Математичний Вісник Наукового Товариства ім. Тараса Шевченка 2014. — Т.11

Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society 2014. — V.11

СИМЕТРІЇ ЛІ ТА ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА

Сергій Коваленко[1], Інна Копась[2], Валерій Стогній[2]

[1]*Інститут математики НАН України, 01601, м.Київ, вул.Терещенківська, 3*

[2]*Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", 03056, м. Київ, проспект Перемоги, 37*

С. Коваленко, І. Копась, В. Стогній. *Симетрії Лі та фундаментальні розв'язки лінійного рівняння Колмогорова* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2014. — Т.11. — С. 62–72.

Знайдено алгебру інваріантності фундаментальних розв'язків (2+1)-вимірного лінійного рівняння Колмогорова

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0,$$

де $u = u(t, x, y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Побудовано у явному вигляді фундаментальний розв'язок цього рівняння як слабкий інваріантний розв'язок за операторами зі знайденої алгебри інваріантності.

S. Kovalenko, I. Kopas, V. Stogniy, *Lie symmetries and fundamental solutions of the linear Kolmogorov equation*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **11** (2014), 62–72.

The algebra of invariance of the fundamental solutions of the (2+1)-dimensional linear Kolmogorov equation

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0,$$

where $u = u(t, x, y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ is found. Using the generators of the obtained algebra of invariance, the fundamental solution of the equation is computed in an explicit form as a weak invariant solution.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 22E70, 35K70, 35Q84 *УДК:* 517.958:512.816

Ключові слова і фрази: лінійне рівняння Колмогорова, фундаментальний розв'язок, симетрії Лі

E-mail: kovalenko@imath.kiev.ua, innak@net.ua, valeriy_stogniy@mail.ru

Вступ

Ідея, що розв'язок будь-якої коректно поставленої крайової задачі для певного лінійного диференціального рівняння із частинними похідними (ДРЧП) зводиться до побудови певного розв'язку спеціального вигляду (відомого як фундаментальний розв'язок) є однією із найбільш важливих і продуктивних у класичній математичній фізиці. Потужним та добре розробленим методом побудови таких розв'язків є метод інтегральних перетворень. На жаль, цей метод є ефективним лише для лінійних ДРЧП зі сталими (або, принаймі, аналітичними) коефіцієнтами. Більше того, в деяких випадках досить важко дослідити якісні властивості фундаментальних розв'язків, оскільки останні не можуть бути виписані у явному вигляді, а тільки за допомогою обернених інтегральних перетворень. Саме тому розвиток більш прямих методів для побудови фундаментальних розв'язків є важливою проблемою сучасної математичної фізики, особливо у випадку рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Одним із таких сучасних методів є класичний метод Лі дослідження групових властивостей ДРЧП.

Груповий аналіз диференціальних рівнянь – це математична теорія, що займається вивченням симетрійних властивостей диференціальних рівнянь. Витоки групового аналізу знаходяться у фундаментальних роботах С. Лі та його учнів [1, 2]. Саме Лі створив та першим використав механізми теоретико-групової редукції, коли розв'язок досліджуваного рівняння шукається у вигляді спеціальної підстановки (анзаца), яка зводить задане рівняння до диференціального рівняння з меншою кількістю незалежних змінних.

Подальший розвиток теоретико-групових методів диференціальних рівнянь, передовсім, пов'язаний з працями таких математиків як Г. Біркгоф [3], Л.І. Сєдов [4], А. Морган [5], Л.В. Овсяннiков [6], Н.Х. Ібрагімов [7, 8], В.І. Фущич [9, 10, 11] та деяких інших. На сьогоднішній день вивчені симетрійні властивості багатьох відомих рівнянь механіки, газової динаміки, квантової фізики тощо. Ґрунтовний огляд результатів дослідження симетрійних властивостей ряду лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь можна знайти у монографіях [6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Добре відомо, що фундаментальні розв'язки лінійних ДРЧП зазвичай є інваріантними відносно перетворень, які допускаються вихідним рівнянням [8, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Зокрема, такою властивістю володіють фундаментальні розв'язки таких класичних рівнянь математичної фізики як рівняння Лапласа, рівняння теплопровідності, хвильового рівняння тощо (див., наприклад, [16]). А це означає, що якщо лінійне ДРЧП (особливо у випадку рівняння зі змінними коефіцієнтами) володіє нетривіальними симетрійними властивостями, то для побудови його фундаментального розв'язку можна використовувати теоретико-групові методи.

Об'єктом дослідження цієї роботи є лінійне (2+1)-вимірне рівняння

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0, \tag{1}$$

де $u = u(t,x,y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Це рівняння є найпростішим представником широкого класу лінійних ДРЧП

$$u_t - (k(t,x,y)u)_{xx} + (g(t,x,y)u)_x + xu_y = 0 \tag{2}$$

у випадку $k = 1$, $g = 0$. Рівняння (2) було запропоновано А.М. Колмогоровим у 1934 р. для опису броунівського руху частинки [24]. У цій же роботі А.М. Колмогоров побудував у явному вигляді фундаментальний розв'язок рівняння (2) у випадку сталих функцій $k = k(t,x,y)$ та $g = g(t,x,y)$, який для рівняння (1) має такий вигляд:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\cdot\frac{\theta(t-t_0)}{(t-t_0)^2}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)} - \frac{3}{(t-t_0)^3}\Big(y - y_0 - (t-t_0)\frac{x+x_0}{2}\Big)^2\right], \tag{3}$$

де θ – функція Хевісайда.

Дослідження рівняння (1) (яке у літературі дістало назву лінійного рівняння Колмогорова) методами групового аналізу диференціальних рівнянь було розпочато нещодавно у роботі [25], де було знайдено максимальну алгебру інваріантності цього рівняння, оператори якої були застосовані для симетрійної редукції, розділення змінних, та побудови точних інваріантних розв'язків.

У цій роботі ми продовжуємо вивчення симетрійних властивостей лінійного рівняння Колмогорова (1). Метою роботи є знайти алгебру інваріантності фундаментальних розв'язків рівняння (1), а також побудувати фундаментальний розв'язок (3) на основі використання знайденої алгебри симетрій.

1. Симетрії фундаментальних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

Розглянемо лінійне однорідне ДРЧП p-го порядку з m незалежними змінними

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(x) D^\alpha u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{4}$$

В (4) використані стандартні позначення: $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ – мультиіндекс з цілочисловими невід'ємними компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$;

$$D^\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)^{\alpha_m};$$

$A_\alpha(x)$ – деякі гладкі функції змінної x.

Фундаментальним розв'язком рівняння (4) називається функція $u(x, x_0)$ (взагалі кажучи, узагальнена), яка задовольняє рівнянню

$$Lu = \delta(x - x_0), \tag{5}$$

де $\delta(x - x_0)$ – функція Дірака в точці $x = x_0$.

Стандартними методами знаходження фундаментальних розв'язків лінійних ДРЧП є метод інтегральних перетворень (особливо у випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами), метод функції Гріна тощо [26, 27]. Тут ми розглянемо алгоритм знаходження фундаментальних розв'язків лінійних однорідних ДРЧП на основі використання групи симетрій цього рівняння.

Нагадаємо, що невироджена локальна заміна змінних x, u

$$\bar{x}^i = f^i(x, u, a), \;\; \bar{u} = g(x, u, a), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

яка залежить від неперервного параметру a називається *перетворенням симетрії* рівняння (4), якщо це рівняння не змінює свого вигляду у нових змінних $\bar{x}$ та $\bar{u}$. Множина G усіх таких перетворень утворює неперервну групу (взагалі кажучи, локальну), тобто G містить тотожнє перетворення

$$\bar{x}^i = x^i, \;\; \bar{u} = u, \quad i = 1, \ldots, m,$$

а також містить композиції будь-яких двох перетворень із G. Група G називається *групою симетрій* (або допустимою групою) рівняння (4).

Відповідно до теорії Лі, побудова групи симетрій G рівняння (4) еквівалентна знаходженню її інфнітезимальних перетворень:

$$\bar{x}^i \approx x^i + a \cdot \xi^i(x, u), \;\; \bar{u} \approx u + a \cdot \eta(x, u), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

де $x^i(x, u)$ та $\eta(x, u)$ – деякі гладкі функції.

Лінійний диференціальний оператор першого порядку

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \tag{8}$$

називається *інфінітезимальним оператором* групи G. Оператор (8) ще називають оператором симетрії рівняння (4).

Групові перетворення (6), що відповідають інфінітезимальним перетворенням (7) з оператором (8) знаходяться розв'язуванням так званих рівнянь Лі

$$\frac{d\bar{x}^i}{da} = \xi^i(\bar{x}, \bar{u}), \;\; \frac{d\bar{u}}{da} = \eta(\bar{x}, \bar{u}), \quad i = 1, \ldots, m$$

з початковими умовами

$$\bar{x}^i|_{a=0} = x^i, \;\; \bar{u}|_{a=0} = u.$$

Фундаментальне значення в симетрійному аналізі диференціальних рівнянь відіграє т. зв. інфінітезимальний критерій інваріантості, який у випадку рівняння (4) можна сформулювати так.

Теорема 1.1. *Для того щоб інфінітезимальний оператор* (8) *був оператором симетрії рівняння* (4), *необхідно і достатньо, щоб існувала така функція* $\lambda = \lambda(x)$, *яка б задовольняла тотожності*

$$\underset{p}{X}(Lu) \equiv \lambda(x) \cdot Lu \tag{9}$$

для довільної функції $u = u(x)$ *з області визначення рівняння* (4).

В рівнянні (9) $\underset{p}{X}$ – це продовження порядку p інфінітезимального оператора (8), яке обчислюється за добре відомою формулою [6, 11, 12, 14]:

$$\underset{p}{X} = X + \sum_{k=1}^{p} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} \varphi^{i_1\cdots i_k} \frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}},$$

де

$$\varphi^{i_1\cdots i_k} = D_{i_1}\cdots D_{i_k}\left(\eta - \sum_{i=1}^{m}\xi^i u_i\right) + \sum_{i=1}^{m}\xi^i u_{i_1\cdots i_k i},$$
$$i_1,\dots,i_k = 1,\dots,m, \quad k = 1,\dots,p.$$

Тут через D_i позначено оператор повного диференціювання за змінною x_i:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{m} u_{i_1\cdots i_j i}\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_j}}, \quad i = 1,\dots,m.$$

У роботі [28] було показано, що лінійне однорідне ДРЧП (4) за додаткових умов $p \geq 2$ та $m \geq 2$ допускає оператори симетрії тільки такого вигляду

$$X = \sum_{i=1}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + (\alpha(x)u + \beta(x))\frac{\partial}{\partial u}. \tag{10}$$

Максимальна алгебра Лі операторів симетрії (10) рівняння (4) як векторний простір є прямою сумою двох підалгебр: підалгебри, яка складається з операторів вигляду

$$X = \sum_{i=1}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha(x)u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{11}$$

та нескінченновимірної підалгебри, яка породжується операторами

$$X = \beta(x)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{12}$$

де $\beta = \beta(x)$ – довільний гладкий розв'язок рівняння (4).

Очевидно, що оператори (12) є операторами симетрії рівняння (5), а тому надалі будемо розглядати лише оператори вигляду (11).

Конструктивний метод знаходження симетрій вигляду (11) лінійних неоднорідних ДРЧП з δ-функцією у правій частині був запропонований у роботі [15] (див., також, [18]). Там же було запропоновано алгоритм побудови інваріантних фундаментальних розв'язків рівнянь вигляду (4).

Головним результатом роботи [15] є таке твердження.

Теорема 1.2. *Алгебра Лі операторів симетрії вигляду* (11) *рівняння* (5) *є підалгеброю алгебри Лі операторів симетрії рівняння* (4)*, яка виділяється такими співвідношеннями:*

$$\xi^i(x_0) = 0, \tag{13}$$

$$\lambda(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x^i} = 0, \tag{14}$$

де $i = 1, \ldots, m$.

Сформулюємо алгоритм знаходження фундаментальних розв'язків лінійного ДРЧП на основі використання його алгебри інваріантності:

1) знайти загальний вигляд оператора симетрії рівняння (4) та відповідну йому функцію $\lambda(x)$, яка задовольняє тотожності (9);

2) отримати на основі умов (13) та (14) алгебру Лі операторів симетрії рівняння (5);

3) побудувати інваріантні фундаментальні розв'язки рівняння (4) за допомогою операторів симетрії рівняння (5).

Зауваження 1.3. Сформульований алгоритм побудови фундаментальних розв'язків за допомогою симетрій лінійних ДРЧП з δ-функцією у правій частині є особливо ефективним для багатовимірних лінійних рівнянь, а також для рівнянь зі змінними коефіцієнтами у випадку, коли вони допускають достатньо широкі алгебри інваріантності.

Зауваження 1.4. Для знаходження узагальнених інваріантних фундаментальних розв'язків необхідно розв'язувати проредуковані рівняння (ці рівняння записуються в інваріантах відповідних груп перетворень) у класі узагальнених функцій (див., наприклад, [17, 18]).

2. Симетрії фундаментальних розв'язків лінійного рівняння Колмогорова (1)

Застосуємо метод, описаний у попередньому розділі, до лінійного рівняння Колмогорова (1). Максимальна алгебра інваріантності цього рівняння була знайдена у роботі [25] і генерується такими інфінітезимальними операторами:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x + t\partial_y,\ X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - 2u\partial_u,\\
&X_3 = t^2\partial_t + (tx+3y)\partial_x + 3ty\partial_y - (2t+x^2)u\partial_u,\\
&X_4 = 3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3(y-tx)u\partial_u,\ X_5 = 2t\partial_x + t^2\partial_y - xu\partial_u,\\
&X_6 = \partial_t,\ X_7 = \partial_y,\ X_8 = u\partial_u,\ X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u.
\end{aligned}$$

В останньому операторі функція $\beta = \beta(t,x,y)$ є довільним гладким розв'язком рівняння (1).

Під *фундаментальним розв'язком* рівняння (1) будемо розуміти узагальнену функцію $u = u(t,x,y,t_0,x_0,y_0)$, яка залежить від t_0, x_0, y_0 як від параметрів і задовольняє рівняння

$$u_t - u_{xx} + xu_y = \delta(t-t_0, x-x_0, y-y_0), \tag{15}$$

за додаткової умови $u|_{t<t_0} = 0$.

Теорема 2.1. *Рівняння* (15) *допускає нескінченновимірну алгебру Лі операторів симетрії з таким базисом скінченновимірної частини:*

$$
\begin{aligned}
&Y_1 = 2(t-t_0)\partial_t + (x-x_0)\partial_x - (x_0(t-t_0) - 3(y-y_0))\partial_y - 4u\partial_u,\\
&Y_2 = (t^2-t_0^2)\partial_t + ((tx+3y) - (t_0x_0+3y_0))\partial_x + (3(y-y_0)t - t_0x_0(t-t_0))\partial_y -\\
&\qquad - (2(t-t_0) + x^2 - x_0^2)u\partial_u,\\
&Y_3 = 3(t^2-t_0^2)\partial_x + (t^3 - 3t_0^2t + 2t_0^3)\partial_y - 3(tx - y - (t_0x_0 - y_0))u\partial_u,\\
&Y_4 = 2(t-t_0)\partial_x + (t-t_0)^2\partial_y - (x-x_0)u\partial_u.
\end{aligned}
$$

Доведення. Запишемо загальний вигляд оператора симетрії скінченновимірної частини алгебри інваріантності рівняння (1)

$$X = \sum_{i=1}^{8} a_i X_i, \tag{16}$$

або у розгорнутому вигляді

$$
\begin{aligned}
X = {}&(2a_2t + a_3t^2 + a_6)\partial_t + (a_1 + a_2x + a_3(tx+3y) + 3a_4t^2 + 2a_5t)\partial_x +\\
&+ (a_1t + 3a_2y + 3a_3ty + a_4t^3 + a_5t^2 + a_7)\partial_y +\\
&+ (-2a_2 - a_3(2t+x^2) + 3a_4(y-tx) - a_5x + a_8)u\partial_u,
\end{aligned}
$$

де a_i $(i = 1, \ldots, 8)$ – довільні дійсні сталі.

Підставивши оператор (16) у рівняння (9), у якому слід покласти $Lu \equiv u_t - u_{xx} + xu_y$, $p = 2$, знаходимо функцію $\lambda = \lambda(t,x,y)$, яка відповідає цьому оператору:

$$\lambda(t,x,y) = -4a_2 - a_3(4t+x^2) + 3a_4(y-tx) - a_5x + a_8. \tag{17}$$

Підставивши оператор (16) та функцію (17) у рівняння (13) та (14) (див., теорему 1.1) приходимо до таких рівностей:

$$
\begin{aligned}
&2a_2t_0 + a_3t_0^2 + a_6 = 0;\\
&a_1 + a_2x_0 + a_3(t_0x_0 + 3y_0) + 3a_4t_0^2 + 2a_5t_0 = 0;\\
&a_1t_0 + 3a_2y_0 + 3a_3t_0y_0 + a_4t_0^3 + a_5t_0^2 + a_7 = 0;\\
&2a_2 - a_3(2t_0 - x_0^2) + 3a_4(y_0 - t_0x_0) - a_5x_0 + a_8 = 0,
\end{aligned}
$$

з яких легко знаходимо

$$
\begin{aligned}
&a_1 = -a_2x_0 - a_3(t_0x_0 + 3y_0) - 3a_4t_0^2 - 2a_5t_0;\\
&a_6 = -2a_2t_0 - a_3t_0^2;\\
&a_7 = a_2(t_0x_0 - 3y_0) + a_3t_0^2x_0 + 2a_4t_0^3 + a_5t_0^2;\\
&a_8 = -2a_2 + a_3(2t_0 - x_0^2) - 3a_4(y_0 - t_0x_0) + a_5x_0.
\end{aligned}
$$

Замінивши в операторі (16) сталі a_1, a_6, a_7, та a_8 знайденими виразами та розщепивши за незалежними сталими a_2, a_3, a_4, a_5, отримуємо, що скінченновимірна частина алгебри інваріантності рівняння (15) є чотиривимірною та генерується такими операторами:

$$\begin{aligned}
&Y_1 = 2(t-t_0)\partial_t + (x-x_0)\partial_x - (x_0(t-t_0) - 3(y-y_0))\partial_y - 4u\partial_u,\\
&Y_2 = (t^2-t_0^2)\partial_t + ((tx+3y)-(t_0x_0+3y_0))\partial_x + (3(y-y_0)t - t_0x_0(t-t_0))\partial_y-\\
&\quad -(2(t-t_0)+x^2-x_0^2)u\partial_u,\\
&Y_3 = 3(t^2-t_0^2)\partial_x + (t^3-3t_0^2t+2t_0^3)\partial_y - 3(tx-y-(t_0x_0-y_0))u\partial_u,\\
&Y_4 = 2(t-t_0)\partial_x + (t-t_0)^2\partial_y - (x-x_0)u\partial_u.
\end{aligned}$$

Інваріантність рівняння (15) відносно операторів вигляду $\beta(t,x,y)\partial_u$, де $\beta(t,x,y)$ – довільний гладкий розв'язок рівняння (1) є очевидною. □

Покажемо, як результати теореми 2.1 можуть бути використані для побудови інваріантних фундаментальних розв'язків рівняння (1). Використаємо для цього, наприклад, двовимірну алгебру операторів $\langle Y_1, Y_4\rangle$. Класичні інваріанти, що відповідають цим операторам, знаходяться із системи рівнянь

$$Y_1 I = 0,\ Y_4 I = 0,$$

де $I = I(t,x,y,u)$, і рівняння розв'язуються у класичному сенсі. Після відповідних обрахунків отримуємо

$$I_1 = (t-t_0)^2 \exp\left[\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)}\right]u,\ I_2 = \frac{(t-t_0)(x+x_0)-2(y-y_0)}{(t-t_0)^{3/2}}.$$

Класичний інваріантний розв'язок визначається із рівності $I_1 = \varphi(I_2)$, з якої одержуємо підстановку (анзац)

$$u = \frac{1}{(t-t_0)^2}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)}\right]\varphi(\omega),\ \omega = I_2, \tag{18}$$

яка зводить досліджуване рівняння (1) до такого звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{3}{2}\omega\frac{d\varphi}{d\omega} + \frac{3}{2}\varphi = 0.$$

Відомо, що частинним розв'язком цього рівняння є така функція [29, С. 159]:

$$\varphi = C\exp\left[-\frac{3}{4}\omega^2\right]. \tag{19}$$

Підставивши (19) у (18) знаходимо класичний інваріантний розв'язок, що відповідає операторам Y_1 та Y_4:

$$u = \frac{C}{(t-t_0)^2}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)} - \frac{3}{(t-t_0)^3}\left(y-y_0-(t-t_0)\frac{x+x_0}{2}\right)^2\right]. \tag{20}$$

Підстановкою (20) у рівняння (15) неважко переконатися, що $Lu(t,x,y) = 0$, а тому розв'язок (20) не дає фундаментального розв'язку цього рівняння. Для побудови слабкого інваріантного розв'язку застосуємо твердження 1 з роботи [30], а саме слабкі інваріантні розв'язки будемо шукати у вигляді

$$u = \frac{h(t,x,y)}{(t-t_0)^2}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)} - \frac{3}{(t-t_0)^3}\left(y - y_0 - (t-t_0)\frac{x+x_0}{2}\right)^2\right],$$

де $h = h(t,x,y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$. Рівняння $Y_1 u = 0$ та $Y_4 u = 0$ дають відповідно:

$$\begin{aligned}&2(t-t_0)h_t + (x-x_0)h_x - (x_0(t-t_0) - 3(y-y_0))h_y = 0,\\&2(t-t_0)h_x + (t-t_0)^2 h_y = 0.\end{aligned}$$

Легко показати, що узагальнена функція $h(t,x,y) = C_1\theta(t-t_0)+C_0$ є розв'язком цих рівнянь. Звідси отримуємо

$$u = \frac{C_1\theta(t-t_0)+C_0}{(t-t_0)^2}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)} - \frac{3}{(t-t_0)^3}\left(y - y_0 - (t-t_0)\frac{x+x_0}{2}\right)^2\right]. \quad (21)$$

Підстановкою (21) у рівняння (15) знаходимо значення сталої $C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$.

Отже, фундаментальний розв'язок лінійного рівняння Колмогорова (1)

$$u = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\theta(t-t_0)+C_0}{(t-t_0)^2}\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4(t-t_0)} - \frac{3}{(t-t_0)^3}\left(y - y_0 - (t-t_0)\frac{x+x_0}{2}\right)^2\right] \quad (22)$$

ми знайшли як слабкий інваріантний розв'язок відносно двовимірної алгебри $\langle Y_1, Y_4\rangle$ точкових симетрій рівняння (15). У формулі (22) можна покласти $C_0 = 0$, оскільки фундаментальний розв'язок визначається з точністю до додавання довільного розв'язку однорідного рівняння.

Легко переконатися, що фундаментальний розв'язок (3) є інваріантним відносно двох інших операторів Y_2 та Y_3 з алгебри інваріантності рівняння (15). Тим самим нами доведена

Теорема 2.2. *Фундаментальний розв'язок* (3) *лінійного рівняння Колмогорова* (1) *є інваріантним відносно чотирипараметричної групи перетворень, що відповідає алгебрі Лі* $\langle Y_1, \ldots, Y_4\rangle$ *операторів симетрії рівняння* (15).

Зауваження 2.3. Фундаментальний розв'язок (3) був знайдений А.М. Колмогоровим [24] без застосування методів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь. Проведені нами міркування дають теоретико-групове підґрунтя цього розв'язку, а також ще раз підтверджують емпіричне спостереження, що фундаментальні розв'язки лінійних ДРЧП слід шукати серед інваріантних розв'язків.

3. Висновки

У цій статті нами за методом Береста–Аксьонова [15, 18] знайдено алгебру інваріантності фундаментальних розв'язків лінійного рівняння Колмогорова (1), оператори якої були використані для побудови слабких інваріантних фундаментальних розв'язків цього рівняння. Показано, що фундаментальний розв'язок (3) рівняння (1), знайдений А.М. Колмогоровим, є слабким інваріантним фундаментальним розв'язком.

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Lie, *Classification und integration von gewönlichen differentialgleichungen zwischen x, y, die eine gruppe von transformationen gestatten*, Math. Ann. **32** (1888), 213–281.
2. S. Lie, F. Engel, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*, Teubner, Leipzig (1893), 805 p.
3. Г. Биркгоф, *Гидродинамика*, Изд-во иностр. лит., М. (1963), 400 с.
4. Л.И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, Наука, М. (1967), 440 с.
5. A.J.A. Morgan, *The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial defferential equations*, Quart. J. Math. Oxford **3**:12 (1952), 250–259.
6. Л.В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М. (1978), 400 с.
7. Н.Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М. (1983), 280 с.
8. Н.Х. Ибрагимов, *Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли)*, Успехи мат. наук **47**:4 (1992), 83–144.
9. В.И. Фущич, А.Г. Никитин, *Симметрия уравнений Максвелла*, Наук. думка, Киев (1983), 200 с.
10. В.И. Фущич, А.Г. Никитин, *Симметрия уравнений квантовой механики*, Наука, М. (1990), 400 с.
11. В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов, *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*, Наук. думка, Киев (1989), 336 с.
12. П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М. (1989), 639 с.
13. У. Миллер, *Симметрия и разделение переменных*, Мир, М. (1981), 344 с.
14. В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній, *Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу*, Ін-т математики НАН України, Київ (2003), 360 с.
15. А.В. Аксенов, *Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения*, Доклады АН **342**:2 (1995), 151–153.
16. А.В. Аксенов, *Симметрии фундаментальных решений уравнений с частными производными*, в: Симметрии дифференциальных уравнений: сб. науч. тр., Московский физ.-тех. ин-т, М. (2009), 6–35.
17. Ю.Ю. Берест, *Построение фундаментальных решений для гюйгенсовых уравнений как инвариантных решений*, Доклады АН **317**:4 (1991), 786–789.
18. Ю.Ю. Берест, *Групповой анализ линейных дифференциальных уравнений в обобщенных функциях и построение фундаментальных решений*, Дифференциальные уравнения **29**:11 (1993), 1958–1970.
19. Yu. Berest, Yu. Molchanov *Fundamental solutions for partial differential equations with reflection group invariance*, J. Math. Phys. **36**:8 (1995), 4324–4339.

20. R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov, *Lie symmetry analysis of differential equations in finance*, Nonlinear Dynam. **17** (1998), 387–407.

21. M. Craddock, E. Platen, *Symmetry group methods for fundamental solutions*, J. Differential Equations **207** (2004), 285–302.

22. M. Craddock, *Fundamental solutions, transition densities and the integration of Lie symmetries*, J. Differential Equations **246** (2009), 2538–2560.

23. M. Craddock, *Lie symmetry methods for multi-dimensional parabolic PDEs and diffusions*, J. Differential Equations **252** (2012), 56–90.

24. A.N. Kolmogoroff, *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung)*, Ann. Math. **35**:1 (1934) 116–117.

25. С.В. Спічак, В.І. Стогній, І.М. Копась, *Симетрійний аналіз і точні розв'язки лінійного рівняння Колмогорова*, Наукові вісті НТУУ "КПІ", № 4 (2011), 93–97.

26. В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М. (1981), 512 с.

27. L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence (2010), 749 p.

28. G. Bluman, *Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation*, J. Math. Anal. Appl. **145**:1 (1990), 52–62.

29. В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматлит, М. (2001), 576 с.

30. Ю.Ю. Берест, *Слабые инварианты локальных групп преобразований*, Дифференциальные уравнения **29**:10 (1993), 1796–1803.

Надійшло 29.11.2013