ЗРОСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ У ВИКОЛОТІЙ ПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ

©*2007 р.* *Іван КШАНОВСЬКИЙ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 13 липня 2007 р.

Отримано критерії скінченності λ-типу аналітичної у виколотій площині функції.

Вступ. Позначення та формулювання основних результатів. Критерієм скінченності λ-типу цілої функції f (при довільній функції зростання) є зліченна система умов, яка була встановлена Рубелом та Тейлором в термінах коефіцієнтів Фур'є функції $\log|f|$. За певних умов на λ ця система умов є еквівалентною простішій скінченній системі умов [1, 2]. У даній роботі отримано критерії скінченності λ-типу аналітичної у виколотій площині функції.

Нехай f — мероморфна у виколотій площині $A = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ функція, $n_0(t, f)$ — кількість полюсів функції f в $\{z : 1/t < |z| \le t\}$. Позначимо:

$$N_0(r, f) = \int_1^r \frac{n_0(t, f)}{t} dt, \quad m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$m_0(r, f) = m(r, f) + m(1/r, f) - 2m(1, f), \quad r \ge 1.$$

Означення. ([8]) *Функція $T_0(r, f) = m_0(r, f) + N_0(r, f)$, $r \ge 1$, називається характеристикою Неванлінни функції f в A.*

У праці [8] доведено, що характеристика $T_0(r, f)$ — невід'ємна, неперервна, неспадна, опукла відносно $\log r$ на $[1, +\infty)$ функція.

Функцією зростання будемо називати додатну, неперервну, зростаючу та необмежену на $[1, +\infty)$ функцію.

УДК 517.53; MSC 2000: 30D15, 30D35

Означення. ([10]) *Нехай $\lambda(r)$ — функція зростання. Функція $f(z)$ називається функцією скінченного λ-типу, якщо існують такі додатні сталі B, C, що $T_0(r,f) \leq B\lambda(Cr)$ для всіх $r \geq 1$.*

Клас таких аналітичних функцій при фіксованій функції λ позначатимемо через $\Lambda_H(A)$.

Нагадаємо, що порядком та нижнім порядком за Пойя функції зростання λ називають відповідно величини [7]

$$\rho^* = \rho^*[\lambda] := \sup\left\{p : \limsup_{r,\tau\to+\infty} \frac{\lambda(\tau r)}{\tau^p \lambda(r)} = +\infty\right\},$$

$$\mu_* = \mu_*[\lambda] := \inf\left\{p : \limsup_{r,\tau\to+\infty} \frac{\lambda(\tau r)}{\tau^p \lambda(r)} = 0\right\}.$$

Порядок та нижній порядок за Пойя функції зростання λ можна визначити інакше

$$\rho^*[\lambda] = \limsup_{r,\tau\to+\infty} \frac{\log\lambda(\tau r) - \log\lambda(r)}{\log\tau},$$

$$\mu_*[\lambda] = \liminf_{r,\tau\to+\infty} \frac{\log\lambda(\tau r) - \log\lambda(r)}{\log\tau},$$

Наведені вище два означення є відповідно попарно еквівалентними [4]. Зауважимо, що $\rho^*[\lambda] < +\infty$ тоді і тільки тоді, коли існує така стала $M > 0$, що

$$\lambda(2r) \leq M\lambda(r), \tag{1}$$

для всіх $r \geq r_0$ при деякому $r_0 > 0$.

Через ρ позначатимемо порядок функції зростання λ, тобто [5]

$$\rho = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\lambda(r)}{\log r}.$$

Порядком функції $f \in \Lambda_H(A)$ називатимемо порядок її характеристики $T_0(r,f)$.

Для подальших викладок нам знадобиться наступне твердження.

Лема А. ([11]) *Нехай f — аналітична в $D = \{z : 1/R_0 < |z| < R_0\}$, $1 < R_0 \leq \infty$, функція без нулів. Тоді для довільного замкненого шляху γ в D, який проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k} f(z)$ виконується рівність*

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0.$$

Насправді справедливе загальніше твердження.

Лема B. *Нехай f — аналітична в $E = \{z : r_0 < |z| < R_0\}$, $0 \le r_0 < 1$, $1 < R_0 \le +\infty$, функція без нулів. Тоді для довільного замкненого шляху γ в E, який проходить через точку $z_0 = 1$, існує $k \in \mathbb{Z}$, що для функції $g(z) = z^{-k} f(z)$ виконується рівність*

$$\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0.$$

Доведення леми B цілком повторює доведення леми A, оскільки в доведенні леми A не використовується симетричність області аналітичності функції; важливо, що коло $\{z : |z| = 1\}$ є підмножиною цієї області.

Через $\{a_s\}$ будемо позначати послідовність нулів, а через $\{b_j\}$ — послідовність полюсів функції $f(z)$ в A. Розглянемо функцію

$$\varphi(z) = f(z) \prod_{j:|b_j|=1} (z - b_j) \prod_{s:|a_s|=1} (z - a_s)^{-1}.$$

Функція $\varphi(z)$ не має ні нулів, ні полюсів на одиничному колі $\{z : |z| = 1\}$. Розвинемо її логарифмічну похідну в ряд Лорана в околі цього кола

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k. \tag{2}$$

Звідси отримаємо, що

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k z^k + \sum_{|a_s|=1} \frac{1}{z - a_s} - \sum_{|b_j|=1} \frac{1}{z - b_j}.$$

Лема B гарантує існування такого $m \in \mathbb{Z}$, що в області A^* (де A^* — це область A з радіальними розрізами від нулів та полюсів функції $f(z)$) можна визначити однозначну вітку $\log F(z)$, де $F(z) = z^{-m}\varphi(z)$. Справді, нехай $z_0 = 1$ і $\log F(z_0)$ є визначеним. Приймемо

$$\log F(z) = \log F(z_0) + \int_{z_0}^{z} \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}\, d\zeta,$$

де інтеграл обчислюється вздовж шляху, який з'єднує z_0 і z в A^*. Оскільки $F(z)$ не має ні нулів, ні полюсів на одиничному колі, то функція

$\log F(z)$ є аналітичною в околі цього кола і допускає розвинення в ряд Лорана

$$\log F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k z^k.$$

Тоді

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\alpha_k z^{k-1}.$$

З іншого боку,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{m}{z}.$$

Звідси випливає, що $\beta_{k-1} = k\alpha_k$, $k \neq 0$, $\beta_{-1} = m$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай λ — така функція зростання, що $\rho^* = \rho^*[\lambda] < +\infty$. Якщо $f \in \Lambda_H(A)$, то існує така стала $a > 0$, що для всіх $r \geq 1$ виконуються оцінки*

$$N_0(r, 1/f) \leq a\lambda(r), \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\sum_{1<|a_s|<r} a_s^{-k}\right| + \left|\overline{\alpha}_{-k} + \frac{1}{k}\sum_{\frac{1}{r}<|a_i|\leq 1} (\overline{a}_i)^k\right|\right) \leq a\frac{\lambda(r)}{r^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Якщо аналітична в A функція f порядку не вище ρ^* справджує умову (3) та умову (4) при $k \in [\mu_*; \rho^*]\bigcap\mathbb{N}$, то $f \in \Lambda_H(A)$.

Означення. ([5]) *Коливним уточненим порядком у розумінні Бутру називається така додатна, неперервно диференційовна на $(1, +\infty)$ функція $l(r)$, що*

1) $0 \leq \alpha := \liminf\limits_{r\to+\infty} l(r), \quad \beta := \limsup\limits_{r\to+\infty} l(r) < +\infty.$

2) $l'(r)r\log r \to 0$ *при* $r \to +\infty$.

При цьому, якщо $\alpha = \beta := \rho = \lim\limits_{r\to+\infty} l(r)$ та $l'(r)r\log r \to 0$, $r \to +\infty$, то функцію $l(r)$ називають уточненим порядком у розумінні Ліндельофа.

Наслідок. *1) Нехай $l(r)$ — коливний уточнений порядок у розумінні Бутру, $\lambda(r) = r^{l(r)}$. Якщо аналітична в A функція f порядку не вищого, ніж β, справджує умову (3) у випадку, коли $[\alpha, \beta]\bigcap\mathbb{N} = \varnothing$, або умову (3) та умову (4) при $k \in [\alpha, \beta]\bigcap\mathbb{N} \neq \varnothing$, то $f \in \Lambda_H(A)$.*

2) Нехай $l(r)$ — уточнений порядок у розумінні Ліндельофа, $\lambda(r) = r^{l(r)}$. Якщо аналітична в A функція f порядку не вищого, ніж $\rho = \rho[\lambda]$, *справджує умову* (3) *у випадку, коли* $\rho \notin \mathbb{N}$, *або умову* (3) *та умову* (4) *при* $k = \rho \in \mathbb{N}$, *то* $f \in \Lambda_H(A)$.

Допоміжні твердження та результати. Запровадимо такі позначення:

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \log |f(re^{i\theta})| \, d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < r < +\infty,$$

$$m_q(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(re^{i\theta})|| \, d\theta \right\}^{1/q}, \quad r > 0, \quad q \geq 1.$$

Доведення сформульованої теореми спирається на наступні твердження.

Теорема A. ([10]) *Нехай* $f(z)$ — *аналітична в області* A *функція. Тоді для* $1 \leq r < +\infty$, $k \neq 0$, *виконуються співвідношення*

$$c_0(r, f) + c_0(1/r, f) - 2c_0(1, f) = N_0(r, 1/f),$$

$$c_k(r, f) = \frac{\alpha_k r^k + \overline{\alpha}_{-k} r^{-k}}{2} + \frac{1}{2k} \sum_{1 < |a_s| \leq r} \left(\left(r a_s^{-1} \right)^k - \left(\overline{a}_s r^{-1} \right)^k \right),$$

$$c_k(1/r, f) = \frac{\alpha_k r^{-k} + \overline{\alpha}_{-k} r^k}{2} + \frac{1}{2k} \sum_{1/r \leq |a_s| \leq 1} \left((\overline{a}_s r)^k - (a_s r)^{-k} \right).$$

Теорема B. ([10]) *Наступні твердження еквівалентні:*

1) $f \in \Lambda_H(A)$;

2) для деяких додатних B, C *і всіх* $r \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$|c_k(r, f)| + |c_k(1/r, f)| \leq B\lambda(Cr);$$

3) для деяких додатних B, C *і всіх* $r \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$|c_k(r, f)| + |c_k(1/r, f)| \leq \frac{B\lambda(Cr)}{|k| + 1};$$

4) Якщо $1 \leq q < +\infty$, *то для певних додатних* B_q, C_q *і всіх* $r \geq 1$,

$$m_q(r, f) + m_q(1/r, f) \leq B_q \lambda(C_q r). \tag{5}$$

Навпаки, якщо (5) *виконується для деякого* $q \geq 1$, *то* $f \in \Lambda_H(A)$.

Доведення теореми. Нехай $f \in \Lambda_H(A)$. З теореми B випливає, що знайдуться такі додатні сталі B, C для яких

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \le B\lambda(Cr), \quad r \ge 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Виберемо таке $m_0 \in \mathbb{N}$, що $2^{m_0} > C$. Враховуючи оцінку (1), отримаємо

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \le B\lambda(2^{m_0}r) \le BM\lambda(2^{m_0-1}r) \le BM^{m_0}\lambda(r), \; k \in \mathbb{Z},$$

для деякого $M > 0$ і всіх $r \ge 1$; тобто існує така стала $a > 0$, що $|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \le a\lambda(r)$. Для $k = 0$ отримаємо нерівність (3). Зауважимо, що оскільки ряд (2) збігається в точці $z = 1$, то звідси дістаємо, що

$$\alpha_k = O\left(|k|^{-1}\right), \quad |k| \to +\infty. \tag{6}$$

З теореми A випливає, що

$$\frac{1}{2}\left(\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\sum_{1<|a_s|<r} a_s^{-k}\right| + \left|\overline{\alpha}_{-k} + \frac{1}{k}\sum_{\frac{1}{r}<|a_s|\le 1} \overline{a}_s^{k}\right|\right) \le$$

$$\le \frac{|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)|}{r^k} + \frac{|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|}{r^{2k}} + \frac{1}{2|k|r^{2k}}\sum_{1<|a_s|<r} |\overline{a}_s|^k +$$

$$+\frac{1}{2|k|r^{2k}}\sum_{1/r<|a_s|\le 1} |a_s|^{-k} \le \frac{|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)|}{r^k} + \frac{|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|}{r^{2k}} +$$

$$+\frac{n_0(r,1/f)}{2|k|r^k} \le \frac{B_1\lambda(C_1 r)}{r^k},$$

адже

$$n_0(r,1/f) \le \int_r^{er} \frac{n_0(t,1/f)}{t}dt \le N_0(er,1/f).$$

З нерівності $B_1\lambda(C_1 r) \le a_1\lambda(r)$, яка виконується для деякого $a_1 > 0$ і всіх $r \ge 1$, одержуємо оцінку (4).

Нехай тепер $f(z)$ — аналітична в області A функція порядку $\rho < \rho^*$, для якої виконуються нерівності (3) та (4) при $k \in [\mu_*, \rho^*] \bigcap \mathbb{N}$. Оскільки $c_{-k}(r,f) = \overline{c}_k(r,f)$, досить розглянути випадок, коли $k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що оскільки $e < 4$, то

$$n_0(r,1/f) \le N_0(4r,1/f) \le a\lambda(4r) \le aM^2\lambda(r). \tag{7}$$

Для $k > \rho^* > \rho$ коефіцієнти $c_k(r,f)$, $c_k(1/r,f)$ можна записати в такому вигляді [6]:

$$c_k(r,f) = \frac{1}{2}\overline{\alpha}_{-k}r^{-k} - \frac{1}{2k}\left(\sum_{|a_s|>r}\left(ra_s^{-1}\right)^k + \sum_{1<|a_s|\le r}\left(\overline{a}_s r^{-1}\right)^k\right),$$

$$c_k(1/r,f) = \frac{1}{2}\alpha_k r^{-k} - \frac{1}{2k}\left(\sum_{|a_s|<1/r}(r\overline{a}_s)^k + \sum_{1/r<|a_s|\le 1}(ra_s)^{-k}\right).$$

Звідси одержимо, що

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \le \frac{1}{2}\left(|\alpha_k| + |\alpha_{-k}|\right)r^{-k} +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{|a_s|>r}\left(\frac{r}{|a_s|}\right)^k + \frac{1}{2k}\sum_{1<|a_s|\le r}\left(\frac{|a_s|}{r}\right)^k + \frac{1}{2k}\sum_{|a_s|<1/r}(r|a_s|)^k +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{1/r<|a_s|\le 1}(r|a_s|)^{-k} \le \frac{1}{2}\left(|\alpha_k| + |\alpha_{-k}|\right)r^{-k} + \frac{r^k}{2}\int_r^{+\infty}\frac{n_0(t,1/f)}{t^{k+1}}dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(|\alpha_k| + |\alpha_{-k}|\right)r^{-k} + \frac{aM^2}{2}r^k\int_r^{+\infty}\frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt, \quad k > \rho^*. \tag{8}$$

Останній інтеграл будемо оцінювати, як і в роботах [1, 2]. Для цього зробимо заміну $t = r\tau$. Тоді

$$r^k\int_r^{+\infty}\frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = \int_1^{+\infty}\frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}}d\tau = \lambda(r)\int_1^{+\infty}\frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}\lambda(r)}d\tau.$$

Нехай $\varepsilon = ([\rho^*] + 1 - \rho^*)/2$. Враховуючи, що $\frac{\lambda(r\tau)}{\lambda(r)\tau^{\rho^*+\varepsilon}} \le C_1$, одержимо

$$\frac{aM^2r^k}{2}\int_r^{+\infty}\frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = C_2\lambda(r)\int_1^{+\infty}\frac{\lambda(r\tau)}{\tau^{k+1}\lambda(r)}d\tau \le C_3\int_1^{+\infty}\tau^{-k+\rho^*+\varepsilon-1}d\tau =$$

$$= \frac{C_3}{k-\rho^*-\varepsilon}\lambda(r) \le \frac{2C_3}{[\rho^*]+1-\rho^*}\lambda(r) = C_4\lambda(r), \quad k > \rho^*.$$

Враховуючи цю нерівність, оцінку (8) та співвідношення (6), одержимо, що

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \le C_5\lambda(r), \quad k > \rho^*. \tag{9}$$

Залишається показати, що аналогічні співвідношення виконуються і для $1 \le k \le \rho^*$. Із співвідношень (3), (4) та теореми A випливає, що

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left|\alpha_k + \frac{1}{k}\sum_{1<|a_s|<r}(a_s)^{-k}\right| + \left|\overline{\alpha}_{-k} + \frac{1}{k}\sum_{\frac{1}{r}<|a_s|\le 1}(\overline{a}_s)^k\right|\right)r^k +$$

$$+(|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|)r^{-k} + \frac{1}{2k}\left(\sum_{1<|a_s|<r}|\overline{a}_s|^k + \sum_{1/r<|a_s|\le 1}|a_s|^{-k}\right)r^{-k} \le$$

$$\le a\lambda(r) + (|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|)r^{-k} + n_0(r,1/f) \le$$

$$\le a\lambda(r) + (|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|)r^{-k} + aM^2\lambda(r) \le B\lambda(r), \tag{10}$$

де $\mu_* \le k \le \rho^*$. У випадку, коли $\mu_* \le 1$, на підставі теореми B із співвідношень (3), (9), (10) дістаємо, що $f \in \Lambda_H(A)$. Якщо ж $\mu_* > 1$, то при $1 \le k < \mu_*$ з теореми A випливає, що

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r),f)| \le \frac{1}{2}(|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|)(r^k + r^{-k}) +$$

$$+\frac{1}{2k}\sum_{1<|a_s|<r}\left|\left(\frac{r}{a_s}\right)^k - \left(\frac{\overline{a}_s}{r}\right)^k\right| + \frac{1}{2k}\sum_{1/r<|a_s|\le 1}\left|(\overline{a}_s r)^k - (a_s r)^{-k}\right|.$$

Враховуючи, що $\left|a - \frac{1}{\overline{a}}\right| = |a| - \frac{1}{|a|}$ при $|a| \ge 1$, та використовуючи властивості інтеграла Стільтьєса, одержимо

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \le$$

$$\le \frac{1}{2}(|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|)(r^k + r^{-k}) + \frac{1}{2}n_0(r,1/f) + \frac{r^k}{2}\int_1^r \frac{n_0(t,1/f)}{t^{k+1}}\,dt.$$

Тоді з оцінок (7) дістаємо

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r),f)| \le$$

$$\le \frac{1}{2}(|\alpha_k| + |\overline{\alpha}_{-k}|)(r^k + r^{-k}) + C_6\lambda(r) + C_6 r^k\int_1^r \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}\,dt. \tag{11}$$

Подальші міркування проведемо за схемою, подібною до запропонованої в роботі [2]. Нехай $\varepsilon = (\mu_* - k_0)/2$, де $k_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : k < \mu_*\}$. Тоді при $1 \le k < \mu_*$, згідно з означенням нижнього порядку за Пойя, існують такі $\tau_0, t_0 \geq 1$, що для будь-яких $\tau \geq \tau_0, t \geq t_0$ виконується оцінка

$$\lambda(\tau t) \geq \lambda(t)\tau^{\mu_* - \varepsilon} \geq \lambda(t)\tau^k.$$

Звідси отримаємо, що при деякому $C_7 > 0$ справджується нерівність

$$\tau^k \leq \lambda(t_0\tau)/\lambda(t_0) \leq C_7\lambda(\tau), \quad \tau \geq 1, \tag{12}$$

а для всіх $t \in [t_0, r/\tau_0]$, де $r \geq t_0\tau_0$, — нерівність

$$\lambda(t) \leq \lambda(r)\left(\frac{t}{r}\right)^{\mu_* - \varepsilon}. \tag{13}$$

З огляду на формули (12) та (13) оцінка (11) набуває такого вигляду:

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \leq$$
$$\leq C_8\lambda(r) + C_6 r^k \int_1^{t_0} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt + C_6 r^k \int_{t_0}^{r/\tau_0} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt + C_6 r^k \int_{r/\tau_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \leq$$
$$\leq C_9\lambda(r) + C_6\lambda(r)\int_{t_0}^{r/\tau_0}\left(\frac{t}{r}\right)^{\mu_* - k - \varepsilon}\frac{dt}{t} + C_6\lambda(r)\int_{r/\tau_0}^{r}\left(\frac{r}{t}\right)^k\frac{dt}{t} \leq$$
$$\leq C_{10}\lambda(r), \quad r \geq t_0\tau_0, \quad 1 \leq k < \mu_*,$$

де C_{10} — деяка додатна стала. Оскільки сума $|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)|$ є неперервною за r, то для всіх $r \in [1, t_0\tau_0]$

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \leq \frac{C_{11}}{\lambda(r)}\lambda(r) \leq \max_{r\in[1,\, t_0\tau_0]}\left(\frac{C_{11}}{\lambda(r)}\right)\lambda(r) \leq C_{12}\lambda(r).$$

Остаточно отримуємо, що

$$|c_k(r,f)| + |c_k(1/r,f)| \leq C\lambda(r), \quad 1 \leq k < \mu_*, \quad r \geq 1, \tag{14}$$

де $C = \max\{C_{10}, C_{12}\}$. Отже, співвідношення (3), (4), (9), (10), (14) разом з теоремою B забезпечують належність функції f до класу $\Lambda_H(A)$.

Теорему доведено.

Доведення наслідку. Нехай $\lambda(r) = r^{l(r)}$, де $l(r)$ — коливний уточнений порядок у розумінні Бутру (або $l(r)$ — уточнений порядок у розумінні Ліндельофа), $0 \leq \alpha \leq \beta < +\infty$. З огляду на той факт (див., наприклад, [3]), що $\mu_* = \alpha$, $\rho^* = \beta$, всі твердження цього наслідку є частковим випадком тверджень доведеної нами теореми. При цьому, якщо $[\mu_*, \rho^*]\bigcap\mathbb{N}=\varnothing$, то за доведеним вище (див. співвідношення (9), (14)) для всіх $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ справджуються нерівності

$$|c_k(r,f)|+|c_k(1/r,f)|\le C^*\lambda(r),$$

де C^* — деяка додатна стала. Отже, у цьому випадку тільки одна умова (3) є необхідною і достатньою умовою належності аналітичної в A функції f до класу $\Lambda_H(A)$.

Зауважимо, що умова другої частини теореми про те, що порядок мероморфної в A функції не перевищує $\rho^*[\lambda]$ є істотною. Дійсно, нехай $\rho^*\ge 1$. Виберемо натуральне $n\in\mathbb{N}$ таким, що $n>\rho^*$. Розглянемо функцію $f(z)=e^{z^n}$. Оскільки $f(z)$ не має нулів, то умова (3) для неї виконується. Окрім того, $\log f(z)=z^n$. Отже, $\alpha_k=\alpha_{-k}=0, k\in[1,\rho^*]\bigcap\mathbb{N}$, функція справджує також умову (4). Її характеристика дорівнює

$$T_0(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(r^{-1}e^{i\theta})|d\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(e^{i\theta})|d\theta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(r^n+\frac{1}{r^n}-2\right)\int_0^{2\pi}\cos^+(n\theta)d\theta=\frac{1}{\pi}\left(r^n+\frac{1}{r^n}-2\right).$$

Порядок функції $\lambda(r)$ не перевищує ρ^*. Оскільки $\rho^*<n$, то $\lambda(r)=o(T(r))$, $r\to+\infty$. Отже, $f\notin\Lambda_H(A)$.

Наслідок доведено.

[1] *Бридун А.М., Лизун О.Я., Мицик Р.З.* Узагальнення теореми Ліндельофа для цілих функцій // Вісн. Львів. ун-ту. – 2000. – Вип. 56. – С. 20–27.

[2] *Васильків Я.В., Кондратюк А.А.* Узагальнені умови Ліндельофа скінченності λ–типу субгармонійної функції // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54. – С. 276–279.

[3] *Васильків Я.В., Кондратюк А.А.* Порівняння характеристик зростання додатних функцій // Математичні Студії. – 1998. – 10, № 1. – С. 23–32.

[4] *Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В.* Целые и мероморфные функции. – Итоги науки и техники. ВИНИТИ, 1970. – Т. 85. – С. 5–185.

[5] *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. – М: Наука, 1970. – 591 с.

[6] *Кшановський I.* Одна екстремальна задача для мероморфних в проколеній площині функцій // Вісн. Львів. ун-ту. – 2006. – Вип. 66. – C. 88–98.

[7] *Drasin D., Shea D.* Polya peaks and oscillation of positive functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 34, No 2. – P. 403–411.

[8] *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I // Matematychni Studii. – 2005. – 23. – P. 19–30.

[9] *Khrystiyanyn A., Kondratyuk A.* On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II // Matematychni Studii. – 2005. – 24. – P. 57–68.

[10] *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains. – Joensuu-L'viv, 2006. – 116 p.

[11] *Kshanovskyy I.* An analog of Poisson–Jensen formula for annuli // Matematychni Studii. – 2005. – **24**. – P. 147–158.

GROWTH OF ANALYTIC FUNCTIONS OF FINITE λ-TYPE IN A PUNCTURED PLANE

Ivan KSHANOVSKYY

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

We obtain criteria of finite λ-type of analytic in a punctured plane functions.