АСИМПТОТИКА НУЛІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ТИПУ СИНУС, ЩО ДІЮТЬ У БАНАХОВІЙ АЛГЕБРІ

©2007 р. Ярослав МИКИТЮК, Наталія ТРУШ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 12 вересня 2007 р.

У банаховій алгебрі $\mathcal{B}$ з одиницею I розглядається ціла функція F, що діє за формулою $F(A) = \sin A + \int_{-1}^{1} f(t) \exp(iAt)\, dt$, де $f \in L_1((-1,1),\mathcal{B})$. Вивчається асимптотика тих нулів функції F, які близькі до $\pi n I$, $n \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\mathcal{B}$ — банахова алгебра з одиницею I і нормою $\|\cdot\|$. Домовимося через L_p скорочено позначати простір $L_p((-1,1),\mathcal{B})$, $p \in [1,\infty)$, а через $\mathcal{F}_p$ — клас усіх цілих функцій $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, що діють за формулою

$$F(A) := F_f(A) := \sin A + \int_{-1}^{1} f(t) \exp(iAt)\, dt, \qquad A \in \mathcal{B}, \tag{1}$$

де $f \in L_p$. Зауважимо, що $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}_r \subset \mathcal{F}_1$ при $p \geq r \geq 1$. Елемент $B \in \mathcal{B}$ назвемо нулем функції $F \in \mathcal{F}_p$, якщо $F(B) = 0$. Мета даної роботи полягає в тому, щоб дослідити асимптотичну поведінку тих нулів функції F, які близькі до $\pi n I$, $n \in \mathbb{Z}$.

Наскільки відомо авторам, досі функції вигляду (1) не розглядалися.

Потреба у постановці та вирішенні такої задачі виникла під час спроби отримати добру асимптотику для власних значень матричного оператора Штурма–Ліувілля на відрізку. Зауважимо, що на сьогодні цей оператор недостатньо вивчений [3–5]. На думку авторів, функції класу $\mathcal{F}_p$ є зручним інструментом при розв'язуванні прямих та обернених задач для матричного оператора Штурма–Ліувілля. Крім того, вони є векторним аналогом добре відомих числових цілих функцій типу синус [6]. Керуючись цими міркуваннями, ми і взялися за написання даної роботи.

УДК 517.547.2; MSC 2000: 30D99

Основними результатами статті є дві теореми, сформульовані нижче.

Теорема 1. *Нехай $F \in \mathcal{F}_1$. Для всіх $n \in \mathbb{Z}$, за винятком, можливо, скінченної кількості, у кулі $\mathcal{K}_n = \{A \in \mathcal{B} \mid \|A - \pi n I\| \le 1\}$ є рівно один нуль $A_n = A_n(F)$ функції F. Крім того,*

$$A_n = \pi n I + o(1), \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

Асимптотику (2) можна уточнити. Нехай $\widehat{f}$ — перетворення Фур'є функції $f \in L_1$, тобто

$$\widehat{f}(n) = \int_{-1}^{1} e^{-i\pi n t} f(t)\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для довільного $F \in \mathcal{F}_1$ через Δ_F позначимо множину всіх тих $n \in \mathbb{Z}$, для яких перетин $\mathcal{K}_n \cap F^{-1}(0)$ є одноелементною множиною.

Теорема 2. *Нехай $f \in L_1$, $F = F_f$, $f_1(t) = itf(t)$ і*

$$\alpha_n := (-1)^{n+1}\widehat{f}(n) + \widehat{f_1}(n)\widehat{f}(n), \quad \rho_n := \|\widehat{f_1}(n)\| + \|\widehat{f}(n)\|, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Тоді

$$A_n = \pi n I + \alpha_{-n} + o(\rho_{-n}^2), \qquad \Delta_F \ni n \to \infty. \tag{4}$$

Із теореми 2 випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай $F \in \mathcal{F}_2$ і $\widetilde{A}_n = A_n - \pi n I$, $n \in \Delta_F$. Тоді*

$$\sum_{n \in \Delta_F} \|\widetilde{A}_n\|^2 < \infty.$$

Зауваження 1. У скалярному випадку твердження наслідку 1 — добре відоме [1].

Зауваження 2. Послідовність нулів $(A_n)_{n \in \Delta_F}$ складає лише частину нулів функції F. Однак за властивостями цієї послідовності значною мірою можна судити і про властивості функції F.

Доведення теореми 1 розпочнемо з допоміжних тверджень. Спочатку сформулюємо аналог леми Рімана–Лебега, доведення якого повторює доведення леми в [2, розділ 1, §3].

Лема 1. *Нехай $g \in L_1((-a, a), \mathcal{B})$, $a > 0$. Тоді*

$$\left\| \int_{-a}^{a} e^{i\lambda x} g(x)\,dx \right\| = o\left(e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}\right), \qquad \mathbb{C} \ni \lambda \to \infty.$$

Через $K(\delta)$ позначимо замкнену кулю в $\mathcal{B}$ радіуса $\delta \in (0,1]$ з центром в нулі.

Лема 2. *Нехай* $A, B \in K(\delta)$. *Тоді виконується нерівність*

$$\|A - \sin A - B + \sin B\| < \frac{3\delta}{5}\,\|A - B\|.$$

Доведення. Нехай $A, B \in K(\delta)$. Легко перевірити, що

$$\|A^k - B^k\| \le k\delta\|A - B\|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \ge 2. \tag{5}$$

Розвиваючи синус за формулою Тейлора і враховуючи нерівності (5), отримуємо

$$\|A - \sin A - B + \sin B\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(A^{2k+1} - B^{2k+1})}{(2k+1)!}\right\| <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta\|A - B\|}{(2k)!} < \frac{3\delta}{5}\,\|A - B\|.$$

Лема 3. *Нехай* $f \in L_1$ *і* $A, B \in K(\delta)$. *Тоді існує* $n_\delta \in \mathbb{N}$ *таке, що*

$$\left\|\int_{-1}^{1} e^{i\pi nt} f(t)\Big(\exp(iAt) - \exp(iBt)\Big)\,dt\right\| < \frac{\delta}{5}\,\|A - B\|,\ n \in \mathbb{Z},\ |n| \ge n_\delta.$$

Доведення. Виберемо $m \in \mathbb{N}$, для якого

$$\sum_{k>m}^{\infty} \frac{\|f\|_{L_1}}{(k-1)!} < \frac{\delta}{10}. \tag{6}$$

Позначимо через f_k, $k \in \mathbb{N}$, функції з L_1, які задані формулами

$$f_k(t) = (it)^k f(t), \qquad t \in (-1,1),$$

і зауважимо, що

$$\|\widehat{f}_k(n)\| \le \|f\|_{L_1}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

З леми 1 випливає, що існує $n_\delta \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\|\widehat{f}_k(n)\| < \frac{\delta}{10e}, \quad |n| \ge n_\delta, \quad k \le m. \tag{8}$$

Враховуючи (5), отримуємо

$$\left\|\int_{-1}^{1} e^{i\pi nt} f(t)\Big(\exp(iAt) - \exp(iBt)\Big)\, dt\right\| =$$

$$= \left\|\int_{-1}^{1} e^{i\pi nt} f(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k (A^k - B^k)}{k!}\, dt\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}_k(-n)(A^k - B^k)}{k!}\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\widehat{f}_k(-n)\|}{(k-1)!}\|A - B\|.$$

З огляду на нерівності (6), (7) та (8) при $|n| \ge n_\delta$ маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\widehat{f}_k(-n)\|}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\|\widehat{f}_k(-n)\|}{(k-1)!} + \sum_{k>m}^{\infty} \frac{\|\widehat{f}_k(-n)\|}{(k-1)!} <$$

$$< \frac{\delta}{10e} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k-1)!} + \frac{\delta}{10} < \frac{\delta}{5}.$$

Тому

$$\left\|\int_{-1}^{1} e^{i\pi nt} f(t)\Big(\exp(iAt) - \exp(iBt)\Big)\, dt\right\| < \frac{\delta}{5}\, \|A - B\|.$$

Доведення теореми 1. Зафіксуємо довільне $\delta \in (0, 1]$ і довільне $n \in \mathbb{Z}$ таке, що $|n| \ge n_\delta$, де n_δ — число з леми 3. З огляду на лему 1 можемо також вважати, що

$$\|\widehat{f}(n)\| < \delta/10, \qquad |n| \ge n_\delta. \tag{9}$$

Покажемо, що рівняння

$$F(\pi n I + A) = 0, \quad A \in K(\delta), \tag{10}$$

має єдиний розв'язок. Для цього використаємо принцип стискуючих відображень. З урахуванням (1) рівняння (10) можна записати у вигляді

$$A = \psi(A), \quad A \in K(\delta),$$

де

$$\psi(A) = A - \sin A - (-1)^n \int_{-1}^{1} e^{i\pi nt} f(t) \exp(iAt)\, dt.$$

Переконаємося, що відображення ψ є стиском у кулі $K(\delta)$. З лем 2 та 3 випливає, що для довільних $A, B \in K(\delta)$

$$\|\psi(A) - \psi(B)\| \leq \|A - \sin A - B + \sin B\| +$$

$$+ \left\| \int_{-1}^{1} e^{i\pi nt} f(t) \Big(\exp(iAt) - \exp(iBt) \Big) \, dt \right\| < \frac{4\delta}{5} \|A - B\|. \qquad (11)$$

Крім того (див. (9)),

$$\|\psi(0)\| = \|\widehat{f}(-n)\| < \delta/10.$$

Тому, враховуючи (11), маємо, що

$$\|\psi(A)\| \leq \|\psi(A) - \psi(0)\| + \|\psi(0)\| < 4\delta/5 + \delta/10 \leq 9\delta/10, \quad A \in K(\delta),$$

і, отже, ψ є стиском в $K(\delta)$. На основі принципу стискуючих відображень робимо висновок, що для довільного $\delta \in (0,1]$ і довільного $n \in \mathbb{Z}$, $|n| \geq n_\delta$, існує єдиний розв'язок рівняння (10). З довільності $\delta \in (0,1]$ випливає асимптотика (2). Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Покладемо

$$B_n = A_{-n} + \pi n I, \qquad (-n) \in \Delta_F.$$

Тоді рівність $F(A_{-n}) = 0$ можна записати у вигляді

$$\sin B_n + (-1)^n \int_{-1}^{1} e^{-i\pi nt} f(t) \exp(iB_n t) \, dt = 0.$$

Враховуючи, що

$$\sin B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \exp(iBt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itB)^k}{k!},$$

з попередньої рівності отримаємо, що

$$\Big(I + (-1)^n \widehat{f}_1(n) \Big) B_n = (-1)^{n+1} \widehat{f}(n) + o(1) B_n^2, \quad n \to \infty. \qquad (12)$$

Зі співвідношення (12), зокрема, випливає, що

$$(I + o(1)) \, B_n = (-1)^{n+1} \widehat{f}(n), \quad n \to \infty,$$

і, отже,

$$B_n = (-1)^{n+1} \widehat{f}(n) + o(\|\widehat{f}(n)\|), \quad n \to \infty. \qquad (13)$$

Домножимо зліва обидві частини рівності (12) на $\Big(I - (-1)^n \widehat{f}_1(n)\Big)$. У результаті отримуємо (див. (3)), що

$$B_n = \alpha_n + \widehat{f}_1(n)^2 B_n + o(1)B_n^2, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Звідси, враховуючи (13), отримаємо

$$B_n = \alpha_n + o(\rho_n^2), \quad n \to \infty.$$

Теорему 2 доведено.

[1] *Левин Б., Островский И.* О малых возмущениях множества корней функций типа синуса // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1979. – Т. 43, № 1, – С. 87–110.

[2] *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – К.: Наук. думка, 1977. – 332 с.

[3] *Carlson R.* An inverse problem for the matrix Schrödinger equation // J. Math. Anal. Appl. 267 (2), 2002. – P. 564–575.

[4] *Chelkak D., Korotyaev E.* Parametrization of the isospectral set for the vector-valued Sturm–Liouville problem // J. Funct. Anal. 241, 2006. – P. 359–73.

[5] *Jodeit Jr. M., Levitan B.* Isospectral vector–valued Sturm–Liouville problems // Lett. Math. Phys. 43 (2), 1998. – P. 117–122.

[6] *Levin B.* Lectures on Entire Function // Amer. Math. Soc., 150, 1996.

ASYMPTOTICS OF ZEROS FOR SOME ENTIRE SINE-TYPE FUNCTIONS ACTING IN A BANACH ALGEBRA

Yaroslav MYKYTYUK, Natalya TRUSH

Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

In a Banach algebra $\mathcal{B}$ with unit I we consider the entire function F given by the formula $F(A) = \sin A + \int_{-1}^{1} f(t)\exp(iAt)\,dt$, where $f \in L_1((-1,1),\mathcal{B})$. We study the asymptotics of zeros for entire function F that are close to $\pi n I$, $n \in \mathbb{Z}$.