# ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ЛЕЖАНДРА

©2007 р. Віра ЛОЗИНСЬКА

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 19 квітня 2007 р.

Описано властивості функціонального числення для диференціальних операторів Лежандра, які є генераторами сильно неперервних груп обмежених лінійних операторів.

У роботі показано, що функціональне числення, побудоване в [1] для генераторів сильно неперервних груп обмежених лінійних операторів, що діють над довільним банаховим простором, існує і над просторами кореневих векторів диференціальних операторів Лежандра, які діють над гільбертовим простором $L_2(\Omega)$, $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$, з нормою $\|u\| = \sqrt{\int_\Omega |u(t)|^2\, dt}, u \in L_2(\Omega)$.

Нехай $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — така нескінченно-диференційовна функція на відрізку $\overline{\Omega} = [a,b]$, що $p(t) > 0$ для $t \in \Omega$ і

$$0 < C_a = \lim_{t\downarrow a} \frac{p(t)}{t-a} < \infty, \qquad 0 < C_b = \lim_{t\uparrow b} \frac{p(t)}{b-t} < \infty.$$

Для фіксованих $m \in \mathbb{N}$ та $k \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$ розглянемо в просторі $L_2(\Omega)$ оператор

$$Au := (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\Big(p^k(t)\frac{d^m u}{dt^m}\Big)$$

з областю визначення $\mathcal{D}(A) := C^\infty(\overline{\Omega})$, якщо $k \in \{m, m+1, \dots, 2m-1\}$, та $\mathcal{D}(A) := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid u^{(l)}(a) = u^{(l)}(b) = 0,\ l \in \{0, \dots, m-k-1\}\}$, якщо $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

УДК 517.982.4; MSC 2000: 47A60

Оператор $A$ суттєво самоспряжений в просторі $L_2(\Omega)$. Його замикання (для якого зберігаємо позначення $A$) є оператором з дискретним спектром $\sigma(A) = \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, власні значення якого невід'ємні. Оператор $A$ називають (узагальненим) диференціальним оператором Лежандра (детальніше про означення та властивості оператора $A$ див. у [5]).

Щоб визначити символи функціонального числення, розглянемо при фіксованих $m \in \mathbb{Z}_+$, $a > 0$ банаховий простір $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ вимірних функцій $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{C}$ з нормою

$$\|\varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |t^m \omega(at)\varphi(t)| dt < \infty,$$

де $\omega(t)$ — ціла трансцендентна функція нульового роду, корені якої лежать на уявній додатній півосі, такого вигляду

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \omega(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{t}{it_k}\Big) \in \mathbb{C}, \ \ 0 < t_1 \leq t_2 \leq \ldots, \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty.$$

Для кожного $\nu > 0$ розглянемо в $L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})$ підпростір

$$E_\nu^{(m,a)} := \Big\{\varphi \in L_1^{(m,a)}(\mathbb{R}) \Big| \ \|\varphi\|_{E_\nu^{(m,a)}} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|D^k \varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathbb{R})}}{\nu^k} < \infty\Big\}.$$

Простори $E_\nu^{(m,a)}$ є банаховими та складаються з цілих функцій експоненціального типу [2].

Розглянемо об'єднання просторів $E_\nu^{(m,a)}$ з топологією індуктивної границі

$$E^{(m,a)} := \bigcup\nolimits_\nu E_\nu^{(m,a)} = \lim_{\nu \to +\infty} \operatorname{ind} \ E_\nu^{(m,a)}$$

відносно неперервних вкладень $E_\nu^{(m,a)} \subset E_\mu^{(m,a)}$, де $\nu \leq \mu$. Простір $E^{(m,a)}$ належить до області визначення оператора диференціювання $D$ та є інваріантним відносно його дії.

Розглянемо перетин просторів $E^{(m,a)}$ з топологією проективної границі

$$E := \bigcap\nolimits_{m,a} E^{(m,a)} = \lim_{m,a} \operatorname{pr} \ E^{(m,a)},$$

впорядкувавши $m, a$ так, щоб вкладення $E^{(m+1,a+1)} \subset E^{(m,a)}$ були неперервними. Простір $E$ — секвенціально повний та інваріантний відносно дії групи зсувів $T_s : \ \varphi(t) \to \varphi(t-s)$, де $s \in \mathbb{R}$ [2].

Позначимо через $U_t := e^{-itA}$ рівномірно обмежену однопараметричну сильно неперервну групу в просторі $L_2(\Omega)$, породжену оператором Лежандра $A$. Для довільної функції $\rho \in E$ у просторі $L_2(\Omega)$ побудуємо лінійний оператор

$$\widehat{\rho}(A) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iAt}\rho(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_t\rho(t)dt.$$

Інтеграл збігається сильно на всьому просторі $L_2(\Omega)$ і визначений ним оператор $\widehat{\rho}(A)$ обмежений. Запровадимо простір функцій

$$\mathcal{E}_m := \left\{\rho \in E \middle| \, \widehat{\rho} \restriction [-m, m] = 1\right\}.$$

У [3] встановлено, що спектральні підпростори

$$S_m := \left\{x \in L_2(\Omega) \middle| \, \widehat{\rho}(A)x = x, \, \rho \in \mathcal{E}_m\right\}$$

є замкненими та задовольняють умову $S_m \subset S_{m+1}$, а звуження оператора $A$ на них має властивість $Ax = A\widehat{\rho}(A)x = \widehat{-i\rho'}(A)x$, тому $S_m \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор $A$ на $S_m$ обмежений і є генератором рівномірно обмеженої сильно неперервної групи, тому об'єднання $\bigcup_m S_m$ є щільним в $L_2(\Omega)$.

Кожному власному числу $\lambda \in \sigma(A)$ відповідає скінченновимірний кореневий підпростір

$$R(\lambda) := \{x \in L_2(\Omega) : (\lambda I - A)^r x = 0\},$$

де $r$ — індекс власного числа $\lambda$, тобто найменше невід'ємне ціле число таке, що $(\lambda I - A)^r x = 0$ для довільного $x$ такого, що $(\lambda I - A)^{r+1} x = 0$. У [8] показано, що спектральні підпростори оператора $A$ співпадають з прямою сумою його кореневих підпросторів, тобто

$$S_m = \bigoplus_{\lambda_j \le m} R(\lambda_j).$$

Простір, спряжений до $E$, позначимо через $E'$ і наділимо його слабкою топологією спряженого простору. Канонічну білінійну форму, яка задає двоїстість між просторами $E'$ і $E$, позначимо через $\langle f \mid \varphi\rangle$. Елементи спряженого простору називаємо узагальненими функціями експоненціального типу.

Для довільної узагальненої функції експоненціального типу $f \in E'$ та функції $\varphi \in E$ операцію згортки визначимо співвідношенням

$$(f \star \varphi)(t) := \langle f(s) \mid \varphi(t+s)\rangle = \langle f(s) \mid T_{-s}\varphi(t)\rangle = \langle f(s) \mid T_{-t}\varphi(s)\rangle,$$

де $f(s)$ позначає дію функціонала $f$ на функцію $T_{-s}\,\varphi(t)$ за змінною $s$.

Над простором $E$ є визначеним перетворення Фур'є

$$\widehat{E} := \left\{ \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\cdot\xi}\varphi(t)\,dt \,\middle|\, \varphi \in E \right\}, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

яке здійснює лінійний ізоморфізм $E \ni \varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi := \widehat{\varphi} \in \widehat{E}$. Простір $\widehat{E}$ наділяємо топологією, відносно відображення $\mathcal{F}$.

Фур'є-образи функцій з $E$ є фінітними [4], тому обернене перетворення можна визначити формулою

$$\widehat{E} \ni \widehat{\varphi} \mapsto (\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi})(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,d\xi \in E.$$

Двоїстість $\langle E' \mid E\rangle$ дозволяє визначити відображення, спряжене до $\mathcal{F}^{-1}$,

$$\mathcal{F}^{\#} \equiv 2\pi(\mathcal{F}^{-1})' : \, E' \ni f \to \widehat{f} \in \widehat{E}'.$$

Його образ $\widehat{E}'$, який породжує двоїстість вигляду $\langle \widehat{E}' \mid \widehat{E}\rangle$, наділяємо слабкою топологією.

Відображення $\mathcal{F}^{\#}$ є розширенням перетворення Фур'є на простори узагальнених функцій експоненціального типу. Елементи простору $\widehat{E}'$ — символи функціонального числення.

Простір $\widehat{E}'$ є комутативною алгеброю відносно множення, визначеного співвідношенням $\langle \widehat{g}\cdot\widehat{f} \mid \widehat{\varphi}\rangle := \langle \widehat{g} \mid \widehat{f}\cdot\widehat{\varphi}\rangle$, де для будь-яких $f, g \in E'$, $\varphi, \psi \in E$ $\widehat{f\star\varphi} := \widehat{f}\cdot\widehat{\varphi}$, $\langle \widehat{f}\cdot\widehat{\varphi} \mid \widehat{\psi}\rangle := \langle \widehat{f} \mid \widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}\rangle$.

Нехай $E(\mathbb{R}; X) := X\widetilde{\otimes}E$ — поповнення проективного тензорного добутку просторів $X$ та $E$. Лінійний оператор $\widehat{f}(A)$ визначимо, як і в [1], співвідношенням $\widehat{f}(A) : \, \widehat{E}(X) \ni \widehat{x} \to \widehat{f}(A)\widehat{x} := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(U_t \otimes K_f)x(t)\,dt \in \widehat{E}(X)$, де $\widehat{E}(X) := \left\{ \widehat{x} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(U_t \otimes I)x(t)\,dt : x \in E(\mathbb{R}; X) \right\}$, $K_f\varphi = f \star \varphi$.

Нехай $\mathcal{L}(S_m)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $S_m$.

**Теорема 1.** *Для довільної узагальненої функції $f \in E'$, довільних функцій $\rho \in \mathcal{E}_m$, $x \in S_m$, де $m \in \mathbb{N}$, виконується рівність*

$$\widehat{f}(A)x = \widehat{(f\star\rho)}(A)x,$$

*до того ж, $\widehat{f}(A) \restriction S_m \in \mathcal{L}(S_m)$.*

***Доведення.*** Підставляючи рівність $x(t) = x \otimes \varphi(t)$ у формулу (4) із [1], отримуємо, що $\widehat{(f \star \rho)}(A)x = \widehat{f}(A)\widehat{\rho}(A)x = \widehat{f}(A)x$ для довільного $x \in S_m$. Для $x \in S_m$ та функції $\rho \in \mathcal{E}_m$ маємо

$$\|\widehat{f}(A)x\| = \|\widehat{f \star \rho}(A)x\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|U_t x\| \, |\rho(t)| \, dt \leq \|U_t\| \|x\| \, \|\rho\|_{L_1}.$$

Звідси, $\widehat{f}(A) \restriction S_m \in \mathcal{L}(S_m)$. Теорему доведено.

Нехай топологія в підпросторі $S := \bigcup_m S_m$ індукується з простору $L_2(\Omega)$ і в алгебрі $\mathcal{L}(S)$ задана сильна операторна топологія.

**Теорема 2.** *Відображення $\widehat{E}' \ni \widehat{f} \to \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(S)$ є неперервним гомоморфізмом алгебри $\widehat{E}'$ в алгебру $\mathcal{L}(S)$, до того ж*

$$\widehat{(D^k f)}(A) = i^k A^k \widehat{f}(A), \quad \widehat{(it)^k f}(A) = D^k \widehat{f}(A).$$

***Доведення.*** Оскільки $\mathcal{E}_m \subset E$, то з теореми 4 праці [1] випливає, що відображення $\widehat{E}' \ni \widehat{f} \to \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(S)$ є гомоморфізмом алгебри $\widehat{E}'$ в алгебру $\mathcal{L}(S)$. Перевіримо неперервність цього відображення. Для кожного $x \in S$ маємо $\|\widehat{f}(A)x - \widehat{g}(A)x\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|U_t x\| \, |(f - g) \star \rho(t)| \, dt \to 0$, якщо $f \to g$ в просторі $E'$. Теорему доведено.

**Теорема 3.** *Для будь-якої узагальненої функції $f \in E'$ оператори $\widehat{f}(A)$ над простором $L_2(\Omega)$ допускають замикання з областю визначення* $\left\{ x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m \in L_2(\Omega) \,\middle|\, x_m \in S_m, \ \sum\limits_{m=1}^{\infty} \|\widehat{f}(A)x_m\| < \infty \right\}$.

***Доведення.*** Оскільки $S_m = \bigoplus_{\lambda_j \leq m} R(\lambda_j)$, то можна використати результати роботи [8]. Визначимо простір абсолютно збіжних рядів

$$l_1(S_m;\, L_2(\Omega)) := \left\{ x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in L_2(\Omega) \,\middle|\, x_m \in S_m \ ; \ \sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| < \infty \right\}$$

з нормою $\|x\|_{l_1} := \inf \sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_m\|$, де точна нижня грань береться за всіма зображеннями вектора $x$ у вигляді ряду $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m$, де $x_m \in S_m$. Оператор $A$ — замкнений в $L_2(\Omega)$, тому простір $l_1(S_m;\, L_2(\Omega))$ — ізометричний простору $L_2(\Omega)$.

Нехай $l_1(S_m) = \left\{ x = (x_m)_{m=1}^{\infty} \middle| x_m \in S_m \,, \ \|x\|_{l_1} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \|x_m\| < \infty \right\}$ і нехай $S_m^{'}$ — спряжений простір до $S_m$ з нормою $\|y_m\| = \sup\limits_{\|x_m\| \leq 1} |\langle x_m,\, y_m \rangle|$, де $x_m \in S_m$. Сильно спряжений простір до $l_1(S_m)$ має вигляд

$$l_{\infty}(S_m^{'}) = \left\{ y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \,\Big|\, y_m \in S_m^{'}, \quad \|y\|_{\infty} < \infty \right\},$$

де $\|y\|_{\infty} = \sup\limits_{m \geq 1} \|y_m\|$. Сильно спряжений простір до $l_1(S_m;\, L_2(\Omega))$ ізометричний простору

$$l_{\infty}^{0}(S_m^{'}) = \left\{ y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l_{\infty}(S_m^{'}) \,\Big|\, \sum_{m=1}^{\infty} \langle x_m, y_m \rangle = 0 \right.$$

$$\left. \text{для всіх } \sum_{m=1}^{\infty} x_m = 0 \right\}.$$

Для будь-якого функціонала $y \in L_2'(\Omega)$ послідовність його звужень $y_m = y \restriction S_m$ визначає елемент простору $l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$ і відображення $L_2'(\Omega) \ni y \longmapsto (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$ здійснює ізометричний ізоморфізм між цими просторами, тобто виконується рівність $\|y\| = \sup\limits_{m \geq 1} \|y_m\|$.

Перейдемо до питання про існування замикання функцій від оператора. Доведемо, що для будь-якої узагальненої функції $f \in E'$ оператор $\widehat{f}(A)$ допускає замикання $\overline{\widehat{f}(A)} := f(A)$ над простором $L_2(\Omega)$ з областю визначення

$$\mathcal{D}[f(A)] = \left\{ x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in L_2(\Omega) \;\Big|\; x_m \in S_m, \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m(A_m)x_m\| < \infty \right\},$$

причому, якщо $f_m(A_m) = A_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, то $f(A) = A$.

Простір фінітних послідовностей $l_{\text{fin}}(S_m^{'})$ — слабо щільний у просторі $l_{\infty}(S_m^{'})$, тому простір $l_{\text{fin}}^{0}(S^{'}) := l_{\text{fin}}(S^{'}) \bigcap l_{\infty}^{0}(S^{'})$ — слабо щільний у просторі $l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$. Двоїстість між $\langle l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$ та $l_1(S_m;\, L_2(\Omega))\rangle$ реалізується білінійною формою $\langle x\,,\, y \rangle = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \langle x_m\,,\, y_m \rangle$, де $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m \in l_1(S_m;\, L_2(\Omega))$, $y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$ і білінійні форми $\langle x_m\,,\, y_m \rangle$ відповідають дуальним парам $\langle S_m\,,\, S_m^{'} \rangle$.

Простір $l_{\text{fin}}^{0}(S_m^{'})$ лежить в області визначення спряженого оператора $\widehat{f}(A)'$ до оператора $\widehat{f}(A)$ відносно двоїстості між простором $l_{\infty}^{0}(S_m^{'})$ та простором $l_1(S_m;\, L_2(\Omega))$. Справді, кожна послідовность $y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l_{\text{fin}}^{0}(S_m^{'})$ із $p$ ненульовими членами визначає функціонал вигляду

$$S_m \ni x_m \mapsto \left\langle \widehat{f}_m(A_m)x_m\,,\, y_m \right\rangle = \left\langle x_m\,,\, \widehat{f}_m(A_m)'y_m \right\rangle \in \mathbb{C},$$

де $\widehat{f}_m(A_m)'$ — спряжений оператор до оператора $\widehat{f}_m(A_m)$ відносно двоїстості $\langle S_m\,,\,S'_m\rangle$. Тому досить показати, що цей функціонал має неперервне розширення на простір $l_1(S_m;\,L_2(\Omega))$.

Для довільного елемента $x=\sum\limits_{m=1}^{\infty}x_m$ із простору $l_1(S_m;\,L_2(\Omega))$ виконується нерівність

$$\Big|\sum_{m=1}^{p}\langle x_m,\widehat{f}_m(A_m)'y_m\rangle\Big|\le\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|\Big)\sup_{1\le m\le p}\|\widehat{f}_m(A_m)'y_m\|=$$

$$=\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\|x_m\|\Big)\|\widehat{f}(A)'y\|,$$

тому функціонал $\langle x,\widehat{f}(A)'y\rangle=\sum\limits_{m=1}^{j}\langle x_m\,,\,\widehat{f}_m(A_m)'y_m\rangle$ задовольняє нерівність $\Big|\langle x,\widehat{f}(A)'y\rangle\Big|\le\Big(\inf\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|x_m\|\Big)\,\|\widehat{f}(A)'y\|=\|x\|_{l_1}\,\|\widehat{f}(A)'y\|$. Функціонал $\langle x\,,\,\widehat{f}(A)'y\rangle$ є шуканим розширенням, яке визначає спряжений оператор $\widehat{f}(A)'$. Отже, простір $l^0_{\rm fin}(S'_m)$ лежить в області визначення спряженого до оператора $\widehat{f}(A)$ відносно двоїстості між просторами $l^0_\infty(S'_m)$ та $l_1(S_m;\,L_2(\Omega))$.

Замикання $\overline{\widehat{f}(A)}$ оператора $\widehat{f}(A)$ існує і співпадає з його другим спряженим, якщо область визначення спряженого оператора слабо щільна у спряженому просторі (див. [7], розд. IV, п. 7). Існування замикання оператора $\widehat{f}(A)$ доведено.

Якщо $\widehat{f}_m(A_m)=A_m$, $m\in\mathbb{N}$, то $\widehat{f}(A)'=A'$ і другі спряжені оператори також дорівнюють $f(A)=A$.

Область визначення замикання $f(A)$, як другого спряженого до $\widehat{f}(A)$, має вигляд

$$\Big\{x=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\in l_1(S_m;L_2(\Omega))\Big|\,\Big|\sum_{m=1}^{\infty}\langle f_m(A_m)x_m,y_m\rangle\Big|\le C\|y\|\Big\},$$

для всіх $y=(y_m)_{m=1}^{\infty}\in l^0_\infty(S'_m)$, де стала $C>0$ залежить від $x$ і не залежить від $y$. Позначимо через $y_m=y\restriction S_m$. Якщо ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\langle f_m(A_m)x_m,\,y_m\rangle$ збіжний для будь-якого $y=(y_m)_{m=1}^{\infty}\in l^0_\infty(S'_m)$, то він збіжний абсолютно, тобто ряди $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\big|\langle f_m(A_m)x_m,y_m\rangle\big|$ збігаються для всіх таких $y$. Для цього досить покласти $y'_m=e^{-i\theta(m)}y_m$, де $\theta(m)$ — аргумент комплексного числа $\langle f_m(A_m)x_m\,,\, y_m\rangle$. Тоді $\|y'_m\| = \|y_m\|, y' = (y'_m)_{m=1}^{\infty} \in l^0_\infty(S'_m)$. Навпаки, $\left|\sum\limits_{m=1}^{\infty}\langle f_m(A_m)x_m,\, y_m\rangle\right| \le \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left|\langle f_m(A_m)x_m\,,\, y_m\rangle\right| < \infty$. Враховуючи довільність вибору вектора $y' = (y'_m)$ із $l^0_\infty(S'_m)$, для кожного $m$ знайдемо такий вектор $y'_m$, що $\|y'_m\| = 1$ і $\|f_m(A_m)x_m\| = \left|\langle f_m(A_m)x_m,\, y'_m\rangle\right|$. Отже, для кожного $x$ із області визначення оператора $f(A)$ збігається ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|f_m(A_m)x_m\|$. Теорему доведено.

[1] *Лозинська В.Я., М'яус О.М.* Функціональне числення в згорткових алгебрах узагальнених функцій експоненціального типу // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Математика. – 2007. (у друці).

[2] *Лозинська В.Я., М'яус О.М.* Про узагальнені функції експоненціального типу // Прикладні проблеми механіки і математики, 2006. – Вип. 4. – С. 48–53.

[3] *Любич Ю.И., Мацаев В.И.* Об операторах с отделимым спектром // Матем. сборник, 1962. – Т. 56 (98), № 4. – С. 433–468.

[4] *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

[5] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир., 1980. – 664 с.

[6] *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ, 1962. – 830 с.

[7] *Шефер Г.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. – 359с.

[8] *Dmytryshyn M.I., Lopushansky O.V.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum // In „General topology in Banach spaces“ (ed. T.Banakh). – NOVA Science Publishers, Inc. Huntington, New York. – 2001. – P. 137–145.

## FUNCTIONAL CALCULUS FOR THE LEGENDRE DIFFERENTIAL OPERATORS

*Vira LOZYNSKA*

Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

The some properties of the functional calculus for the Legendre differential operators that are the generators of strongly continuous groups of bounded linear operators are described.