ІНТЕГРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ НАВАНТАЖЕНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

©2007 р. Оксана МЕДВІДЬ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 14 червня 2007 р.

Досліджено коректність задачі з інтегральними умовами для лінійного рівняння із частинними похідними, навантаженого значеннями невідомої функції та її похідних на скінченній кількості гіперплощин. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

При моделюванні багатьох фізичних процесів виникають крайові задачі для навантажених рівнянь із частинними похідними, тобто рівнянь, які поряд зі значеннями невідомої функції та її похідних в довільній точці області містять також їхні значення на многовидах нижчої розмірності (див. огляд та бібліографію в [13–15]).

У працях [1, 3, 4, 6] досліджено питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, навантажених значеннями невідомої функції на скінченній кількості гладких гіперповерхонь. В працях [8–11] розглянуто питання про коректну розв'язність нелокальних крайових задач для навантажених диференціальних рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь. У працях [2, 5] при дослідженні задачі Діріхле та задач з багатоточковими умовами для навантажених еволюційних рівнянь у необмежених областях встановлено класи коректної розв'язності у класах функцій степеневого зростання на нескінченності (за просторовими змінними). Зауважимо, що деякі нелокальні задачі

УДК 517.95+511.2; MSC 2000: 11K60, 35A05, 35B10, 35B30, 42B05
Робота виконана при фінансовій підтримці ДФФД України (проект № 14.1/017)

для рівнянь із частинними похідними зводяться до задач з простішими нелокальними умовами для навантажених рівнянь із частинними похідними, це показано у [17, с. 165–166].

У пропонованій роботі досліджено задачу з нелокальними інтегральними умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за змінними $x_1, \dots, x_p$ для лінійного рівняння із частинними похідними, навантаженого значеннями невідомої функції та її похідних за $x_1, \dots, x_p$ на скінченній кількості гіперплощин $t = \tau_j$, $j = 1, \dots, m$. Розв'язність цієї задачі пов'язана із проблемою малих знаменників. Для оцінки знизу малих знаменників використано метричний підхід [16, 17] та результати праці [12], в якій було досліджено інтегральну задачу для рівняння із частинними похідними (без навантаження).

1. Нижче використовуємо такі позначення: Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega_p$; $D_x = (-i\partial/\partial x_1, \dots, -i\partial/\partial x_p)$; $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$; $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$; $(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$; C_n^m — кількість комбінацій з n елементів по m; $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$; $\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^p} A$ — міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ вимірної множини $A \subset \mathbb{C}^n$; $\Pi^p(\rho) = \{\vec{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \max\limits_{1 \le j \le n} |z_j| \le \rho\}$; $W^\gamma_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \gamma > 0)$ — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k \exp(ik, x)$ за нормою

$$\|\varphi(x); W^\gamma_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{|k| \ge 0} |\varphi_k|^2 w_k^2(\alpha, \beta, \gamma)},\ w_k(\alpha, \beta, \gamma) = (1 + |k|)^\alpha \exp(\beta |k|^\gamma);$$

$C^n([0,T]; W^\gamma_{\alpha,\beta})$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $0 \le j \le n$, належать до простору $W^\gamma_{\alpha,\beta}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$. Норму в просторі $C^n([0,T]; W^\gamma_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; W^\gamma_{\alpha,\beta})\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} \left\| \partial^j u(t,x)/\partial t^j; W^\gamma_{\alpha,\beta} \right\|.$$

2. В області Q_p^T розглянемо задачу

$$\begin{gathered} L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D_x) \frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = \\ = F(t,x) + \textstyle\sum_{j=1}^m B_j(D_x) u(\tau_j, x), \end{gathered} \tag{1}$$

$$\int_0^{t_1} t^{j-1}u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega_p, \quad j = \overline{1,n}, \quad 0 < t_1 \leq T, \tag{2}$$

де $A_j(\xi)$ — многочлени вигляду

$$\sum_{|s|\leq N_j} A_j^s \xi_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot \xi_p^{s_p},\ s \in \mathbb{Z}_+^p,\ N_j \in \mathbb{N},\ |s| = s_1 + \ldots + s_p,\ j = \overline{0, n-1}, \tag{3}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$, $A_j^s \in \mathbb{C}$, $B_1(\xi), \ldots, B_m(\xi)$ — многочлени степеня не більшого, ніж $M = \max\limits_{0\leq j\leq n-1}\{N_j\} - 1$, $0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_m \leq T$.

Означення. *Задачу* (1), (2) *називаємо* $(\alpha_0, \beta_0; \alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \gamma)$*−коректною (де* $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$*), якщо для довільних функцій* $F \in C([0,T]; W^\gamma_{\alpha_1,\beta_1})$, $\varphi_j \in W^\gamma_{\alpha_2,\beta_2}$, $j = \overline{1,n}$, *існує єдиний розв'язок* $u(t,x)$ *задачі* (1), (2) *з простору* $C^n([0,T]; W^\gamma_{\alpha_0,\beta_0})$ *такий, що*

$$\begin{aligned} &\left\|u(t,x); C^n([0,T]; W^\gamma_{\alpha_0,\beta_0})\right\| \leq \\ &\leq C_1\big(\|F(t,x); C([0,T], W^\gamma_{\alpha_1,\beta_1})\| + \sum_{j=1}^n \left\|\varphi_j(x); W^\gamma_{\alpha_2,\beta_2}\right\|\big), \end{aligned} \tag{4}$$

де стала $C_1 > 0$ *не залежить від вибору функцій* $F \in C([0,T]; W^\gamma_{\alpha_1,\beta_1})$ *та* $\varphi_j \in W^\gamma_{\alpha_2,\beta_2}$, $j = \overline{1,n}$.

3. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) e^{(ik,x)}. \tag{5}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком інтегральної задачі для навантаженого звичайного диференціального рівняння

$$L\left(d/dt, k\right) u_k(t) = F_k(t) + \sum_{j=1}^m B_j(k) u_k(\tau_j), \tag{6}$$

$$\int_0^{t_1} t^{j-1} u_k(t) dt = \varphi_{jk}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Через $f_1(t,k), \ldots, f_n(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, позначимо розв'язки таких задач Коші:

$$L\left(\frac{d}{dt}, k\right) f_q(t) = 0, \quad f_q^{(j-1)}(0,k) = \delta_{jq}, \quad j,q = \overline{1,n},$$

де δ_{jq}, $j,q = \overline{1,n}$, — символ Кронекера. Нехай

$$\Delta(k) = \det\left\|\int_0^{t_1} t^{j-1} f_q(t,k)dt\right\|_{j,q=1}^n, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{8}$$

$$\Upsilon(k) = \det \|\delta_{rs} - B_r(k)\Phi_k(1)[\tau_s]\|_{r,s=1}^m\,, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{9}$$

де $\Phi_k : C[0,T] \to C^n[0,T]$ — лінійний оператор, дія якого на функцію $g(t)$ задається формулою:

$$\Phi_k(g)[t] = -\sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} f_q(t,k) \int_0^{t_1} \left[t^{j-1} \int_0^t f_n(t-\tau,k) g(\tau) d\tau \right] dt +$$

$$+ \int_0^t f_n(t-\tau,k) g(\tau) d\tau, \tag{10}$$

а $\Delta_{jq}(k)$ — алгебричне доповнення елемента $\int_0^{t_1} t^{j-1} f_q(t,k)dt$, $j,q = \overline{1,n}$, у визначнику $\Delta(k)$.

Лема 1. *Якщо $\Delta(k) \neq 0$ і $\Upsilon(k) \neq 0$, то задача (6), (7) має єдиний розв'язок $u_k(t) \in C^n[0,T]$; цей розв'язок зображається рівністю*

$$u_k(t) = v_k(t) + \Phi_k(1)[t] \sum_{r,s=1}^{m} B_r(k) \frac{\Upsilon_{sr}(k)}{\Upsilon(k)} v_k(\tau_s), \tag{11}$$

де

$$v_k(t) = \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} f_q(t,k) \varphi_{jk} + \Phi_k(F_k)[t], \tag{12}$$

а $\Upsilon_{rs}(k)$ — алгебричне доповнення елемента $\delta_{rs} - B_r(k)\Phi_k(1)[\tau_s]$, $r,s = \overline{1,m}$, у визначнику $\Upsilon(k)$.

Доведення. Використовуючи метод варіації сталих, для розв'язку $u_k(t) \in C^n[0,T]$ навантаженого рівняння (6) отримаємо зображення

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{kq} f_q(t,k) + \int_0^t \left(F_k(\tau) + \sum_{r=1}^{m} B_r(k) u_k(\tau_r) \right) f_n(t-\tau,k) d\tau. \tag{13}$$

З умов (7) випливає, що сталі C_{kq}, $q = \overline{1,n}$, у формулі (13) є розв'язками такої лінійної системи алгебричних рівнянь

$$\begin{gathered} \sum_{q=1}^{n} C_{kq} \int_0^{t_1} t^{j-1} f_q(t,k) dt = \varphi_{jk} - \int_0^{t_1} \left\{ t^{j-1} \int_0^t (F_k(\tau) + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{m} B_r(k) u_k(\tau_r) \right) f_n(t-\tau,k) d\tau \Bigg\} dt, \quad j = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{14}$$

Визначник системи (14) співпадає з визначником $\Delta(k)$, і, згідно з умовою леми, є відмінним від нуля. Тому ця система має єдиний розв'язок

$(C_{1j},\dots,C_{kn})$, якими не були праві частини рівностей в (13). Застосовуючи правило Крамера для знаходження сталих C_{kq}, $q=\overline{1,n}$, дістанемо

$$C_{kq}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)}\left(\varphi_{jk}-\int_0^{t_1}\left\{t^{j-1}\int_0^t(F_k(\tau)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{r=1}^{m}B_r(k)u_k(\tau_r)\right)f_n(t-\tau,k)d\tau\right\}dt\Bigg),\quad q=\overline{1,n}.$$

Підставляючи отримані вирази для C_{kq}, $q=\overline{1,n}$, у формулу (13), одержимо наступне зображення

$$u_k(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)}f_q(t,k)\varphi_{jk}+\Phi_k(F_k)[t]+\Phi_k(1)[t]\sum_{r=1}^{m}B_r(k)u_k(\tau_r).\quad (15)$$

Покладемо послідовно у рівності (15) $t=\tau_s$, $s=\overline{1,m}$. Для знаходження $u_k(\tau_s)$, $s=\overline{1,m}$, отримаємо лінійну систему рівнянь

$$\sum_{r=1}^{m}(\delta_{rs}-\Phi_k(1)[\tau_s]B_r(k))u_k(\tau_r)=v_k(\tau_s),\quad s=\overline{1,m}.\quad (16)$$

Оскільки за умовою леми $\Upsilon(k)\neq 0$, то система (16) має єдиний розв'язок. Тому, застосовуючи для знаходження розв'язку $(u_k(\tau_1),\dots,u_k(\tau_m))$ системи (16) правило Крамера, знаходимо, що

$$u_k(\tau_r)=\sum_{s=1}^{m}\frac{\Upsilon_{sr}(k)}{\Upsilon(k)}v_k(\tau_s),\quad r=\overline{1,m}.$$

Звідси, на підставі формули (15), для розв'язку задачі (6), (7) отримуємо зображення (11). Єдиність цього розв'язку випливає з однозначної розв'язності лінійних систем (14), (16).

Теорема 1. *Якщо виконується умова*

$$\forall k\in\mathbb{Z}^p\quad \Delta(k)\neq 0,\quad \Upsilon(k)\neq 0,\quad (17)$$

то задача (1), (2) *не може мати двох різних розв'язків в просторі* $C^n([0,T];W^{\gamma}_{\alpha,\beta})$.

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 5.3 у [16] і випливає з леми 1 та теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур'є.

4. Надалі вважаємо, що умови (17) виконуються, тоді на підставі формул (5) та (11) одержуємо формальне зображення розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geq 0} e^{(ik,x)}\left(v_k(t)+\Phi_k(1)[t]\sum_{r,s=1}^{m} B_r(k)\frac{\Upsilon_{sr}(k)}{\Upsilon(k)}v_k(\tau_s)\right). \qquad (18)$$

Збіжність ряду (18) пов'язана зі швидкістю наближення нуля значеннями величин $\Delta(k)$, $\Upsilon(k)$, які входять знаменниками у рівності (11), (12).

Нехай $\lambda_1(k),\dots,\lambda_{m(k)}(k)$, $m(k)\leq n$, — різні корені рівняння $L(\lambda,k)=0$, $k\in\mathbb{Z}^p$, кратностей $n_1(k),\dots,n_{m(k)}(k)$ відповідно. Позначимо: $\gamma_0=\max\limits_{0\leq j\leq n-1}\{N_j/(n-j)\}$. Відомо [18], що скінченними є числа

$$\Lambda=\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{1\leq j\leq m(k)}\left\{\frac{|\lambda_j(k)|}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\},\quad \Lambda_1=\max\left\{0;\sup_{k\in\mathbb{Z}^p}\max_{1\leq j\leq m(k)}\frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\},$$

$$\Lambda_2=-\min\left\{0;\inf_{k\in\mathbb{Z}^p}\min_{1\leq j\leq m(k)}\frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\}.$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (17) *і нехай існують такі сталі* ω_1, ω_2, δ_1, $\delta_2\in\mathbb{R}$, *що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$|\Delta(k)|\geq(1+|k|)^{-\omega_1}\exp(-\delta_1|k|_0^{\gamma}), \qquad (19)$$

$$|\Upsilon(k)|\geq(1+|k|)^{-\omega_2}\exp(-\delta_2|k|_0^{\gamma}). \qquad (20)$$

Якщо

$$\alpha_1=\alpha_0+(m+1)\omega_1+\omega_2+\frac{(m+1)(n^2+n+2)+2n}{2}\gamma_0+mM,$$

$$\beta_1=\beta_0+(m+1)\delta_1+\delta_2+(n+1)(m+1)\Lambda_1 T,$$

$$\alpha_2=\alpha_0+(m+1)\omega_1+\omega_2+\frac{(m+1)(n^2+n+2)+2n-2}{2}\gamma_0+mM,$$

$$\beta_2=\beta_0+(m+1)\delta_1+\delta_2+((n+1)(m+1)-1)\Lambda_1 T,$$

то задача (1), (2) *є* $(\alpha_0,\beta_0;\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2;\gamma_0)$*−коректною.*

Доведення. Для функцій $f_1(t,k),\dots,f_n(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, та їхніх похідних справедливі зображення

$$f_q^{(j-1)}(t,k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_k}\frac{\lambda^{j-1}S_q(\lambda,k)\exp(\lambda t)}{L(\lambda,k)}d\lambda,\quad q=\overline{1,n},\quad j\geq 1, \qquad (21)$$

де $S_q(\lambda,k) = \lambda^{n-q} + A_{n-1}(k)\lambda^{n-q} + \dots + A_q(k)$, $q = \overline{1, n-1}$, $S_n(\lambda,k) = 1$, Γ_k — межа області $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \Lambda(1+|k|^\gamma)+1, -\Lambda_2(1+|k|^\gamma) - 1 < \mathrm{Re}\lambda < \Lambda_1(1+|k|^\gamma)+1\}$, орієнтована напрямком обходу контура проти годинникової стрілки. Оскільки відстань від контура Γ_k до коренів $\lambda_1(k),\dots,\lambda_{m(k)}(k)$ не менша від 1, то

$$|L(\lambda,k)|_{|\lambda\in\Gamma_k} = |(\lambda-\lambda_1(k))\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_{m(k)}(k))|_{|\lambda\in\Gamma_k} \geq 1.$$

Крім того, на контурі Γ_k виконуються нерівності

$$\begin{gathered} |S_q(\lambda,k)|_{|\lambda\in\Gamma_k} \leq C_2(1+|k|)^{\gamma_0(n-q)}, \quad q=\overline{1,n}, \\ |\exp(\lambda t)|_{|\lambda\in\Gamma_k} \leq \exp((\Lambda_1(1+|k|^{\gamma_0})+1)T). \end{gathered} \tag{22}$$

Враховуючи, що довжина контура Γ_k не перевищує $2\pi(\Lambda(1+|k|^{\gamma_0})+1)$, із формул (21) та оцінок (22) дістанемо оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}\left|f_q^{(j-1)}(t,k)\right| \leq C_3(1+|k|)^{\gamma_0(n+j-q)}\exp(\Lambda_1 T|k|^{\gamma_0}), \quad j,q=\overline{1,n}. \tag{23}$$

Тому для довільної неперервної на $[0,T]$ функції $g(t)$ в кожній точці $t\in[0,T]$ виконується нерівність:

$$\begin{gathered} \left|\frac{d^r}{dt^r}\int_0^t g(\tau)f_n(t-\tau,k)d\tau\right| \leq C_4(1+|k|)^{(r+1)\gamma_0}\exp(\Lambda_1 T|k|^{\gamma_0})\bar{g}+ \\ +\delta_{rn}|g(t)|, \quad r=\overline{0,n}, \end{gathered} \tag{24}$$

де $\bar{g} = \left(\int_0^T |g(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}$. Із формул (23) випливає, що

$$\begin{gathered} |\Delta_{jq}(k)| \leq C_5(1+|k|)^{\gamma_0((n-2)(n+1)/2+q)}\exp((n-1)\Lambda_1 T|k|^{\gamma_0}), \\ j,q=\overline{1,n}. \end{gathered} \tag{25}$$

Тому з нерівностей (19)–(25) дістаємо, що виконуються такі оцінки

$$\begin{gathered} \left|\frac{d^r\Phi_k(g)[t]}{dt^r}\right| \leq C_6\bar{g}\times \\ \times w_k\left(\omega_1+(n^2+n+2r+2)\gamma_0/2, \delta_1+(n+1)\Lambda_1 T, \gamma_0\right), \quad r=\overline{0,n}, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} |\Upsilon_{rs}| \leq C_7 w_k^{m-1}\big(\omega_1+M+(n^2+n+2)\gamma_0/2, \delta_1+(n+1)\Lambda_1 T, \gamma_0\big), \\ r,s=\overline{1,m}. \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} |v_k^{(r)}(t)| \leq C_8\Bigg(\sum_{j=1}^n |\varphi_{jk}|w_k\big(\omega_1+(n^2+n+2r)\gamma_0/2, \delta_1+n\Lambda_1 T, \gamma_0\big)+ \\ +|\bar{F}|w_k\left(\omega_1+(n^2+n+2r+2)\gamma_0/2, \delta_1+(n+1)\Lambda_1 T, \gamma_0\right)\Bigg). \end{gathered} \tag{28}$$

Із оцінок (23)–(28) отримаємо

$$\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(q)}(t)|\le C_9\Bigg(|\bar{F}_k|w_k(\alpha_1-\alpha_0,\beta_1-\beta_0,\gamma_0)+ + \sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|w_k(\alpha_2-\alpha_0,\beta_2-\beta_0,\gamma_0)\Bigg),\quad q=\overline{0,n}. \tag{29}$$

З нерівностей (29) випливає, що

$$\big\|u(t,x);C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})\big\|\le \le C_{10}\Bigg(\|F(t,x);C([0,T],W^{\gamma_0}_{\alpha_1,\beta_1})\|+\sum_{j=1}^{n}\big\|\varphi_j(x);W^{\gamma_0}_{\alpha_2,\beta_2}\big\|\Bigg),$$

тобто ряд $u(t,x)$ належить до простору $C^n([0,T];W^{\gamma_0}_{\alpha_0,\beta_0})$ і для нього виконується нерівність (4). Теорему доведено.

5. Дослідимо питання про можливість виконання нерівностей (19), (20). Для цього нам знадобляться допоміжні твердження про оцінки мір виняткових множин гладких функцій.

Нехай $f(t)$ — квазімногочлен вигляду

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m}p_j(t)\exp(\mu_j t),\ \mu_j\ne\mu_q,\ j\ne q, \tag{30}$$

де $p_j(t)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами, степенів n_j-1, $j=\overline{1,m}$, відповідно. Для квазімногочлена $f(t)$ будемо позначати: $n=n_1+\ldots+n_m$, $B_f=1+\max\limits_{1\le j\le m}|\mu_j|$, $M_f=\min\limits_{1\le j\le m}\operatorname{Re}\mu_j$, $\psi_f=\max\limits_{t\in[0,T]}\exp(-M_f t)$, $G_f(t)=\max\limits_{1\le j\le n}\big\{|f^{(j-1)}(t)|B(k)^{-j}\big\}$.

Лема 2. *Існують такі сталі $C_{11},C_{12}>0$ (які залежать тільки від n,T), що для довільного квазімногочлена $f(t)$ вигляду (30), довільного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0=\frac{C_{10}G_f(0)}{4\psi_Q B_f^{n-1}}$, виконується нерівність*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{t\in[0,T]:|f(t)|\le\varepsilon\}\le C_{12}B_f 2\Big(\frac{2\varepsilon\psi_f}{C_{11}G_f(0)}\Big)^{1/(n-1)}.$$

Лема 3. *Якщо для деяких комплексних чисел a_j, $j=\overline{1,r}$ і для всіх $t\in[0,T]$ виконується нерівність*

$$|f^{(r)}(t)+a_1f^{(r-1)}(t)+\ldots+a_rf(t)|\ge\delta,\quad \delta>0,$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \delta/(2(r+1)A^r)$, $A = 1 + \max\limits_{1\le j\le r} |a_j|^{1/j}$,

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in [0,T] : |f(t)| \le \varepsilon\} \le C_{13}\, B_f (\varepsilon/\delta)^{1/r},$$

де $C_{13} = C_{13}(m, r, b-a) > 0$.

Лема 4. *Нехай* $\Pi^p(\rho) = \{\vec{z} = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p : \max\limits_{1\le j\le p} |z_p| \le \rho\}$, $\rho > 0$,

$$P_m(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \sum_{j=1}^{p} a_j \xi_j^m + Q_{m-1}(\xi_1, \ldots, \xi_p), \quad a_j \in \mathbb{Z},$$

$Q_{m-1}(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ — *многочлен порядку* $(m-1)$ *за кожною із змінних* ξ_j, $j = \overline{1,p}$. *Якщо* $\max\limits_{1\le j\le p} |a_j| \ge \delta$, *то для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконується нерівність*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^p}\{\vec{\xi} \in \Pi^p(\rho) : |P_m(\xi_1, \ldots, \xi_p)| \le \varepsilon\} \le C_{14}\, (\varepsilon/\delta)^{2/m}.$$

Лема 5. [12] *Для визначника* $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *виконуються такі рівності:*

$$\frac{\partial^q \Delta(k)}{\partial t_1^q}\Big|_{t_1=0} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad 0 \le q < n^2, \\ C_{15}, & \text{якщо} \quad q = n^2, \end{cases}$$

де $C_{15} = (n^2)! \prod\limits_{q=1}^{n-1} (q!)^2 / \prod\limits_{q=n}^{2n-1} (q!) \in \mathbb{N}$.

Лема 6. [12] *Визначник* $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *є квазімногочленом вигляду*

$$\Delta(k) = \sum_{q=1}^{R} p_q(t_1, k) \exp(\Lambda_q(k) t_1),$$

де $R \le 2^n$, $\Lambda_j(k) \ne \Lambda_q(k), j \ne q$, *а для дійсних частин показників експонент виконуються нерівності:* $\operatorname{Re}\Lambda_q(k) \ge -n\Lambda_2(1 + |k|^\gamma)$, $q = \overline{1,R}$. *Порядок* $n_\Delta(k) \equiv \sum\limits_{q=1}^{R} (\deg p_q(t_1, k) + 1)$ *квазімногочлена* $\Delta(k, t_1)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *не перевищує числа*

$$\prod_{j=1}^{m(k)} (n_j(k) + 1)\Big(2 + C_n^2 + \sum_{j=1}^{m(k)} n_j(k)(n_j(k) - 1)/2\Big).$$

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (0, T]$ *нерівність* (19) *виконується, якщо* $\omega_1 > \gamma_0(n^2+1) + (p+\gamma_0)(\xi_1 - 1)$,

$\delta_1 \geq n\Lambda_2 T$, $\gamma \geq \gamma_0$, де

$$\xi_1 = \sup_{k\in\mathbb{Z}^p} \prod_{j=1}^{m(k)} (n_j(k)+1)\Big(2 + C_n^2 + \sum_{j=1}^{m(k)} n_j(k)(n_j(k)-1)/2\Big).$$

Доведення. Через $A^{\gamma}_{\omega_1,\delta_1}(k)$ позначимо множину тих $t_1 \in (0,T]$, для яких нерівність

$$|\Delta(k)| \leq (1+|k|)^{-\omega_1}\exp(-\delta_1|k|^{\gamma}) \tag{31}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$. З леми 2 на основі тверджень лем 5, 6 випливає, що для $\omega_1 > \gamma_0(n^2+1)+(p+\gamma_0)(\xi_1-1)$, $\delta_1 \geq n\Lambda_2 T$, $\gamma \geq \gamma_0$

$$\begin{gathered} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} A^{\gamma}_{\omega_1,\delta_1}(k) \leq C_{16}(1+|k|)^{\gamma_0}\times \\ \times\big((1+|k|)^{\gamma_0(n^2+1)-\omega_1}\exp((n\Lambda_2 T-\delta_1)|k|^{\gamma_0})\big)^{1/(n_{\Delta(k)}-1)} \leq \\ \leq C_{16}\big(1+|k|\big)^{(\gamma_0(n^2+1)-\omega_1)/(\xi_1-1)+\gamma_0} = C_{16}(1+|k|)^{-p-\varepsilon}, \quad k\in\mathbb{Z}^p, \end{gathered} \tag{32}$$

де $n_{\Delta(k)}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — порядок квазімногочлена $\Delta(k)$, $\varepsilon = \omega_1 - \gamma_0(n^2+1) - (\xi_1-1)(p+\gamma_0) > 0$. З нерівностей (32) та з леми Бореля-Кантеллі випливає твердження теореми 3.

Через $s_j, j=\overline{1,p}$, позначимо мультиіндекс $(\underbrace{0,\ldots,0,N_0,}_{j}0,\ldots,0)$, покладемо також $\vec{\tau} = \operatorname{col}(\tau_1,\ldots,\tau_m)$

Теорема 4. *Нехай існує така стала μ, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються нерівності*

$$|A_0(k)| > (1+|k|)^{-\mu}. \tag{33}$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$) векторів $\vec{\tau}$ нерівність (20) виконується, якщо $\omega_2 > mnp+\mu$, $\delta_2 \geq 0$, $\gamma \geq \gamma_0$.

Доведення. Легко перевірити, що $\Upsilon(k) = 1 - \sum\limits_{r=1}^{m} B_r(k)\Phi_k(1)[\tau_r]$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Із формул (10) випливає справедливість рівностей

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\tau_j},k\right)\Upsilon_{j-1}(k) = \Upsilon_j(k), \quad j=\overline{1,m}, \tag{34}$$

де $\Upsilon_0(k) = \Upsilon(k)$,

$$\Upsilon_j(k) = A_0^j(k)\left(1 - \sum_{r=j+1}^{m} B_r(k)\Phi_k(1)[\tau_r]\right) - A_0^{j-1}(k)\sum_{r=1}^{j} B_r(k),$$

$j=\overline{1,m-1}$, $\Upsilon_m(k)=A_0^m(k)-A_0^{m-1}(k)\sum\limits_{r=1}^{m}B_r(k)$.

Для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ розглянемо множини:

$$B(k)=\{\vec{T}\in[0,T]^m:|\Upsilon(k)|\le\nu_0\},$$

$$B_j(k)=\{\vec{\tau}\in[0,T]^m:|\Upsilon_{j-1}(k)|\le\nu_{j-1},\ |\Upsilon_j(k)|>\nu_j\},\quad j=\overline{1,m},$$

де $\nu_j=(1+|k|)^{-\rho_j}|A_0(k)|^m$, $\rho_j=(m-j)np+\varepsilon_j$, $j=\overline{1,m}$, а ε_j, $j=\overline{1,m}$, — такі додатні числа, що $\varepsilon_0>\varepsilon_1>\ldots>\varepsilon_m$, $\varepsilon_0=\omega_2+m\mu$.

Якщо $\vec{Y}\in B_j(k)$, $j=\overline{1,m}$, то з формул (34) випливає, що

$$|L(\partial/\partial\tau_j,k)\Upsilon_{j-1}(k)|\ge\nu_j. \tag{35}$$

Із структури функцій $\Upsilon_j(k)$, $j=\overline{0,m-1}$, формул (35) та леми 3 отримаємо

$$\begin{gathered}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}B_j(k,\tau_1,\ldots,\tau_{j-1},\tau_{j+1},\ldots,\tau_m)\le C_{17}(\nu_{j-1}/\nu_j)^{1/n}\le\\ \le C_{18}(1+|k|)^{-p-\varepsilon},\ j=\overline{1,m},\ k\in\mathbb{Z}^p,\end{gathered} \tag{36}$$

де $\varepsilon=\min\limits_{1\le j\le m}(\varepsilon_{j-1}-\varepsilon_j)/n>0$, а

$$\begin{gathered}B_j(k,\tau_1,\ldots,\tau_{j-1},\tau_{j+1},\ldots,\tau_m)=\\ =\{\tau_j\in[0,T]:(\tau_1,\ldots,\tau_{j-1},\tau_j,\tau_{j+1},\ldots,\tau_m)\in B_j(k)\},\end{gathered}$$

де $j=\overline{1,m}$. Інтегруючи оцінки (36) у кубі $[0,T]^{m-1}$, дістаємо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^m}B_j(k)\le C_{19}(1+|k|)^{-p-\varepsilon},\ j=\overline{1,m},\ k\in\mathbb{Z}^p. \tag{37}$$

З умови теореми випливає, що виконується нерівність $|\Upsilon_m(k)|>|k|^{-m\mu}$ для всіх (крім скінченної кількості) достатньо великих векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, $|k|>K$. Тому $B(k)=\bigcup\limits_{j=1}^{m}B_j(k)$ для достатньо великих $|k|>K$. Тоді з нерівностей (37) випливає збіжність ряду $\sum\limits_{|k|\ge0}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^m}B(k)$, а, отже, за лемою Бореля-Кантеллі, міра Лебега в $\mathbb{R}^m$ множини тих векторів $\vec{\tau}$, які належать до нескінченної кількості множин $B(k)$, дорівнює нулеві.

Теорему доведено.

Теорема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^p$) векторів $\vec{X}=\mathrm{col}(A_0^{s_1},\ldots,A_0^{s_p})$ нерівність (33) виконується, якщо $\mu>p/2-N_0$.*

Доведення. Оскільки $A_0(k)$ — многочлен від $A_0^{s_j}$, $j=\overline{1,p}$, то його можна записати у вигляді

$$A_0(k)=\sum_{j=1}^{p}k_j^{N_0}A_0^{s_j}+Q_0(k,A_0^{s_1},\ldots,A_0^{s_p}), \tag{38}$$

де $Q_0(k, A_0^{s_1}, \dots, A_0^{s_p})$ — многочлен нульового порядку від змінних $A_0^{s_j}$, $j = \overline{1, p}$. Розглянемо такі множини для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$

$$E(k) = \{\vec{X} = \mathrm{col}(A_0^{s_1}, \dots, A_0^{s_p}) \in \mathbb{C}^p : |A_0(k)| \le |k|^{\mu}\}.$$

$$E_\rho(k) = \{\vec{X} = \mathrm{col}(A_0^{s_1}, \dots, A_0^{s_p}) \in \Pi^p(\rho) : |A_0(k)| \le |k|^{\mu}\}.$$

Враховуючи, що $\max\limits_{1 \le j \le p} |k_j|^{N_0} \ge \left(\frac{|k|}{p}\right)^{N_0}$ для довільного $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, з леми 4 отримаємо, що для $\mu > p/2 - N_0$ виконується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^p} E_\rho(k) \le C_{20}(1 + |k|)^{-2(\mu + N_0)} \le C_{21}(1 + |k|)^{-p-\varepsilon}, \tag{39}$$

а, отже, і збіжність ряду $\sum\limits_{|k| \ge 0} \mathrm{mes}_{\mathbb{C}^p} E_\rho(k)$. Звідси, за лемою Бореля–Кантеллі, міра Лебега в $\mathbb{C}^p$ множини тих векторів $\vec{X}$, які належать до нескінченної кількості множин $E_\rho(k)$, дорівнює нулеві. Множину $E(k)$ можна представити як зліченне об'єднання множин $E_\rho(k)$, а, отже, й міра Лебега в $\mathbb{C}^p$ множини тих векторів $\vec{X}$, які належать до нескінченної кількості множин $E(k)$, дорівнює нулеві.

Теорему доведено.

[1] *Борок В.М.* О единственности решения задачи Коши для систем линейных нагруженных уравнений // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 108–109.

[2] *Борок В.М., Евдокимова С.В.* Регулярные граничные задачи в полосе // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1989. – Вып. 51. – С. 31–37.

[3] *Борок В.М., Житомирский Я.И.* Задача Коши для нагруженных линейных дифференциальных уравнений. I. Единственность. // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 9. – С. 6–12.

[4] *Борок В.М., Житомирский Я.И.* Задача Коши для уравнений с нагрузками на поверхностях // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 4. – С. 424–429.

[5] *Гадецкая С.В.* Корректные многоточечные задачи в полосе для дифференциальных уравнений с нагрузками // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 3. – С. 79–82.

[6] *Гадецкая С.В.* Параболический эффект в задаче Коши для уравнения с нагрузками // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. Прикладная математика и механика. – 1992. – № 361. – С. 71–79.

[7] *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.

[8] *Дженалиев М.Т.* Докл. НАН Республики Казахстан. – 1993. – № 3. – С. 8–14.

[9] *Дженалиев М.Т.* О нелокальных граничных задачах для дифференциально-операторных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 11. – С. 1901–1905.

[10] *Дженалиев М.Т.* О разрешимости граничных задач для нагруженных уравнений // Математический журнал, Алматы. – **1**. – № 1. – С.21–29.

[11] *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сиб. мат. журн. – 2006. – **47**. – № 3. – С.527 – 547.

[12] *Медвідь О.М., Симотюк М.М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–141.

[13] *Нахушев А.М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения. – 1979. – **15**, № 1. – С. 96–105.

[14] *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 1. – С. 86-94.

[15] *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложение к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С. 72–81.

[16] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[17] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[18] *Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С.* Збірник задач з вищої алгебри. – К.: Вища школа, 1971. – 316 с.

THE INTEGRAL PROBLEM FOR LOADED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Oksana MEDVID

Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

The correctness of the integral problem for loaded partial differential equations is investigated. The conditions of uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of an estimations of small denominators of the problem are proved.