ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

©*2007 р. Олег ЛИТВИН*

Українська інженерно-педагогічна академія,
вул. Університетська, 16, Харків 61003

Редакція отримала статтю 22 липня 2007 р.

Викладено основні положення теорії наближення звичайних диференціальних операторів іншими звичайними диференціальними операторами. Наближуючий і наближуваний оператори збігаються на заданій системі функцій (функціональних вузлів).

1. ВСТУП

1.1. Постановка проблеми. Теорія наближення функцій однієї та багатьох змінних включає в себе — як важливий частинний випадок — теорію інтерполяції. Оператори $L_n u(x)$ інтерполяції функції $u(x)$ відновлюють (взагалі кажучи, наближено) цю функцію між заданими точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, якщо відомі значення цієї функції або значення деякої системи операторів (зазвичай диференціальних або інтегро-диференціальних) від $u(x)$ у вказаних точках:

$$B_{k,s}u(x_k) = \gamma_{k,s}, \quad 0 \le s \le \rho_k - 1, \quad 0 \le k \le n, \quad \rho_0 + \ldots + \rho_n = M.$$

При цьому вимагається, щоб наближуючий (інтерполяційний) оператор $L_n u(x)$ мав такі ж властивості у вказаних точках, що й наближувана функція $B_{k,s}L_n u(x_k) = \gamma_{k,s}$, $0 \le k \le n$, $0 \le s \le \rho_k - 1$. Для функцій двох та більшої кількості змінних поняття інтерполяції знайшло своє узагальнення у вигляді операторів інтерлінації та інтерфлетації, у яких інформація про наближувану функцію задається на системі ліній або поверхонь (якщо змінних більше двох). Ці оператори мають важливі застосування [4, 5].

УДК 519.6; MSC 2000: 47E05

У даній роботі розглядається наступна задача. Деякий звичайний диференціальний оператор $A : U \to \Gamma$ (взагалі кажучи, невідомий) задається наступними інтерполяційними даними:

$$Au_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \quad 0 \le \beta \le n,$$

де функціональні вузли $u_\beta(x)$ і функції $\gamma_\beta(x)$, $0 \le \beta \le n$, вважаються заданими елементами деяких функціональних просторів U, Γ відповідно. За допомогою цієї інформації потрібно побудувати інший диференціальний оператор (лінійний або нелінійний заданої структури), який має такі ж інтерполяційні властивості.

1.2. Аналіз літератури. У даній роботі з терміном „теорія інтерполяції операторів“ будемо пов'язувати теорію наближення операторів шляхом розв'язання наступної основної задачі. Для заданого оператора $Au(x)$ і набору функціональних вузлів u_β, $0 \le \beta \le n$, побудувати наближуючий оператор $A_n u(x)$ із властивостями $A_n u_\beta(x) = \gamma_\beta(x) := Au(x)$, $0 \le \beta \le n$. Деякі важливі результати, які стосуються побудови поліноміальних наближуючих операторів у вигляді операторних поліномів P_n степеня n, визначених на множині функцій $u \in X$ зі значеннями в просторі Y (X, Y — деякі лінійні простори), наведені у працях [2, 8–11]. Символ P_n означає оператор

$$P_n u = \sum_{k=0}^{n} L_k u^k,$$

де $L_0 u^0 = L_0 \in Y$, $L_k u^k = L_k \underbrace{(u, u, \ldots, u)}_{k}$ — k-ий операторний степінь, отриманий з полілінійного симетричного оператора $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) : X^k \to Y$, $k = 1, \ldots, n$, при $v_1 = \ldots = v_k = u$, $v_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$. Для деякого оператора F потрібно знайти такий операторний поліном P_n, який задовольняє інтерполяційні умови

$$P_n(u_\beta(x)) = A(u_\beta(x)) = \gamma_\beta(x), \quad 1 \le \beta \le m,$$

де $\{u_\beta(x)\}_{\beta=1}^{m}$ — задана система вузлів $u_\beta(x) \in X$. У цитованих роботах [2, 8–11] значну увагу приділено тому випадку, коли

$$P_n u = k_0(t) + \int_{\Omega_1} k_1(t, z_1) du(z_1) + \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_1} k_2(t, z_1, z_2) du(z_1) du(z_2) + \ldots +$$

$$+ \int_{\Omega_1} \ldots \int_{\Omega_1} k_n(t, z_1, \ldots, z_n) du(z_1) \cdots du(z_n),$$

де $k_0(t) \in \mathbb{R}$, $k_p(t, z_1, \dots, z_p)$, $p = 1, \dots, n$, — неперервні та симетричні функції своїх змінних. Відзначимо окремо роботу [12], у якій класичні поліноми Лагранжа і Ерміта узагальнено на випадок операторного інтерполювання. Однак у цитованих роботах наближуючий оператор є операторним поліномом, а не диференціальним оператором, навіть якщо наближуваний оператор A є диференціальним оператором.

У працях автора [6,7] вперше розглянуто важливий з практичної точки зору випадок, коли наближуваний і наближуючий оператори є диференціальними операторами (звичайними або з частинними похідними). Дана праця присвячена доведенню деяких тверджень роботи [6]. Відзначимо, що вся теорія наближення функцій свідчить, що врахування класу наближуваних функцій дозволяє отримати більш точне наближення до них. Зокрема, теорія наближення, у якій на множині наближуваних елементів знайдеться такий, що точно може бути наближений, повинна розглядатись як більш якісна теорія наближення порівняно з теорією, що не має цієї властивості. Сказане цілком стосується наближення диференціальних операторів. Наприклад, теорія розділених різниць якнайкраще зарекомендувала себе при наближенні диференціальних операторів. Але у цій теорії не існує такої розділеної різниці, яка б точно зображувала похідну хоча б одного порядку. В той же час існують практичні задачі, у яких наближуваний нелінійний диференціальний оператор доцільно замінити іншим диференціальним оператором простішої конструкції (наприклад, лінійним чи поліноміальним).

Відзначимо, що у виразі $A(x, D)u(x)$, $D = d/dx$, для наближення оператора $A(x, D)$ можна використовувати або не використовувати функцію $u(x)$. Перший випадок полягає у наближеному відновленні оператора $A(x, D)$ з умов (1), визначених нижче. Другий випадок пов'язаний з наближенням формули $A(x, D)$ деякою іншою формулою, яку можна розглядати як функцію змінної x, що залежить від параметра D.

Зауважимо також, що у математиці до недавнього часу у словосполучення „інтерполювання операторів“ вкладався інший зміст [1, 3].

2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ВУЗЛІВ

Розглянемо спочатку інтерполяцію звичайних диференціальних операторів за результатами їхньої дії $A(x, D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $0 \le \beta \le n$, на функціональні вузли $u(x) = u_\beta(x)$, $0 \le \beta \le n$.

2.1. Наближення лінійними диференціальними операторами. Припустимо, що $A(x, D)$ — деякий, взагалі кажучи, невідомий звичайний диференціальний оператор. Інформація про нього задана таким чином:

$$A(x, D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \quad 0 \le \beta \le n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$\sum_{\beta=0}^{n} |\gamma_\beta(x)| \ne 0, \quad x \in E = [0, 1].$$

Задача полягає у побудові звичайного лінійного диференціального оператора n-го порядку

$$L_n(x, D)u(x) = \sum_{0 \le \alpha \le n} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad D^0 u(x) \equiv u(x), \tag{2}$$

невідомі коефіцієнти $a_\alpha(x)$, $0 \le \alpha \le n$, якого знаходяться з умов

$$L_n(x, D)u(x) = \gamma_\beta(x), \quad 0 \le \beta \le n. \tag{3}$$

Нижче встановимо умови, яким повинна задовольняти система функцій $u_\beta(x)$, $0 \le \beta \le n$, для того, щоб задача (2)–(3) мала єдиний розв'язок, і знайдемо явні аналітичні вирази для оператора $L_n(x, D)u(x)$. Наведемо аналітичні вирази для нелінійних інтерполяційних операторів першого порядку $\overline{A}_n(x, D)u(x) = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(x)(Du(x))^\alpha$, а також інтегральні зображення для залишків наближення операторів $A(x, D)$, що задовольняють умову $A(x, D)u(x) = A(x, Du(x))$, за допомогою нелінійних диференціальних операторів першого порядку $\overline{A}_n(x, D)u(x)$.

Теорема 1. *Для того щоб на інтервалі $x \in E$ задача* (2)–(3) *мала єдиний розв'язок $a_0(x), \ldots, a_n(x)$, необхідно й досить, щоб система функцій $u_\beta(x)$, $0 \le \beta \le n$, задовольняла умову*

$$\Delta = \det W(x) \ne 0, \quad x \in E, \tag{4}$$

де $W(x) = \|D^\alpha u_\beta(x)\|_{\alpha,\beta=0}^{n}$. При цьому шуканий оператор $L_n(x, D)u(x)$ можна зобразити у вигляді

$$L_n(x, D)u(x) = \Gamma(x) W^{-1}(x) \|I, D, \ldots, D^n\|^T u(x), \tag{5}$$

де I — тотожній оператор, $\Gamma(x) = \|\gamma_0(x), \gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x)\|$.

Доведення. Якщо врахувати вираз (2) для шуканого оператора, то рівності (3) можна записати у вигляді

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(x) D^\alpha u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \quad 0 \le \beta \le n. \tag{6}$$

Зауважимо, що умова (4) означає відмінність від нуля визначника Вронського $\det W(x)$, тобто лінійну незалежність системи вузлів $u_\beta(x)$, $0 \le \beta \le n$. Введемо позначення: $a = a(x) = \|a_0(x), \ldots, a_n(x)\|$. Тоді систему (6) можна переписати у наступній матричній формі

$$aW = \Gamma. \tag{7}$$

Згідно з теорією лінійних алгебричних рівнянь, для того щоб система (7) на інтервалі $x \in E$ мала єдиний розв'язок необхідно й досить, щоб на цьому інтервалі виконувалось співвідношення (4). Таким чином, умову (4) встановлено. При цьому

$$a(x) = \Gamma(x) W^{-1}(x), \tag{8}$$

тобто явний вираз для шуканого диференціального оператора можна подати у наступній формі

$$L_n(x, D)u(x) = a(x)\|I, D, \ldots, D^n\|^T u(x) =$$

$$= \Gamma(x) W^{-1}(x)\|I, D, \ldots, D^n\|^T u(x).$$

Отже, і формулу (5) доведено.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то інтерполяційний оператор $L_n(x, D)u(x)$ — єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існує ще один оператор $L_n^*(x, D)u(x)$ із вказаними інтерполяційними властивостями

$$L_n^*(x, D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x), \quad 0 \le \beta \le n.$$

Тоді диференціальний оператор $F_n(x, D) = (L_n(x, D) - L_n^*(x, D))$ n-го порядку буде задовольняти однорідні інтерполяційні умови

$$F_n(x, D)u_\beta(x) = 0, \quad 0 \le \beta \le n.$$

За теоремою 1 для такого оператора отримуємо, що $F_n(x, D)u(x) = 0$ для всіх $u(x)$. Звідси дістаємо $L_n(x, D) - L_n^*(x, D) = 0$, тобто $L_n(x, D) = L_n^*(x, D)$. З одержаної суперечності випливає істинність теореми 2.

Нижче дамо іншу формулу для зображення операторів $L_n(x, D)u(x)$, еквівалентну формулі (4).

Теорема 3. *Оператор* $L_n(x, D)u(x)$ *можна зобразити також за допомогою формули*

$$L_n(x, D)u(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u_0(x) & \dots & D^n u_0(x) & \gamma_0(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n(x) & \dots & D^n u_n(x) & \gamma_n(x) \\ u(x) & \dots & D^n u(x) & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Доведення. Розвинемо визначник (9) за елементами $(n+1)$-го рядка

$$L_n(x, D)u(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} A_{n+2,\alpha}(x) D^{\alpha} u(x),$$

де $A_{n+2,\alpha}(x)$ — алгебричні доповнення елементів визначника (9), що знаходяться на перетині останнього $(n+2)$-го рядка і стовпця з номером α, $0 \leq \alpha \leq n$. Таким чином, формула (9) визначає звичайний лінійний диференціальний оператор n-го порядку. Для того, щоб довести, що цей оператор задовольняє умови (3), підставимо у формулу (9) замість функції $u(x)$ функцію $u_\beta(x)$. У результаті отримаємо

$$L_n u_\beta(x) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} u_0(x) & \dots & D^n u_0(x) & \gamma_0(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n(x) & \dots & D^n u_n(x) & \gamma_n(x) \\ u_\beta(x) & \dots & D^n u_\beta(x) & 0 \end{vmatrix}.$$

Віднімаючи від рядка з номером β, $0 \leq \beta \leq n$, останній рядок і розвиваючи отриманий визначник за елементами β-го рядка, отримаємо

$$L_n(x, D)u_\beta(x) = \frac{\gamma_\beta(x)(-1)^{\beta+n+2}}{\Delta} \begin{vmatrix} u_0(x) & \dots & D^n u_0(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{\beta-1}(x) & \dots & D^n u_{\beta-1}(x) \\ u_{\beta+1}(x) & \dots & D^n u_{\beta+1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_\beta(x) & \dots & D^n u_\beta(x) \end{vmatrix}.$$

Безпосередніми підрахунками можна впевнитись у тому, що

$$L_n(x, D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x)(-1)^{n-\beta}(-1)^{\beta+n+2}\Delta/\Delta = \gamma_\beta(x), \quad 0 \leq \beta \leq n.$$

Таким чином, обидві формули (5) і (9) дають звичайні лінійні диференціальні оператори n-го порядку, які задовольняють умови (3). Згідно з теоремою 2, ці два оператори співпадають. Теорему 3 доведено.

2.2. Інтерполяція за допомогою нелінійних операторів. Теореми 1–3 повністю розв'язують задачу про побудову інтерполяційного звичайного лінійного диференціального оператора з властивостями (3). Але задача операторного інтерполювання, як і задача функціонального інтерполювання, має не єдиний розв'язок. У наступній теоремі 4 для диференціальних операторів $A(x,D)$, які задовольняють умові

$$A(x,D)u = A(x,Du), \tag{10}$$

встановлено зображення для оператора $L_n u(x)$ в іншій формі $\overline{A}_n u(x)$, що не вимагає знаходження оберненої матриці $W^{-1}(x)$ і обчислення детермінанта Δ. Ці оператори $\overline{A}_n u(x)$, взагалі кажучи, є нелінійними і збігаються з операторами $L_n u(x,D)$ при $n=1$.

Теорема 4. *Оператор* $\overline{A}_n u(x) = \overline{A}_n(x, Du(x)) := \sum\limits_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(x)(Du(x))^\alpha$, *який визначається формулою*

$$\overline{A}_n u(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \gamma_\beta(x) \prod_{\mu=0,\, \mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)}, \tag{11}$$

задовольняє умови (3)*, тобто* $\overline{A}_n u_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$*,* $0 \le \beta \le n$*, якщо система функцій* $u_\beta(x)$*,* $0 \le \beta \le n$*, задовольняє умови*

$$\forall x \in E \quad Du_\mu(x) - Du_\beta(x) \neq 0, \quad \mu \neq \beta, \quad 0 \le \mu, \beta \le n. \tag{12}$$

Доведення. Безпосередньою перевіркою можна встановити, що при виконанні умов (12) оператори

$$\ell_\beta u(x) = \prod_{\mu=0,\, \mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du\,(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} \tag{13}$$

мають наступні властивості

$$\ell_\beta u_\nu(x) = \delta_{\nu,\beta}, \quad 0 \le \nu, \beta \le n, \tag{14}$$

де $\delta_{\nu,\beta}$ — символ Кронекера, $\delta_{\nu,\beta} = 0$, $\nu \neq \beta$, $\delta_{\nu,\nu} = 1$. Застосовуючи оператор (11) до функції $u_\nu(x)$, $0 \le \nu \le n$, і враховуючи співвідношення (14), отримаємо

$$\overline{A}_n u_\nu(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \gamma_\beta(x) \ell_\beta u_\nu(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \gamma_\beta(x) \delta_{\beta,\nu} = \gamma_\nu(x), \quad 0 \le \nu \le n.$$

У наступній теоремі знайдемо інтегральне зображення для залишку

$$\overline{R}_n Au(x) = ((A(x,D) - \overline{A}_n(x,D))u(x) \tag{15}$$

наближення диференціального оператора $A(x,D)$ нелінійним диференціальним оператором першого порядку інтерполяційного типу $\overline{A}_n(x,D)$, який є поліномом степеня n за степенями $(Du)^{\alpha}$.

Теорема 5. *Нехай функція $A(x,t)$ змінної t належить до класу $C^r(\mathbb{R})$, $1 \le r \le n+1$, і для оператора $A(x,D)$ виконується співвідношення* (10)*. Тоді для залишку наближення $\overline{R}_n Au(x)$ справедливе інтегральне зображення*

$$\overline{R}_{n,r} Au(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} \times$$

$$\times \int_{Du_\beta(x)}^{Du(x)} \frac{\partial^r A(x,t)}{\partial t^r} \frac{(Du_\beta(x) - t)^{r-1}}{(r-1)!}\, dt. \tag{16}$$

Доведення. З рівностей $A(x,D)u_\beta(x) = \gamma_\beta(x)$, $0 \le \beta \le n$, з формули (16) при $r=1$ випливає, що

$$\overline{R}_{n,1} Au(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} \int_{Du_\beta(x)}^{Du(x)} \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} (A(x, Du(x)) - A(x, Du_\beta(x))) =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} (A(x,D)u(x) - \gamma_\beta(x)) =$$

$$= A(x,D)u(x) - \overline{A}_n(x,D)u(x).$$

Тут враховано, що

$$\sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} A(x,D)u(x) = A(x,D)u(x),$$

оскільки

$$\sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} = 1.$$

Таким чином, теорему 5 доведено для $r = 1$.

Якщо $r = 2$, то за допомогою інтегрування частинами можна записати низку рівностей

$$\overline{R}_{n,2}Au(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu(x) - Du(x)}{Du_\mu(x) - Du_\beta(x)} \int_{Du_\beta(x)}^{Du(x)} \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2}(Du_\beta - t)dt =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu - Du}{Du_\mu - Du_\beta} \left(\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}(Du_\beta - t)\Big|_{t=Du_\beta}^{Du} + \int\limits_{Du_\beta}^{Du} \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} dt \right) =$$

$$= \sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\mu=\beta}^{n} \frac{Du_\mu - Du}{Du_\mu - Du_\beta} \int_{Du_\beta}^{Du} \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} dt = \overline{R}_{n,1}Au = (A - \overline{A}_n)u.$$

Тут враховано, що

$$\sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu - Du}{Du_\mu - Du_\beta}(Du_\beta - t)^{r-1}\Big|_{Du_\beta}^{Du} = 0, \quad r = 2, \ldots, n+1,$$

і, зокрема, при $r = 2$, $r \leq n + 1$,

$$\sum_{\beta=0}^{n} \prod_{\mu=0,\,\mu\neq\beta}^{n} \frac{Du_\mu - Du}{Du_\mu - Du_\beta} (Du_\beta - Du) = 0.$$

Тому для $r = 2$ теорему теж доведено. Повторюючи аналогічні міркування для $r = 3, \ldots, n, n+1$, отримуємо доведення теореми 5.

Наслідок. *Якщо $A(x, Du)$ як функція двох змінних має неперервну похідну порядку $(n+1)$ за другою змінною, то для залишку $\overline{R}_{n,n+1}Au(x)$ виконується зображення*

$$\overline{R}_{n,n+1}Au(x) = \prod_{\mu=0}^{n} (Du_\mu(x) - Du(x)) \left.\frac{\partial^{n+1} A(x,t)}{\partial t^{n+1}}\right|_{t=\theta(Du)} \frac{1}{(n+1)!}, \quad (17)$$

де $\theta(Du(x)) = \theta(Du_0(x), \ldots, Du_n(x), Du(x))$.

3. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ СЛІДІВ ОПЕРАТОРА У ВУЗЛАХ АРГУМЕНТУ

Припустимо, що на інтервалі $E \subset \mathbb{R}$ задана система вузлів — значень аргументу x: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ та сліди $A(x_\beta, D) = A_\beta(D)$, $0 \leq \beta \leq n$, у цих вузлах деякого диференціального оператора $A(x, D)$, що діє на функції $u(x) \in X$. Сам оператор $A(x, D)$ може бути невідомим. Задача полягає у побудові диференціального оператора $\overline{A}_n(x, D)$, який має наступні властивості $\overline{A}_n(x_\beta, D) = A_\beta(D)$, $0 \leq \beta \leq n$.

Теорема 6. *Оператор*

$$\overline{A}_n(x, D) = \sum_{\alpha=0}^{n} \prod_{j=0,\, j\neq\alpha}^{n} \frac{x - x_j}{x_\alpha - x_j} A_\alpha(D) \tag{18}$$

має наступні властивості:

$$\overline{A}_n(x_\beta, D) = A_\beta(D), \quad 0 \leq \beta \leq n. \tag{19}$$

Доведення. З властивостей $\ell_{n,\alpha}(x_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$, $0 \leq \alpha, \beta \leq n$, базових поліномів Лагранжа $\ell_{n,\alpha}(x) = \prod\limits_{j=0,\, j\neq\alpha}^{n} \frac{x-x_j}{x_\alpha-x_j}$ при підстановці $x = x_\beta$ у формулу (18) отримаємо рівності

$$\overline{A}_n(x_\beta, D) = \sum_{\alpha=0}^{n} \ell_{n,\alpha}(x_\beta) A_\alpha(D) = A_\beta(D), \quad 0 \leq \beta \leq n,$$

які й потрібно було довести.

У наступній теоремі наведено інтегральне зображення залишку наближення $R_n^* A(x, D) = A(x, D) - \overline{A}_n(x, D)$ деякого класу операторів $A(x, D)$ за допомогою операторів $\overline{A}_n(x, D)$.

Теорема 7. *Припустимо, що $A(x, D)$ як функція змінної x належить до класу $C^r(E)$, $1 \leq r \leq n + 1$, для довільних значень параметра D. Тоді для залишку $R_n^* A(x, D)$ справедливе інтегральне зображення*

$$R_{n,r}^* A(x, D) = \sum_{\alpha=0}^{n} \prod_{j=0,\, j\neq\alpha}^{n} \frac{x - x_j}{x_\alpha - x_j} \int_{x_\alpha}^{x} \frac{\partial^r A(t, D)}{\partial t^r} \frac{(x_\alpha - t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \tag{20}$$

Доведення. Для $r = 1$ виконується рівність

$$R_{n,1}^* A(x, D) = \sum_{\alpha=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq\alpha}^{n} \frac{x - x_j}{x_\alpha - x_j} \int_{x_\alpha}^{x} \frac{\partial A(t, D)}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq\alpha}^{n} \frac{x - x_j}{x_\alpha - x_j} (A(x, D) - A(x_\alpha, D)) =$$

$$= A(x,D)\sum_{\alpha=0}^{n}\prod_{j=0,j\neq\alpha}^{n}\frac{x-x_j}{x_\alpha-x_j}-\sum_{\alpha=0}^{n}\prod_{j=0,j\neq\alpha}^{n}\frac{x-x_j}{x_\alpha-x_j}A(x_\alpha,D)=$$

$$= A(x,D)-\overline{A}_n(x,D).$$

Таким чином, для $r=1$ теорему доведено. Припустимо, що твердження теореми істинне для деякого $r+1$, $1\leq r\leq n$, тобто справджується тотожність

$$R^*_{n,r+1}A(x,D)=\sum_{\alpha=0}^{n}\prod_{j=0,j\neq\alpha}^{n}\frac{x-x_j}{x_\alpha-x_j}\int_{x_\alpha}^{x}\frac{\partial^{r+1}A(t,D)}{\partial t^{r+1}}\frac{(x_\alpha-t)^r}{r!}dt.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$R^*_{n,r+1}A(x,D)=\sum_{\alpha=0}^{n}\prod_{j=0,\,j\neq\alpha}^{n}\frac{x-x_j}{x_\alpha-x_j}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^r A(t,D)}{\partial t^r}\frac{(x_\alpha-t)^r}{r!}\bigg|_{x_\alpha}^{x}-\int_{x_\alpha}^{x}\frac{\partial^r A(t,D)}{\partial t^r}\frac{(x_\alpha-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt\right)=$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{n}\prod_{j=0,\,j\neq\alpha}^{n}\frac{x-x_j}{x_\alpha-x_j}\int_{x_\alpha}^{x}\frac{\partial^r A(t,D)}{\partial t^r}\frac{(x_\alpha-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt=R^*_{n,r}A(x,D).$$

Таким чином, згідно з принципом математичної індукції, твердження теореми істинне для кожного r, $1\leq r\leq n$.

Наслідок. *Припустимо, що $A(x,D)$ як функція змінної x належить до класу $C^{n+1}(E)$ для довільних значень параметра D. Тоді для залишку $R^*_nA(x,D)$ справедливе зображення*

$$R^*_{n,n+1}A(x,D)=\frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)\frac{\partial^{n+1}A(t,D)}{\partial t^{n+1}}\Big|_{t=\theta(x)},$$

де $\theta(x)=\theta(x_0,\ldots,x_n,x)$, $x_0<\theta(x)<x_n$.

4. ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Нехай

$$A(x,D)=D^2=d^2/dx^2,\quad n=1,\quad L_1(x,u(x))=a_0u(x)+a_1(x)Du(x),$$

$$u_0(x)=1,\quad u_1(x)=x,\quad u_2(x)=x^2/2,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Тоді $\gamma_0(x) = D^2u_0(x) = 0$, $\gamma_2(x) = D^2u_2(x) = 1$. Отже, для того, щоб задовольнити умову $\sum\limits_{\beta=0}^{n} |\gamma_\beta(x)| \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, при $n = 1$ можна з написаних трьох функціональних вузлів вибрати лише наступні дві функції — вузли $u_0(x)$, $u_2(x)$ або $u_1(x)$, $u_2(x)$.

Розглянемо перший випадок, коли: $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = x^2/2$, $\gamma_0(x) = 0$, $\gamma_1(x) = 1$. У цьому випадку система (6) має вигляд

$$a_0(x) \cdot 1 + a_1(x) \cdot 0 = 0, \quad a_0(x) \cdot x^2/2 + a_1(x) \cdot x = 1.$$

Підставляючи її розв'язок $a_0(x) = 0$, $a_1(x) = 1/x$ у оператор $L_1u(x)$, отримаємо

$$L_1u(x) = x^{-1}Du(x).$$

Оператор $\overline{A}_1u(x) = \overline{A}_1(x, D)u(x)$ в цьому випадку має вигляд

$$\overline{A}_1u(x) = \gamma_0(x)\frac{Du_1(x) - Du(x)}{Du_1(x) - Du_0(x)} + \gamma_1(x)\frac{Du_0(x) - Du(x)}{Du_0(x) - Du_1(x)} = \frac{1}{x}\, Du(x),$$

тобто $L_1 = \overline{A}_1$. У другому випадку, коли $u_0(x) = x$, $u_1(x) = x^2/2$, $\gamma_0(x) = 0$, $\gamma_1(x) = 1$, система (6) має вигляд

$$a_0(x) \cdot x + a_1(x) \cdot 1 = 0, \quad a_0(x) \cdot x^2/2 + a_1(x) \cdot x = 1.$$

Підставляючи її розв'язок $a_0(x) = -2/x^2$, $a_1(x) = 2/x$ у оператор $L_1(x)$, отримаємо

$$L_1u(x) = -2x^{-2}u(x) + 2x^{-1}Du(x).$$

В цьому випадку оператор $\overline{A}_1u(x)$ має вигляд

$$\overline{A}_1u(x)= \gamma_0(x)\frac{Du_1(x) - Du(x)}{Du_1(x) - Du_0(x)} + \gamma_1(x)\frac{Du_0(x) - Du(x)}{Du_0(x) - Du_1(x)} = \frac{1 - Du(x)}{1 - x}.$$

Приклад 2. Нехай $A(x, D)u = (Du)^3$, $\overline{A}_2(x, D)u = a_0 + a_1Du + a_2(Du)^2$, $u_0(x) = 1$, $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2/2$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = x^3$. Тоді, після розв'язання системи (6), отримаємо $a_0 = 0$, $a_1 = -x$, $a_2 = 1 + x$. Тому $\overline{A}_2(x, D)u = -xDu + (1 + x)(Du)^2$. При цьому, враховуючи, що $\partial^3 A(x, t)/\partial t^3 = 6$, для залишку $\overline{R}_2A(x, D)u = A(x, D)u - \overline{A}_2(x, Du)$ отримуємо рівність

$$\overline{R}_2A(x, Du) = \sum_{k=0}^{2} l_{2,k}(x, Du) \int_{Du_k(x)}^{Du(x)} 6\frac{(Du_k(x) - t)^2}{2!}\, dt,$$

де

$$l_{2,0}(x, Du) = \frac{(1 - Du)(x - Du)}{x}, \quad l_{2,1}(x, Du) = \frac{(Du)(x - Du)}{x - 1},$$

$$l_{2,2}(x, Du) = \frac{(Du)(Du - 1)}{x(x - 1)}.$$

Легко перевірити, що $\overline{R}_2 A(x, Du) = (Du)^3 - \overline{A}_2(x, D)(Du)^3$.

Приклад 3. Будемо наближувати нелінійний оператор $A(x, Du) = (Du)^3$ за допомогою лінійного

$$L_1(x, D)u = \frac{Du_1 - Du}{Du_1 - Du_0}(Du_0)^3 + \frac{Du_0 - Du}{Du_0 - DU_1}(Du_1)^3.$$

При цьому основну увагу приділимо перевірці формули (16) для залишку, яку можна записати у вигляді

$$R_1 A(x, D)u = \frac{Du_1 - Du}{Du_1 - Du_0} \int_{Du_0}^{Du} \frac{d^2 t^3}{dt^2} \frac{Du_0 - t}{1!} dt + \frac{Du_0 - Du}{Du_0 - Du_1} \times$$

$$\times \int_{Du_1}^{Du} \frac{d^2 t^3}{dt^2} \frac{Du_1 - t}{1!} dt = \frac{Du_1 - Du}{Du_1 - Du_0} \int_{Du_0}^{Du} 6t \frac{Du_0 - t}{1!} dt +$$

$$+ \frac{Du_0 - Du}{Du_0 - Du_1} \int_{Du_1}^{Du} 6t \frac{Du_1 - t}{1!} dt = 3(Du)^2 L_1 Du - 3L_1(Du)^3 -$$

$$-2(Du)^3 + 2L_1 Du^3 = Du^3 - L_1(Du)^3.$$

Зауваження. Узагальнення отриманих у роботі тверджень можна провести із використанням техніки розділених різниць, а також узагальнених диференціальних операторних аналогів полінома Ньютона, які будуються за допомогою розділених різниць. Зауважимо, що тут можливі два методи побудови узагальнених диференціальних операторних поліномів Ньютона. Перший пов'язаний з розділеними різницями, що використовують вузли $x = x_\beta$, $0 \leq \beta \leq n$, які є значеннями аргументу функції $u(x)$; другий пов'язаний з розділеними різницями, що використовують функціональні вузли $u(x) = u_\beta(x)$, $0 \leq \beta \leq n$. Подальше узагальнення пов'язане з побудовою відповідної теорії для диференціальних операторів з частинними похідними [7].

[1] *Бирман М.Ш., Виленкин Н.Я., Горин Е.А. и др.* Функциональный анализ. Под общей редакцией С.Г.Крейна. – Изд. 2-е. М.: Наука. – 1972. – 544 с.

[2] *Даугавет И.К.* О полиномиальном приближении операторов // Вестник СПбГУ. – Сер. 1. – Вып. 3., 1994. – С. 23–26.

[3] *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[4] *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її узагальнення. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

[5] *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. – К.: Наук. думка, 2005. – 331 с.

[6] *Литвин О.М.* Інтерполювання звичайних диференціальних операторів // Доповіді НАН України, № 6. – 2007. – С. 19–23.

[7] *Литвин О.М.* Інтерполювання диференціальних операторів з частинними похідними // Доповіді НАН України, № 7. – 2007. – С. 22–25.

[8] *Макаров В.Л., Хлобыстов В.В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – К.: Ин-т математики НАНУ, 1998. – 278 с.

[9] *Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А.* Интерполирование операторов. – К.: Наук. думка, 2002. – 406 с.

[10] *Howlett P.G., Torokhti A.P.* Weak interpolation and approximation of nonlinear operators on the space $C([0,1])$ // Numer. Func. Anal. and Optimiz. 19 (9,10). – 1998. – P. 1025–1043.

[11] *Porter W.A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 11, № 2. – 1980. – P. 308–315.

[12] *Prenter P.M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banah spaces // Appr. Theory. – 4, № 4. – 1971. – P. 419–432.

THE INTERPOLATION OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS

Oleh LYTVYN

Ukrainian Engineering-Pedagogical Academy,
16 Universytetska Str., Kharkiv 61003, Ukraine

Basic statement of the theory of the approximation of the ordinary differential operators by others ordinary differential operators is given. Approximated and approximating operators is equal on the given system of the functions (functional knots).