похідну n-го порядку в точці x_0, і послідовність $(z_m)_{m=1}^{\infty}$ задовольняють умови теореми 2. Тому

$$g(x_0, y_0) = f_{y_0}^{(n)}(x_0) = \lim_{m\to\infty} m^n \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i f_{y_0}\left(z_m + \frac{i}{m}\right)\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} (mn)^n \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i f_{y_0}\left(z_{mn} + \frac{i}{mn}\right)\right) = \lim_{m\to\infty} g_{m,k_m}(y_0).$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Згідно з доведеною властивістю послідовності (N_m), існує номер $m_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для довільних $m \geq m_0$ і $k \in N_m$

$$|g(x_0, y_0) - g_{m,k}(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Враховуючи, що $\sum\limits_{k\in N_m} \psi_{m,k}(x_0) = 1$ і $g_m(x_0, y_0) = \sum\limits_{k\in N_m} \psi_{m,k}(x_0) g_{m,k}(y_0)$, одержимо

$$|g(x_0, y_0) - g_m(x_0, y_0)| = \left| \sum_{k\in N_m} \psi_{m,k}(x_0) g(x_0, y_0) - \sum_{k\in N_m} \psi_{m,k}(x_0) g_{m,k}(y_0) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k\in N_m} \psi_{m,k}(x_0)(g(x_0, y_0) - g_{m,k}(y_0)) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k\in N_m} \psi_{m,k}(x_0) |g(x_0, y_0) - g_{m,k}(y_0)| < \varepsilon \sum_{k\in N_m} \psi_{m,k}(x_0) = \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} g_m(x_0,y_0) = g(x_0,y_0)$.

У випадку, коли $E = X \times Y$, отримуємо наступний результат.

Теорема 4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}$, Y — топологічний простір, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ — функція, яка n разів диференційовна відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної. Тоді функція $g : X\times Y \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y)$, є функцією першого класу Бера.*

[1] *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. – М.–Л.: ГТТИ, 1952. – 479 с.

[2] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрльного исчисления. Т. 1. – М.: Физматгиз, 1962. – 607 с.

[3] *Lebesgue H.* Sur les fonctions représentables analytiqment // Journ. de Math. Sér. 6. – 1905. – **1**. – P. 139–216.

[4] *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and Appl. – Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. – Supplem. Studies 78. – Academic Press. – 1981. – P. 741–747.

[5] *Snyder L.* The Baire classification of ordinary and approximate partial derivatives // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 17, № 1. – P. 115–123.

[6] *Tolstov G.* On partial derivatives // Izv. Akad. Nauk SSSR. – 1949. – Vol. 13. – P. 425–449.

THE BAIRE CLASSIFICATION OF PARTIAL DERIVATIVES

Volodymyr MYKHAYLYUK

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

It is shown that for arbitrary topological space Y and arbitrary function $f : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ which is n times differentiable on the first variable and continuous on the second variable the function $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y)$ is in the first Baire class.