ЗБУРЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ, ЯКІ РОЗШАРОВУЮТЬ ЦЕНТРАЛЬНИЙ МНОГОВИД УМОВНО ІНТЕГРОВНИХ ЛОКАЛЬНО ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ

Юрій ЛОВЕЙКІН

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64, Київ 01033

Редакція отримала статтю 15 серпня 2007 р.

Досліджено локально гамільтонову систему, близьку до умовно інтегровної. Доведено існування центрального многовиду для цієї системи при виконанні певних умов на гамільтоніан незбуреної системи. На цьому центральному многовиді індукується система, яка також є локально гамільтоновою. Методами КАМ-теорії з використанням методу згладжування у поєднанні з методом штучних параметрів доводиться існування на центральному многовиді інваріантних торів локально гамільтонової системи, які несуть на собі квазіперіодичні рухи.

1. ВСТУП

У даній роботі, яка продовжує дослідження, ропочаті в [5], наша увага прикута до вивчення збурення локально гамільтонових систем, близьких до умовно інтегровних. Умовна інтегровність системи означає, що її інваріантні тори розшаровують не відкриту область фазового простору, а лише деякий підмноговид. Основна мета полягає в тому, щоб показати: якщо відповідна лінеаризована в околі зазначеного підмноговиду система має властивість гіперболічності, то система, одержана внаслідок малих локально гамільтонових збурень вихідної умовно інтегровної системи, має інваріантний многовид (центральний многовид), і на ньому існує канторова підмножина інваріантних торів збуреної системи, які несуть

УДК 517.9; MSC 2000: 37D10

на собі квазіперіодичні рухи. Розмірність цих інваріантних торів може, зокрема, бути меншою, ніж кількість ступенів вільності, тобто інваріантні тори можуть бути маловимірними. Дослідження проблеми збереження маловимірних торів гамільтонових систем розпочав В.Мельников [7]. Повне доведення результату, сформульованого Мельниковим, було представлене Л.Еліассоном та Ю.Пошелем [10, 15]. Проблема збереження гіперболічних маловимірних торів розглядалась в [11, 17, 18]. У роботі [11] показано, що невироджені гіперболічні тори дійсноаналітичної системи зберігаються при малих збуреннях, вони лише деформуються і залишаються дійсноаналітичними. Альтернативне доведення результату [11] з використанням техніки неявної функції пізніше було запропоновано у [17, 18]. Нещодавно ці результати були узагальнені в [12] з допущенням виродженості незбуреного гамільтоніана. У [13] показано, що результати робіт [11, 17, 18] справджуються і для узагальнених гамільтонових систем, які можуть бути виродженими, і можуть бути непарної вимірності. Також у [13] розглядається проблема збереження гіперболічних торів на підмноговидах.

Основними технічними засобами у даній роботі є метод центрального многовиду у поєднанні з методом згладжування, запропонованим Ю.Мозером [8], та методом штучних параметрів.

2. ОСНОВНІ ПРИПУЩЕННЯ ТА РЕЗУЛЬТАТИ

На гладкому симплектичному многовиді $(M^{2(n+k)}, \omega^2)$ із симплектичною структурою ω^2 будемо розглядати локально гамільтонову систему із замкненою (не обов'язково точною) 1-формою ω_0^1 (замість 1-форми ω_0^1 можна розглядати гамільтоніан $H_0 \colon M^{2(n+k)} \to \mathbb{R}$, взагалі кажучи, багатозначний). Припускаємо, що ця система є умовно інтегровною. Умовна інтегровність системи означає, що ця система є інтегровною тільки на деякому підмноговиді, причому інваріантні підмноговиди останньої є дифеоморфними стандартному тору $\mathbb{T}^r = \mathbb{R}^r / 2\pi\mathbb{Z}^r$.

В околі многовиду (на якому система інтегровна) існують координати (y, φ, z), де $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)| \bmod 2\pi$, $z = (z_1 \ldots, z_{2k})$, $s + r = 2n$, в яких дужки Пуассона, породжені симплектичною структурою ω^2, задаються рівностями

$$\{\varphi, y\} = \sigma, \quad \{\varphi, \varphi\} = \chi, \quad \{z, z\} = I, \tag{1}$$

де σ, χ та I — матриці розмірів $r \times s$, $r \times r$ та $2k \times 2k$ відповідно, матриці χ та I — кососиметричні, а матриця I — невироджена (тут і надалі вважаємо, що всі не виписані дужки Пуассона дорівнюють нулю). Припускаємо, що координати (y, φ, z) є такими, що гамільтоніан H_0 набирає вигляду $H_0(y, \varphi, z) = \overline{H}_0(y, \varphi, z) + \beta_0 \cdot \varphi$ і відповідна йому система —

$$\dot{y} = -\sigma^{\mathrm{T}} \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \varphi} - \sigma^{\mathrm{T}} \beta_0, \quad \dot{\varphi} = \sigma \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial y} + \chi \beta_0, \quad \dot{z} = I \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial z}, \tag{2}$$

причому функція $\overline{H}_0$, яка є однозначною складовою гамільтоніана H_0 ($\beta_0 \cdot \varphi$ — багатозначна складова), і вектор β_0 задовольняють такі умови.

Припущення 1. *а)* $\partial \overline{H}_0 / \partial z \big|_{z=0} = 0$*;*
б) $\overline{H}_0|_{z=0} = \breve{H}_0(y)$*, тобто* $\overline{H}_0$ *не залежить від* φ *при* $z = 0$*;*
в) функція $\overline{H}_0$ *є дійсноаналітичною за всіма змінними в області*

$$\{(y, \varphi, z) \in \mathbb{C}^{s+r+2k} : |y| < R_0, \ |\operatorname{Im} \varphi| < \rho_0, \ |z| < r_0\}$$

і є періодичною за кожною змінною φ_j*,* $j = 1, \ldots, r$*, з періодом* 2π*;*
г) вектор β_0 *задовольняє рівність* $\sigma^{\mathrm{T}} \beta_0 = 0$.

З умови б) цього припущення відразу випливає, що $\partial \overline{H}_0 / \partial \varphi \big|_{z=0} = 0$.

Умови а), б) і г) припущення 1 означають, що дана локально гамільтонова система є інтегровною на многовиді $z = 0$ і інваріантні підмноговиди інтегровної системи дифеоморфні стандартному тору $\mathbb{T}^r$.

Нехай система (2) зазнає збурення вигляду

$$\omega_0^1 \mapsto \omega_0^1 + \mu \omega_1^1 \qquad \text{або, що те саме,} \qquad H_0 \mapsto H_0 + \mu H_1,$$

де μ — малий параметр, $H_0 + \mu H_1$ — багатозначний гамільтоніан, який відповідає 1-формі $\omega_0^1 + \mu \omega_1^1$, і в якому збурення H_1 можна подати у вигляді $H_1(y, \varphi, z) = \overline{H}_1(y, \varphi, z) + \beta_1 \cdot \varphi$, де $\overline{H}_1$ — однозначна складова збурення, $\beta_1 \cdot \varphi$ — багатозначна складова.

Припущення 2. *а) Функція* $\overline{H}_1 = \overline{H}_1(y, \varphi, z)$ *є дійсноаналітичною за всіма змінними в області*

$$\{(y, \varphi, z) \in \mathbb{C}^{s+r+2k} : |y| < R_0, \ |\operatorname{Im} \varphi| < \rho_0, \ |z| < r_0\}$$

і є періодичною за кожною змінною φ_j*,* $j = 1, \ldots, r$*;*
б) вектор β_1 *задовольняє рівність* $\sigma^{\mathrm{T}} \beta_1 = 0$.

Умова б) припущення 2 необхідна, щоб усунути руйнування торів збуреної системи вже в першому наближенні. Також необхідним для використання методу центрального многовиду є виконання такого додаткового припущення.

Припущення 3. *Система у варіаціях*

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{\varphi} = \sigma \breve{H}_0{}'_y(y) + \chi\beta_0, \quad \dot{z} = I\overline{H}_0{}''_{zz}(y, \varphi, 0)z,$$

яка відповідає інваріантному многовиду $z = 0$ при $\mu = 0$, має грубу функцію Гріна.

Означення грубої функції Гріна див. в п. 3.1.

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення 1–3. Тоді для деяких $\gamma > 0$, $\tau > 0$ та достатньо малого числа $\mu_0 > 0$ і для всіх $\mu \in (0; \mu_0)$ в $\mathrm{O}(\mu)$-околі інваріантного многовиду $z = 0$ незбуреної системи* (2) *існує інваріантний многовид збуреної системи (центральний многовид), який задається в просторі змінних (y, φ, z) рівнянням*

$$z = \mu Z(y, \varphi, \mu), \quad |y| \le R, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \le \rho,$$

де $R < R_0$, $\rho < \rho_0$ — додатні сталі, причому функція $Z(y, \varphi, \mu)$ є, взагалі кажучи, скінченно диференційовною за змінними (y, φ). На цьому центральному многовиді система, індукована вихідною збуреною системою, є локально гамільтоновою, і існує канторова підмножина $C_\mu \subset \mathbb{R}^s$ така, що кожному значенню $y_0 \in C_\mu$ з цієї канторової підмножини можна поставити у відповідність інваріантний тор, заданий рівнянням $y = F(\varphi, \mu, y_0)$, $z = \mu Z(F(\varphi, \mu, y_0), \varphi, \mu)$, де функція F є досить гладкою за змінними φ, і потік на цьому торі є квазіперіодичним з вектором базових частот, який належить деякому $\mathrm{O}(\mu)$-околу вектора $\sigma \breve{H}_0{}'(y_0) + \chi\beta_0$.

3. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

За припущенням незбурена система має інваріантний многовид, на якому вона є інтегровною. Покажемо, що за певних умов на незбурену систему, які можна виразити в термінах „грубості“ функції Гріна лінеаризованої в околі цього многовиду системи, відповідна збурена локально гамільтонова система теж буде мати інваріантний многовид. Останній буде малою деформацією інваріантного многовиду незбуреної системи, і на ньому збурена система індукує систему, яка теж є локально гамільтоновою.

3.1. Існування інваріантного многовиду нелінійної системи. Будемо розглядати систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, y, z, \varepsilon), \quad \dot{y} = b(\varphi, y, z, \varepsilon), \quad \dot{z} = P(\varphi, y, z, \varepsilon)z + f(y, \varphi, \varepsilon), \tag{3}$$

де функції a, b, P, f — періодичні за змінними φ_j, $j = 1, \ldots, m$, з періодом 2π, визначені та неперервні за всіма змінними φ, y, z, ε, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $z = (z_1, \ldots, z_k)$, в області

$$|y| \leq r, \quad |z| \leq d, \quad \varphi \in \mathbb{T}^m, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{4}$$

і такі, що

$$f(y, \varphi, 0) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |y| \leq r, \quad \varphi \in \mathbb{T}^m.$$

Остання умова гарантує існування тривіального інваріантного многовиду $z = 0$ системи (3) при $\varepsilon = 0$. Система у варіаціях, що відповідає інваріантному многовиду $z = 0$ при $\varepsilon = 0$ системи (3), має вигляд

$$\dot{\varphi} = a_0(\varphi, y), \quad \dot{y} = b_0(\varphi, y), \quad \dot{z} = P_0(\varphi, y)z, \tag{5}$$

де $a_0(\varphi, y) = a(\varphi, y, 0, 0)$, $b_0(\varphi, y) = b(\varphi, y, 0, 0)$, $P_0(\varphi, y) = P(\varphi, y, 0, 0)$.

Теорема 2. *Нехай функції a, b, P, f мають неперервні за змінними φ, y, z, ε з області (4) частинні похідні за φ, y, z до порядку l включно ($l \geq 1$). Нехай система у варіаціях (5) має грубу функцію Гріна з показником гладкості l. Тоді можна вказати таке досить мале $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ система (3) має інваріантний многовид*

$$z = Z(\varphi, y, \varepsilon) \quad \textit{при} \quad |y| \leq r, \quad \varphi \in \mathbb{T}^m, \tag{6}$$

з функцією $Z(\cdot)$, яка має неперервні частинні похідні за змінними y, φ до порядку $(l-1)$ включно і задовольняє нерівність

$$|Z|_{l-1} \leq K|f|_l, \tag{7}$$

де K — додатна стала, що не залежить від ε.

Функцію Гріна $G_0(\tau, \varphi, y)$ системи

$$\dot{\varphi} = a_0(\varphi, y), \qquad \dot{y} = b_0(\varphi, y), \qquad \dot{z} = P_0(\varphi, y)z$$

будемо називати "*грубою*" (за аналогією з [9]), якщо знайдуться стала $\delta > 0$ та ціле $l \geq 0$ такі, що система рівнянь

$$\dot{\varphi} = a_0(\varphi, y) + a_1(\varphi, y), \quad \dot{y} = b_0(\varphi, y) + b_1(\varphi, y), \quad \dot{z} = P_0(\varphi, y)z, \tag{8}$$

коли $a_1 \in \mathrm{C}^{l_0}(\mathbb{T}^m \times D)$, $b_1 \in \mathrm{C}^{l_0}(\mathbb{T}^m \times D)$ ($l_0 = \max\{1, l\}$, $D = \{|y| \leq r\}$) і $|a_1|_{l_0} \leq \delta$, $|b_1|_{l_0} \leq \delta$, має функцію Гріна $\overline{G}_0(\tau, \varphi, y)$, для якої виконується оцінка

$$\left|\overline{G}_0(\tau, \varphi, y) f(\varphi_\tau(\varphi, y), y_\tau(\varphi, y))\right|_l \leq K \mathrm{e}^{-\gamma|\tau|} |f|_l,$$

де f — довільна функція з $\mathrm{C}^l(\mathbb{T}^m \times D)$, $\varphi_t(\varphi, y)$ та $y_t(\varphi, y)$ — розв'язок перших двох рівнянь системи (8), K і γ — додатні сталі, що не залежать від φ, y, δ і f.

Доведення теореми 2 базується на лемах, сформульованих нижче.

Вказаний у теоремі 2 інваріантний многовид (6) знаходиться за допомогою методу послідовних наближень. Розглядаючи систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, y, z), \quad \dot{y} = b(\varphi, y, z), \quad \dot{z} = P(\varphi, y, z)z + f(\varphi, y), \tag{9}$$

в області

$$|y| \le r, \quad |z| \le d, \quad \varphi \in \mathbb{T}^m, \tag{10}$$

задамо нульову ітерацію $z = Z_0(\varphi, y)$ методу послідовних наближень так, що $|Z_0(\varphi, y)| \le d$ при $|y| \le r$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Задамо послідовність многовидів, кожен многовид з якої $z = Z_{i+1}(\varphi, y)$, $i = 0, 1, \dots$, визначимо як інваріантний многовид системи

$$\begin{gathered}\dot{\varphi} = a(\varphi, y, Z_i(\varphi, y)), \quad \dot{y} = b(\varphi, y, Z_i(\varphi, y)), \\ \dot{z} = P(\varphi, y, Z_i(\varphi, y))z + f(\varphi, y).\end{gathered} \tag{11}$$

Лема 1. *Нехай функції a, b, P, f системи* (9) *визначені і неперервні за змінними φ, y, z в області* (10) *і є періодичними за φ_j, $j = 1, \dots, m$, з періодом 2π. Якщо для кожного i ($i = 0, 1, \dots$) система* (11) *має інваріантний многовид $z = Z_{i+1}(\varphi, y)$, який лежить в області* (10), *і $\lim\limits_{i\to\infty} Z_i(\varphi, y) = Z(\varphi, y)$ рівномірно по $|y| \le r$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, то гранична функція $Z(\varphi, y)$ задає інваріантний многовид $z = Z(\varphi, y)$, $|y| \le r$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, системи* (9).

Реалізація наведеного процесу вимагає з'ясування умов, при яких система рівнянь

$$\begin{gathered}\dot{\varphi} = a_0(\varphi, y) + a_1(\varphi, y), \quad \dot{y} = b_0(\varphi, y) + b_1(\varphi, y), \\ \dot{z} = \big(P_0(\varphi, y) + P_1(\varphi, y)\big)z + f(\varphi, y),\end{gathered} \tag{12}$$

має інваріантний многовид для довільних достатньо малих за нормою простору $\mathrm{C}^l(\mathbb{T}^m \times D)$ функцій $a_1(\varphi, y)$, $b_1(\varphi, y)$, $P_1(\varphi, y)$.

Лема 2. *Нехай система рівнянь*

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, y), \quad \dot{y} = b(\varphi, y), \quad \dot{z} = P(\varphi, y)z$$

має грубу функцію Гріна. Тоді можна вказати таке $\rho = \rho(\delta) > 0$, $\rho(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, що для будь-яких функцій $a_1 \in \mathrm{C}^{l_0}(\mathbb{T}^m \times D)$,

$b_1 \in \mathrm{C}^{l_0}(\mathbb{T}^m \times D)$, $P_1 \in \mathrm{C}^l(\mathbb{T}^m \times D)$, $l_0 = \max\{1; l\}$, *які задовольняють умову*

$$|a_1|_{l_0} + |b_1|_{l_0} + |P_1|_l \leq \rho,$$

і довільної функції $f \in \mathrm{C}^l(\mathbb{T}^m \times D)$ *система рівнянь* (12) *має інваріантний многовид* $z = Z(\varphi, y)$, $|y| \leq r$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, *який задовольняє нерівність*

$$|Z|_l \leq \widetilde{K}|f|_l,$$

де $\widetilde{K} > 0$ *— стала, що не залежить від* ρ *та* f.

Для системи вигляду

$$\dot{\varphi} = a_0(\varphi, y), \quad \dot{y} = b_0(\varphi, y), \quad \dot{z} = P_0(\varphi, y)z + f(\varphi, y) \tag{13}$$

існування інваріантного многовиду для довільної функції $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^m \times D)$ забезпечується існуванням функції Гріна системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a_0(\varphi, y), \quad \dot{y} = b_0(\varphi, y), \quad \dot{z} = P_0(\varphi, y)z. \tag{14}$$

Позначимо через $\varphi_\tau(\varphi, y)$, $y_\tau(\varphi, y)$ розв'язок системи

$$\dot{\varphi} = a_0(\varphi, y), \quad \dot{y} = b_0(\varphi, y),$$

який задовольняє умову $\varphi_0(\varphi, y) = \varphi$, $y_0(\varphi, y) = y$.

Лема 3. *Нехай праві частини системи* (14) *задовольняють умови* $a_0 \in \mathrm{C}^l(\mathbb{T}^m \times D)$, $b_0 \in \mathrm{C}^l(\mathbb{T}^m \times D)$, $P_0 \in \mathrm{C}^l(\mathbb{T}^m \times D)$, $l \geq 0$, *а сама система має функцію Гріна* $G_0(\tau, \varphi, y)$. *Тоді для довільної функції* $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T}^m \times D)$ *система рівнянь* (13) *має інваріантний многовид, який задається співвідношенням* $z = Z(\varphi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\tau, \varphi, y) f(\varphi_\tau(\varphi), y_\tau(y))\, d\tau$ *і задовольняє оцінку*

$$|Z|_0 \leq K|f|_0, \quad \text{де} \quad K = \max_{|y| \leq r,\ \varphi \in \mathbb{T}^m} \int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\tau, \varphi, y)|\, d\tau.$$

Техніка доведення як лем 1–3, так і теореми 2, є аналогічною до техніки доведення теореми про існування інваріантного тора нелінійної системи та теореми про достатні умови існування інваріантного тора лінійної системи, представлених у [9]. Наведені тут результати узагальнюють результати [9] на випадок залежності не лише від кутових змінних, а й від додаткових змінних y, які пробігають деяку область.

3.2. Локальна гамільтоновість векторного поля системи на інваріантному многовиді. Нехай на симплектичному многовиді $(M,$

ω^2) задано локально гамільтонову систему з 1-формою ω^1 (або з багатозначним гамільтоніаном H) і задано підмноговид N многовиду M, що є інваріантним многовидом заданої локально гамільтонової системи.

Лема 4. *Нехай $i : N \to M$ — гладке вкладення многовиду N в M. Якщо на многовиді M з симплектичною структурою ω^2 задана локально гамільтонова система з 1-формою ω^1 (або багатозначним гамільтоніаном H) і форма $i^*\omega^2$ невироджена, то система, індукована даною на многовиді N з симплектичною структурою $i^*\omega^2$, також буде локально гамільтоновою з 1-формою $i^*\omega^1$ (з багатозначним гамільтоніаном i^*H).*

Позначимо через X_{ω^1} векторне поле гамільтонової системи на многовиді M з 1-формою ω^1. За означенням $\omega^2(\cdot, X_{\omega^1}) = \omega^1(\cdot)$. Невироджена і замкнена 2-форма $\widehat{\omega}^2 = i^*\omega^2$ на многовиді N задає на ньому симплектичну структуру. Тепер на симплектичному многовиді $(N, \widehat{\omega}^2)$ розглянемо гамільтонову систему з 1-формою $\widehat{\omega}^1 = i^*\omega^1$. Нехай $X_{\widehat{\omega}^1}$ — векторне поле гамільтонової системи на многовиді N з 1-формою $\widehat{\omega}^1$, і, отже, $\widehat{\omega}^2(\cdot, X_{\widehat{\omega}^1}) = \widehat{\omega}^1(\cdot)$. Покажемо, що $i_* X_{\widehat{\omega}^1} = X_{\omega^1}|_{i(N)}$. Дійсно, з одного боку $\widehat{\omega}^1(\cdot) = \widehat{\omega}^2(\cdot, X_{\widehat{\omega}^1}) = \omega^2(i_*\cdot, i_* X_{\widehat{\omega}^1})$, з іншого боку $\widehat{\omega}^1(\cdot) = i^*\omega^1(\cdot) = \omega^1(i_*\cdot) = \omega^2(i_*\cdot, X_{\omega^1})$. В результаті маємо, що $\omega^2(i_*\cdot, X_{\omega^1}) = \omega^2(i_*\cdot, i_* X_{\widehat{\omega}^1})$. А оскільки векторне поле X_{ω^1} дотикається N, то виконується рівність $i_* X_{\widehat{\omega}^1} = X_{\omega^1}|_{i(N)}$, яка і доводить лему 4.

4. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ

На симплектичному многовиді $(M^{2(n+k)}, \omega^2)$ розглядаємо збурений (багатозначний) гамільтоніан

$$
\begin{aligned}
H_\mu(y, \varphi, z) &= H_0(y, \varphi, z) + \mu H_1(y, \varphi, z) = \\
&= \overline{H}_0(y, \varphi, z) + \mu \overline{H}_1(y, \varphi, z) + (\beta_0 + \mu\beta_1)\cdot\varphi
\end{aligned}
$$

Відповідна збурена система має вигляд

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= -\sigma^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \varphi}\right), \\
\dot{\varphi} &= \sigma\left(\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial y} + \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial y}\right) + \chi\left(\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial \varphi}\right) + \chi(\beta_0 + \mu\beta_1), \qquad (15) \\
\dot{z} &= I\left(\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial z} + \mu \frac{\partial \overline{H}_1}{\partial z}\right),
\end{aligned}
$$

$$
|y| < R_0, \quad |z| < r_0, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_0. \qquad (16)
$$

Замість системи (15) в області (16) розглянемо іншу систему, яка буде співпадати з даною системою на множині

$$|y| \leq R, \quad |z| \leq r, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leq \rho, \tag{17}$$

де $R < R_0$, $r < r_0$, $\rho < \rho_0$. Систему такого вигляду можна одержати, домноживши гамільтоніан H_μ системи (15) на нескінченно диференційовну функцію $\eta(y,z)$ таку, що $0 \leq \eta(y,z) \leq 1$, $\eta(y,z) \equiv 1$ на множині (17) і $\eta(y,z) \equiv 0$ на межі області (16). В результаті маємо нову локально гамільтонову систему з гамільтоніаном $\check{H}_\mu = \eta H_\mu$, задану в області (16), але яка співпадає з системою (15) на множині (17).

Отже, будемо розглядати систему з гамільтоніаном $\check{H}_\mu$ на множині (17), яка співпадає на цій множині з системою з гамільтоніаном H_μ.

Розвинемо однозначну складову $\overline{H}_\mu = H_\mu - (\beta_0 + \mu\beta_1)\cdot\varphi$ збуреного гамільтоніана H_μ на множині (17) за формулою Тейлора за змінними z в околі точки $z = 0$. Зважаючи на умови, що їх задовольняє функція $\overline{H}_0$, одержимо вираз

$$\overline{H}_\mu = \check{H}_0(y) + \frac{1}{2}\,\overline{H}_0{}''_{zz}(y,\varphi,0)z^2 + \widetilde{H}_0(y,\varphi,z)z^3 +$$
$$+\mu\Big(\overline{H}_1(y,\varphi,0) + \overline{H}_1{}'_z(y,\varphi,0)z + \widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2\Big),$$

де $\widetilde{H}_0(y,\varphi,z)z^3$ та $\widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2$ — відповідні залишкові члени в розкладах функцій $\overline{H}_0$ та $\overline{H}_1$ за формулою Тейлора. При цьому система, яка співпадає з (15) на множині (17), набуває вигляду

$$\dot{y} = -\sigma^{\mathrm{T}}\Big(\frac{1}{2}\overline{H}_0{}''_{zz}{}'_{\varphi}(y,\varphi,0)z^2 + \widetilde{H}_0{}'_{\varphi}(y,\varphi,z)z^3\Big) -$$
$$-\mu\sigma^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\overline{H}_1(y,\varphi,0) + \overline{H}_1{}'_z(y,\varphi,0)z + \widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2\Big),$$
$$\dot{\varphi} = \sigma\check{H}_0{}'(y) + \sigma\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{2}\overline{H}_0{}''_{zz}(y,\varphi,0)z^2 + \widetilde{H}_0(y,\varphi,z)z^2 + \mu\Big(\overline{H}_1(y,\varphi,0) +$$
$$+\overline{H}_1{}'_z(y,\varphi,0)z + \widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2\Big)\Big) + \frac{1}{2}\chi\overline{H}_0{}''_{zz}{}'_{\varphi}z^2 + \chi\widetilde{H}_0{}'_{\varphi}z^3 + \chi(\beta_0 + \mu\beta_1),$$
$$\dot{z} = I\overline{H}_0{}''_{zz}(y,\varphi,0)z + I\frac{\partial}{\partial z}\Big(\widetilde{H}_0(y,\varphi,z)z^3 + \mu\widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2\Big) +$$
$$+\mu I H_1{}'_z(y,\varphi,0), \tag{18}$$

тобто система (15) зображується у вигляді (3) з $\varepsilon = \mu$ і

$$f(\varphi,y,\mu) = \mu I H_1{}'_z(y,\varphi,0),$$

$$P(\varphi,y,z,\varepsilon)z = I\overline{H}_0{}''_{zz}(y,\varphi,0)z + I\frac{\partial}{\partial z}\left(\widetilde{H}_0(y,\varphi,z)z^3 + \mu\widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2\right),$$

$$a(\varphi,y,z,\varepsilon) = \sigma\breve{H}_0{}'(y) + \sigma\frac{\partial}{\partial y}\biggl(\frac{1}{2}\overline{H}_0{}''_{zz}(y,\varphi,0)z^2 + \widetilde{H}_0(y,\varphi,z)z^2 +$$

$$+\mu\Bigl(\overline{H}_1(y,\varphi,0) + \overline{H}_1{}'_z(y,\varphi,0)z + \widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2\Bigr)\biggr) +$$

$$+\frac{1}{2}\chi\overline{H}_0{}''_{zz}{}'_\varphi z^2 + \chi\widetilde{H}_0{}'_\varphi z^3 + \chi(\beta_0 + \mu\beta_1),$$

$$b(\varphi,y,z,\varepsilon) = -\sigma^{\mathrm{T}}\Bigl(\frac{1}{2}\overline{H}_0{}''_{zz}{}'_\varphi(y,\varphi,0)z^2 + \widetilde{H}_0{}'_\varphi(y,\varphi,z)z^3\Bigr) -$$

$$-\mu\sigma^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Bigl(\overline{H}_1(y,\varphi,0) + \overline{H}_1{}'_z(y,\varphi,0)z + \widetilde{H}_1(y,\varphi,z)z^2\Bigr),$$

які є нескінченно диференційовними на множині (17). Система у варіаціях, яка відповідає многовиду $z=0$ при $\mu=0$ системи (15), зважаючи на (18), має вигляд

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{\varphi} = \sigma\breve{H}_0{}'(y) + \chi\beta_0, \quad \dot{z} = I\overline{H}_0{}''_{zz}(y,\varphi,0)z. \tag{19}$$

Нехай система (19) має грубу функцію Гріна з показником гладкості $l \geq 1$. Застосувавши теорему 2 до системи (18), можна стверджувати, що існує таке $\mu_0 > 0$, що для всіх $\mu \in [0;\mu_0]$ система (15) має інваріантний многовид, заданий рівнянням $z = \mu Z(y,\varphi,\mu)$, $|y| \leq R$, $\varphi \in \mathbb{T}^r$, і функція $Z(\cdot)$ має неперервні за всіма змінними частинні похідні за y та φ до порядку $(l-1)$ включно. Множник μ присутній в означенні інваріантного многовиду, зважаючи на вигляд функції f в даному випадку.

Отже, маємо симплектичний многовид $(M^{2(n+k)},\omega^2)$, на якому задана початкова збурена система (15), та підмноговид N, заданий рівністю $z = \mu Z(y,\varphi,\mu)$, $|y| \leq R$, $\varphi \in \mathbb{T}^r$. Многовид N є $(l-1)$-гладко вкладеним у многовид $M^{2(n+k)}$. Нехай $i\colon N \to M^{2(n+k)}$ — відповідне відображення вкладення. Оскільки многовид N є локально інваріантним для заданої системи (15) на множині (17), то за лемою 4 система, індукована даною на многовиді N, є локально гамільтоновою з багатозначним гамільтоніаном h_μ, який має вигляд

$$h_\mu = h_0(y,\varphi) + \mu h_1(y,\varphi,\mu) = H_0(y,\varphi,\mu Z(y,\varphi,\mu)) + \mu H_1(y,\varphi,\mu Z(y,\varphi,\mu)),$$

$$|y| \leq R, \quad |\operatorname{Im}\varphi| \leq \rho, \quad \mu \in [0;\mu_0],$$

де, взявши до уваги розклад функції $\overline{H}_\mu$ за формулою Тейлора за змінними z,

$$h_0(y,\varphi) = \overline{h}_0(y) + \beta_0\cdot\varphi = \breve{H}_0(y) + \beta_0\cdot\varphi,$$

тобто функція $\overline{h}_0$ (однозначна складова гамільтоніана H_μ) не залежить від φ,

$$h_1(y,\varphi,\mu) = \ H_1(y,\varphi,0) + \mu\Big(H_1{}'_z(y,\varphi,0)Z(y,\varphi,\mu) +$$
$$+\overline{H}_0{}''_{zz}(y,\varphi,0)Z^2(y,\varphi,\mu)\Big) + \mu^2\widetilde{H}_1(y,\varphi,\mu Z(y,\varphi,\mu))Z^2(y,\varphi,\mu) +$$
$$+\mu^2\widetilde{H}_0(y,\varphi,\mu Z(y,\varphi,\mu))Z^3(y,\varphi,\mu) + \beta_1\cdot\varphi,$$

а дужка Пуассона, породжена симплектичною структурою $\widehat{\omega}^2 = i^*\omega^2$ на многовиді N, задається рівностями

$$\{y,y\} = 0, \quad \{\varphi,y\} = \sigma, \quad \{\varphi,\varphi\} = \chi.$$

Гамільтоніан h_μ системи на симплектичному многовиді $(N,\widehat{\omega}^2)$ є скінченно диференційовною функцією C^{l-1} на відміну від H_μ на многовиді $(M^{2(n+k)},\omega^2)$, який є дійсноаналітичною функцією.

Далі систему з гамільтоніаном h_μ будемо розглядати в області $|y| < R$, $|\operatorname{Im}\varphi| < \rho$, $\mu \in (0;\mu_0)$. Перш ніж виконувати подальші перетворення, зробимо заміну $y \mapsto y_0 + y$, вважаючи, що параметр y_0 належить області $|y_0| < \widehat{R}$, а нові змінні y пробігають область $|y| < \widetilde{R}$, де $\widehat{R}$ та $\widetilde{R}$ — додатні сталі, причому $\widehat{R} + \widetilde{R} < R$. Після цієї заміни змінні y змінюються в області $|y| < \widetilde{R}$, де $\widetilde{R} < R$ — деяка додатна стала.

Для дослідження існування інваріантних торів цієї системи використаємо метод згладжування, запропонований Ю.Мозером [8]. Подальше розвиток для гамільтонових систем цей метод дістав в роботах Г.Рюссмана [16] та Ю.Пошеля [14]. Викладемо коротко схему методу у нашому випадку, опускаючи технічні деталі.

Скінченно диференційовну функцію $h_\mu(y,\varphi)$, визначену в області $|y| < \widetilde{R}$, $\varphi \in \mathbb{T}^r$, можна наблизити послідовністю дійсноаналітичних функцій $\{h_{\mu,k},\ k \geq 0\}$, кожна з яких визначена в області $|y| < \widetilde{R}$, $|\operatorname{Im} y| < \mu_k$, $|\operatorname{Im}\varphi| < \mu_k$ відповідно, де $\mu_k = \mu^{k\alpha}$, $\alpha \in (0;1/2)$, таких, що

$$h_{\mu,k} \to h_\mu \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad |h_{\mu,k+1} - h_{\mu,k}| < \mu_{k+1}, \quad k \geq 1,$$

причому $h_{\mu,0}$ є такою, що її однозначна складова $\overline{h}_{\mu,0}$ не залежить від φ, і $h_{\mu,0}$ задає інтегровну гамільтонову систему, а також виконується нерівність $|h_{\mu,0} - h_0| < \mu$. Величина α та порядок гладкості l пов'язані між собою і явне співвідношення між ними можна вивести для кожної конкретної системи.

Наслідуючи техніку методу штучних параметрів, використану в [6], замість послідовності гамільтоніанів $h_{\mu,k}$, $k \geq 1$, будемо розглядати послідовність модифікованих гамільтоніанів $\widetilde{h}_{\mu,k}(y,\varphi) + (\Lambda + \lambda)\cdot y$, $k \geq 1$

($\widetilde{h}_{\mu,k}$ — гамільтоніан $h_{\mu,k}$ без лінійного за y доданка, який не залежить від μ), кожен з яких залежить від параметрів $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, які розбито на групи: $y_0 = (\nu_1, \dots, \nu_s)$, $\beta_0 + \mu\beta_1 =: \beta = (\nu_{s+1}, \dots, \nu_{s+r})$, $\Lambda = (\nu_{s+r+1}, \dots, \nu_{2s+r})$, $2s + r = n$. Поправки $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ повинні бути визначені так, щоб вони не залежали від (y, φ), гладко залежали від параметрів ν і гамільтоніани $\widetilde{h}_{\mu,k}(y, \varphi) + (\Lambda + \lambda) \cdot y$ на певній підмножині області зміни параметрів ν мали такий вигляд, що доданки порядків до μ_k включно вільного члена та лінійного за y однозначної складової гамільтоніана не залежали від кутових змінних.

Для досягнення поставленої мети будуємо послідовність перетворень $\{\phi_k, k \geq 1\}$ так, щоб ϕ_k зводило модифіковану систему з гамільтоніаном $\widetilde{h}_{\mu,k}(y, \varphi) + (\Lambda + \lambda) \cdot y$ до вигляду, в якому б вільний член та лінійний за y однозначної складової гамільтоніана представлялись у вигляді сум двох доданків, перший з яких не залежить від кутових змінних, а другий має порядок μ_k, і одночасно, як і в [6], спеціальним чином здійснюємо перетворення поправок (штучних параметрів) λ.

На першому кроці до системи з гамільтоніаном $\widetilde{h}_{\mu,1}(y, \varphi) + (\Lambda + \lambda) \cdot y$ застосовуємо симплектичне перетворення ψ_1, яке є перетворенням зсуву за одиницю часу вздовж траєкторій гамільтонової системи зі спеціальним чином вибраним гамільтоніаном (інфінітезимальною твірною функцією), який лінійно залежить від y. Цю функцію визначаємо, як і в [6], з певного гомологічного рівняння у такий спосіб, щоб у результаті зазначеного перетворення гамільтоніан набув вигляду $\mu_1 f_{0,1}(\nu, \mu) + \mu_2 f_{1,1}(\varphi, \nu, \mu) + (\Lambda + \lambda) \cdot y + \mu_1 f_{2,1}(\nu, \mu) \cdot y + \mu_2 f_{3,1}(\varphi, \nu, \mu) \cdot y + g_1(y, \varphi, \nu, \mu) + \beta \cdot \varphi$, в якому вільний член та лінійний за y однозначної складової гамільтоніана зображуються у вигляді сум двох доданків, перший з яких не залежить від кутових змінних, а другий має порядок μ_2, функції $f_{i,j}$ та g_1 є дійсноаналітичними та рівномірно обмеженими за всіма змінними. Одночасно з перетворенням ψ_1 виконуємо перетворення параметрів λ: $\lambda \mapsto \lambda + \widehat{\lambda}_1(\nu, \mu)$, де функцію $\widehat{\lambda}_1(\nu, \mu)$ визначаємо як $\widehat{\lambda}_1(\nu, \mu) = -\mu_1 f_{2,1}(\nu)$, де $\mu_1 f_{2,1}(\nu)$ — середнє за змінними φ по тору $\mathbb{T}^r$ коефіцієнта доданків порядку μ_1 лінійного за y члена. Покладаємо $\phi_1 = \psi_1$, $\Delta_1 = \lambda + \widehat{\lambda}_1$. Ці функції визначені відповідно на множинах $\{(y, \varphi, \lambda, \nu) : |y| < \widetilde{R}, |\operatorname{Im} y| < \mu_1, |\operatorname{Im} \varphi| < \mu_1, |\lambda| < \mu_1^a, |\mathbf{m} \cdot (\sigma\Lambda + \chi\beta)| \geq \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, 0 < |\mathbf{m}| \leq N_2\}$ та $\{(\lambda, \nu) : |\lambda| < \mu_1^a, |\mathbf{m} \cdot (\sigma\Lambda + \chi\beta)| \geq \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, 0 < |\mathbf{m}| \leq N_2\}$, $N_2 = T|\ln \mu_2|$, $a \in (0; 1/2)$, T — додатна стала.

Нехай побудовано перетворення змінних ϕ_k та перетворення параметрів Δ_k, які зводять систему з гамільтоніаном $\widetilde{h}_{\mu,k}(y, \varphi) + (\Lambda + \lambda) \cdot y$ до вигляду $\mu_{k+1} f_{1,k}(\varphi, \nu, \mu) + (\Lambda + \lambda) \cdot y + \mu_{k+1} f_{3,k}(\varphi, \nu, \mu) \cdot y + g_k(y, \varphi, \nu, \mu) + \beta \cdot \varphi$, в якому доданки порядку до μ_k включно вільного члена та лінійного за y однозначної складової гамільтоніана не залежать від кутових змінних.

Перетворення ϕ_k та Δ_k визначені на множинах $\{(y,\varphi,\lambda,\nu) : |y| < \widetilde{R}, |\operatorname{Im} y| < \mu_k, |\operatorname{Im}\varphi| < \mu_k, |\lambda| < \mu_k^a, |\mathbf{m}\cdot(\sigma\Lambda+\chi\beta)| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, 0 < |\mathbf{m}| \le N_{k+1}\}$ та $\{(\lambda,\nu) : |\lambda| < \mu_k^a, |\mathbf{m}\cdot(\sigma\Lambda+\chi\beta)| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, 0 < |\mathbf{m}| \le N_{k+1}\}$, $N_k = T|\ln\mu_k|$, відповідно. Далі до системи з гамільтоніаном $h_{\mu,k+1}(y,\varphi) + (\Lambda+\lambda)\cdot y$ застосовуємо перетворення змінних ϕ_k та перетворення параметрів Δ_k, одержані на попередньому кроці перетворень, в результаті яких гамільтоніан набирає вигляду $\mu_{k+1}\widetilde{f}_{1,k+1}(\varphi,\nu,\mu) + (\Lambda+\lambda)\cdot y + \mu_{k+1}\widetilde{f}_{3,k+1}(\varphi,\nu,\mu)\cdot y + \widetilde{g}_{k+1}(y,\varphi,\nu,\mu) + \beta\cdot\varphi$, в якому доданки порядків до μ_k включно вільного члена та лінійного за y однозначної складової гамільтоніана не залежать від кутових змінних. Після цього виконуємо перетворення ψ_{k+1}, яке є перетворенням зсуву за одиницю часу вздовж траєкторій гамільтонової системи зі спеціальним чином вибраним гамільтоніаном (інфінітезимальною твірною функцією, лінійною за y). У результаті цього перетворення доданки до порядку μ_{k+1} включно вільного члена та лінійного за y однозначної складової гамільтоніана не залежать від кутових змінних, тобто гамільтоніан набуває вигляду $\mu_{k+2}f_{1,k+1}(\varphi,\nu,\mu) + (\Lambda+\lambda)\cdot y + \mu_{k+1}f_{2,k+1}(\nu)\cdot y + \mu_{k+2}f_{3,k+1}(\varphi,\nu,\mu)\cdot y + g_{k+1}(y,\varphi,\nu,\mu) + \beta\cdot\varphi$. Одночасно з перетворенням ψ_{k+1} виконуємо перетворення параметрів $\lambda \mapsto \lambda + \widehat{\lambda}_{k+1}(\nu,\mu)$, де $\widehat{\lambda}_{k+1}(\nu,\mu)$ визначаємо як $\widehat{\lambda}_{k+1}(\nu,\mu) = -\mu_{k+1}f_{2,k+1}(\nu)$, де $\mu_{k+1}f_{2,k+1}(\nu)$ — середнє за змінними φ по тору $\mathbb{T}^r$ коефіцієнта доданка порядку μ_{k+1} лінійного за y члена, при цьому має місце нерівність $|\widehat{\lambda}_{k+1}| < \delta\mu_{k+1}$. Покладемо $\phi_{k+1} = \phi_k\circ\psi_{k+1}$, $\Delta_{k+1} = \Delta_k(\lambda+\widehat{\lambda}_{k+1},\nu)$, які визначені на множинах $\{(y,\varphi,\lambda,\nu) : |y| < \widetilde{R}, |\operatorname{Im} y| < \mu_{k+1}, |\operatorname{Im}\varphi| < \mu_{k+1}, |\lambda| < \mu_{k+1}^a, |\mathbf{m}\cdot(\sigma\Lambda+\chi\beta)| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, 0 < |\mathbf{m}| \le N_{k+2}\}$ та $\{(\lambda,\nu) : |\lambda| < \mu_{k+1}^a, |\mathbf{m}\cdot(\sigma\Lambda+\chi\beta)| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, 0 < |\mathbf{m}| \le N_{k+2}\}$ відповідно.

Отже, в результаті одержуємо послідовність перетворень змінних $\phi_k = \psi_k\circ\cdots\circ\psi_2\circ\psi_1$, $k \ge 1$, та послідовність перетворень поправок (штучних параметрів) Δ_k, $k \ge 1$. Перейшовши до границі при $k \to +\infty$, одержимо близьке до тотожного симплектичне перетворення $(y,\varphi) \mapsto U(y,\varphi,\nu)$, яке на множині параметрів ν

$$|y_0| < R, \quad |\mathbf{m}\cdot(\sigma\Lambda+\chi\beta)| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, \quad \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r\setminus\{0\},$$

зводить гамільтоніан $\widetilde{h}_\mu(y,\varphi) + (\Lambda+\Delta)\cdot y$ ($\Delta = \lim_{k\to+\infty}\Delta_k$) до вигляду $h_\mu^*(y,\varphi) = \Lambda\cdot y + h_*(y,\varphi,\mu) + \beta\cdot\varphi$, де функція h_* задовольняє рівності $h_*|_{y=0} = 0$, $h_{*y}'|_{y=0} = 0$. Одержане граничне перетворення є скінченно диференційовним. Це перетворення можна зробити достатню кількість разів неперервно диференційовним і порядок його гладкості пов'язаний з величиною α (явне співвідношення між порядком гладкості та величиною α можна встановити для кожної конкретної системи).

Множина $y = 0$ є інваріантним тором локально гамільтонової системи з гамільтоніаном h_μ^* і потік на цьому торі задається системою $\dot{\varphi} = \sigma\Lambda + \chi\beta$. Для того щоб встановити існування інваріантного тора вихідної системи з гамільтоніаном h_μ, пов'яжемо параметри y_0, $\beta = \beta_0 + \mu\beta_1$, Λ співвідношенням

$$\Lambda + \Delta(y_0, \beta_0 + \mu\beta_1, \Lambda) = \overline{h}_0{}'(y_0) = \breve{H}_0{}'(y_0),$$

з якого потрібно виразити $\Lambda = \Lambda(y_0, \beta)$. За природніх припущень це можна зробити для всіх досить малих $\mu > 0$, при цьому разом з $\breve{H}_0{}'(y_0)$ гладкою буде і функція $\Lambda(y_0, \beta)$ та буде мало відрізнятись від $\breve{H}_0{}'(y_0)$, а саме, $\Lambda(y_0, \beta) = \breve{H}_0{}'(y_0) + \mu\widetilde{\Lambda}(y_0, \beta)$. Отже, як і в [6], неважко перевірити, що на множині параметрів, яка визначається співвідношеннями

$$\sigma^{\mathrm{T}}(\beta_0 + \mu\beta_1) = 0,$$

$$\forall\, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\} \quad |\mathbf{m} \cdot (\sigma(\breve{H}_0{}'(y_0) + \mu\widetilde{\Lambda}(y_0, \beta)) + \chi(\beta_0 + \mu\beta_1))| \geq \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau},$$

вихідна локально гамільтонова система з гамільтоніаном h_μ має інваріантний тор, заданий у просторі змінних (y, φ) рівнянням $y = F(\varphi, \mu, y_0, \beta)$, де функція F є досить гладкою за змінними φ, а потік на цьому торі є квазіперіодичним з вектором базових частот $\sigma\breve{H}_0{}'(y_0) + \chi\beta_0 + \mathrm{O}(\mu)$.

5. ВИСНОВКИ

У даній роботі розглянуто задачу про збурення умовно інтегровних локально гамільтонових систем. Показано, що за певних умов на незбурену умовно інтегровну систему при малих збуреннях одержана збурена система має інваріантний (центральний) многовид. На цьому інваріантному многовиді індукується система, яка також є локально гамільтоновою. Система на центральному многовиді має інваріантні тори, які несуть на собі квазіперіодичні рухи, що вдалося встановити методами КАМ-теорії з використанням з методом згладжування, запропонованого Ю.Мозером, у поєднанні з методом штучних параметрів.

Використана в даній роботі техніка центрального многовиду не вимагає, на відміну від інших робіт, виконання умови звідності інваріантних торів (див., наприклад, [1]).

[1] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М: Эдиториал УРСС, 2002. – 416 с.

[2] *Боднарук С.Б.* Залежність від параметра функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 419–421.

[3] *Боднарук С.Б., Кулик В.Л.* Про залежність від параметрів обмежених інваріантних многовидів автономних систем диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 6. – С. 747–752.

[4] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. – В 4 т. – М.: Эдиториал УРСС, 1998. – Т. 2: Геометрия и топология многообразий. – 280 с.

[5] *Ловейкін Ю.В., Парасюк І.О.* Інваріантні тори локально гамільтонових систем, близьких до умовно інтегровних // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 1. – С. 71–98.

[6] *Ловейкін Ю.В., Парасюк І.О.* Теорема про збурення коізотропних інваріантних торів локально гамільтонових систем та її застосування // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 4. – С. 490–515.

[7] *Мельников В.К.* О некоторых случаях сохранения условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1965. – **165**, № 6. – С. 1245–1248.

[8] *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 4. – С. 179–238.

[9] *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

[10] *Eliasson L.H.* Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV Ser. – 1988. – **15**, № 1. – P. 115–147.

[11] *Graff S.M.* On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems // J. Differ. Equat. – 1974. – **15**, № 1. – P. 1–69.

[12] *Li Y., Yi Y.* Persistence of hyperbolic tori in Hamiltonian systems // J. Differ. Equat. – 2005. – **208**. – P. 344–387.

[13] *Liu Zh., Yihe D., Huang Q.* Persistence of hyperbolic tori in generalized Hamiltonian systems // Northeast. Math. J. – 2005. – **21**, № 4. – P. 447–464.

[14] *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Comm. Pure Appl. Math. – 1982. – **35**, № 5. – P. 653–695.

[15] *Pöschel J.* On elliptic lower dimensional tori in Hamiltonian systems // Math. Z. – 1989. – **202**, № 4. – P. 559–608.

[16] *Rüssmann H.* Kleine Henner I: Über invariante Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math Phys. Kl. – 1970. – № 5. – P. 67–105.

[17] *Zehnder E.* Generalized implicit function theorems with application to some small divisor problem I // Commun. Pure and Appl. Math. – 1975. – **28**, № 1. – P. 91–140.

[18] *Zehnder E.* Generalized implicit function theorems with application to some small divisor problem II // Commun. Pure and Appl. Math. – 1976. – **29**, № 1. – P. 49–111.

PERTURBATION OF INVARIANT TORI THAT FOLIATE THE CENTRAL MANIFOLD OF CONDITIONALLY INTEGRABLE LOCALLY HAMILTONIAN SYSTEMS

Yuriy LOVEYKIN

National Taras Shevchenko University of Kyiv,
64 Volodymyrska Str., Kyiv 01033, Ukraine

Locally Hamiltonian system close to conditionally integrable is considered. The existence of central manifold of this system under certain conditions on Hamiltonian function of the unperturbed system is proved. The existance of invariant tori of locally Hamiltonian system on central manifold carring quasiperiodic motions is proved by means of KAM-theory methods with using of smooothing method combined with artificial parameters method.