Математичний Вісник
Наукового товариства
імені Шевченка
2013. — Т.10

Mathematical Bulletin
of the Shevchenko
Scientific Society
2013. — V.10

ЧИСЛА ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ВІДРІЗКУ

Олександр Рибак

Інститут математики НАН України, 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3

О. Рибак. *Числа Ляпунова для динамічних систем на відрізку* // Мат. вісник НТШ. — 2013. — Т.10. — С. 127–134.

Розглядаються чутливі динамічні системи, що задаються неперервним відображенням відрізка прямої в себе. Кількісні характеристики чутливості визначаються числами Ляпунова: $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}_4$, де $\mathcal{L}_1$ – максимальна похибка прогнозу еволюції системи, $\mathcal{L}_2$ – гранична поведінка цієї похибки, $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$ описують максимальне та граничне відхилення від фіксованої орбіти. Зокрема, доведено рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.

O. Rybak, *The Lyapunov numbers for dynamical systems on the interval*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **10** (2013), 127–134.

We consider sensitive dynamical systems defined by continuous selfmaps of the interval. Quantitative characteristics of the sensitivity are determined by the Lyapunov numbers: $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ and $\mathcal{L}_4$, where $\mathcal{L}_1$ is equal to the maximum error of prediction of the system evolution, $\mathcal{L}_2$ shows the limit behaviour of this error, $\mathcal{L}_3$ and $\mathcal{L}_4$ describe the maximal and the limit deviation from a fixed orbit. In particular, the equalities $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ and $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$ are proved.

1. Вступ

У процесі вивчення фізичних систем із них стали виділяти такі, що є стійкими до початкових умов. Стійкість означає, що довільні малі зміни початкового стану системи не будуть сильно впливати на її подальший розвиток. Стійкі системи досить зручні для моделювання та аналізу, бо навіть при невеликих похибках у визначенні початкового стану все одно можна з певною точністю спрогнозувати подальший розвиток системи.

Одне з означень стійкої системи ввів у теорію диференціальних рівнянь О.М. Ляпунов. Це означення відноситься до систем, стан яких задається точкою в певному метричному просторі X. Введемо допоміжне позначення: нехай $F(x, t)$ – це стан системи у час t, якщо в нульовий момент часу вона перебувала в стані x. За означенням

2010 *Mathematics Subject Classification:* 37B25, 37E05 *УДК:* 517.9
Ключові слова і фрази: неперервне відображення відрізка в себе, числа Ляпунова, чутливість.
E-mail: semperfi@ukr.net

Ляпунова, система є *стійкою* в точці x, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного моменту $t > 0$ та довільної точки y, для якої $d(x, y) < \delta$, виконується нерівність $d(F(x,t), F(y,t)) \leq \varepsilon$. Тут $d(x, y)$ – відстань між точками x та y. Система називається *стійкою до початкових умов* (або просто *стійкою*), якщо вона стійка у будь-якій точці $x \in X$.

Означення Ляпунова підходить і для дискретних динамічних систем, які є основним об'єктом вивчення даної статті. *Дискретною динамічною системою* (або просто *динамічною системою*) називатимемо пару (X, f), де X – простір з деякою метрикою d, а f – відображення простору X у себе. Часто розглядають лише відображення f, неперервні відносно d. У даній роботі це теж так, тому далі ми не будемо окремо підкреслювати неперервність f. При розгляді пари (X, f) як динамічної системи нас зазвичай цікавитимуть n-кратні композиції f, тобто функції, означені рекурсивно як $f^n = f \circ f^{n-1}$, де $f^1 = f$. Означення Ляпунова легко перенести на дискретні динамічні системи, розглядаючи точки $f^n(x)$ замість $F(x,t)$.

Звичайно, далеко не всі природні явища демонструють стійкість до початкових умов. Наприклад, стійкими не будуть системи, що описують зміни популяцій комах або процеси у плазмі. При вивченні таких систем важливо оцінити, з якою точністю ми можемо прогнозувати їхню еволюцію.

Як протилежний випадок до стійких, стали вивчатися чутливі динамічні системи. У роботах Дж. Гукенхаймера [6], а також Дж. Ауслендера та Дж. Йорка [3] було дано наступне означення. Система (X, f) *чутлива до початкових умов*, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ та довільного її околу $U_x \subset X$ існують точка $y \in U_x$ та невід'ємне ціле n, для яких $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$. Для скорочення такі системи називають просто *чутливими*. Згодом динамічні системи, чутливі до початкових умов, розглядалися в роботах багатьох авторів. Серед таких робіт можна згадати статтю О. Блоха [10], присвячену аналізу відображень відрізка.

Поняття чутливості застосовується в означенні хаосу. Так, Р. Девані [5] запропонував називати *хаотичними* ті системи, що мають щільну множину періодичних точок, а також одночасно є транзитивними та чутливими. Нагадаємо, що система (X, f) називається *транзитивною*, якщо для будь-яких непорожніх відкритих $U, V \subset X$ знайдеться таке ціле $n \geq 0$, що $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$. Через кілька років в декількох статтях (зокрема в [4] та [7]) незалежно було доведено, що при компактному X з перших двох умов у означенні Девані вже слідує чутливість. Цей результат одним з перших показав зв'язок між чутливістю системи та її топологічними особливостями, тобто особливостями еволюції відкритих підмножин. Після цього формально систематичне вивчення чутливих систем було проведене в роботі [1].

У монографії С. Рюет [9] розглядається динаміка систем на відрізку. Особлива увага приділена явищам чутливості та хаотичності таких систем. Наведемо дві теореми зі згаданої роботи (с. 19 та с. 22), що ілюструють зв'язок між чутливістю та транзитивністю. В оригіналі ці твердження містять додаткові подробиці. Тут вкажемо лише основні результати.

Теорема 1.1. *Кожна транзитивна динамічна система (I, f) на відрізку є чутливою.*

Теорема 1.2 (О. Блох). *Якщо система (I, f) на відрізку I чутлива, то I містить невироджені попарно неперетинні відрізки J_1, J_2, …, J_p, для яких виконуються наступні умови. По-перше, для даних відрізків справедливі рівності $f(J_1) = J_2$, $f(J_2) = J_3$, …, $f(J_p) = J_1$. А по-друге, система $(J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_p, f)$ є транзитивною.*

Наведені теореми вдало пов'язують чутливість зі структурними якостями системи (I, f). Але вони не дають кількісних оцінок для величин, згаданих у теоремах. Наприклад у теоремі 1.2 не вказана точна оцінка довжини найбільшого з відрізків $J_1, J_2, \dots, J_p$ в залежності від параметра ε, який фігурує в означенні чутливості.

У статті І. Ейкіна та С. Коляди [2] був доведений наступний факт, що демонструє еквівалентність різних означень чутливості.

Теорема 1.3. *Для довільного неперервного відображення $f : X \to X$ компактного метричного простору (X, d) наступні умови еквівалентні:*

(1) Існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що будь-яка непорожня відкрита множина $U \subset X$ містить точки $x, y \in U$, для яких $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} d\big(f^n(x), f^n(y)\big) > \varepsilon_1$.

(2) Існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що будь-яка непорожня відкрита множина $U \subset X$ містить точки $x, y \in U$, для яких $\limsup\limits_{n \to \infty} d\big(f^n(x), f^n(y)\big) > \varepsilon_2$.

(3) Система (X, f) є чутливою, тобто існує таке $\varepsilon_3 > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ довільний її окіл U_x містить точку $y \in U_x$, для якої $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} d\big(f^n(x), f^n(y)\big) > \varepsilon_3$.

(4) Існує таке $\varepsilon_4 > 0$, що для будь-якої точки $x \in X$ довільний її окіл U_x містить точку $y \in U_x$, для якої $\limsup\limits_{n \to \infty} d\big(f^n(x), f^n(y)\big) > \varepsilon_4$.

В роботі [8] даний результат було покращено: доводилося, що для зазначених ε_i відношення максимальних значень будь-яких двох з них не перевищує 2. Також давався конструктивний спосіб знаходження відповідних точок x та y. У згаданій роботі максимальні значення ε_i названі *числами Ляпунова*, оскільки аналогічна конструкція фігурує в означенні стійкості за Ляпуновим. Стаття [8] присвячена порівнянню чисел Ляпунова для різних типів систем.

Дана робота є продовженням [8]. Слід зауважити, що перша стаття акцентувалася на системах загального вигляду, а в цій роботі основна увага приділяється відображенням відрізка. У другому розділі визначаються основні поняття, більшість з яких вивчалася в [8]. У третьому розділі формулюються та доводяться основні результати статті. Четвертий розділ присвячено деяким узагальненням.

2. Основні означення

Нагадаємо означення чисел Ляпунова $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ та $\mathcal{L}_4$, що були введені в [8].

Для точки x топологічного простору X через $O_x(X)$ позначимо сім'ю усіх відкритих околів точки x, а через $\mathcal{O}(X) = \bigcup_{x \in X} O_x(X)$ – сім'ю всіх відкритих непорожніх підмножин простору X.

Для системи (X, f) визначимо *діаметральну константу Ляпунова* як

$$\mathcal{L}_1 = \inf_{U \in \mathcal{O}(X)} \sup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(f^n(U)) = \inf_{U \in \mathcal{O}(X)} \sup_{x,y \in U} \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f^n(x), f^n(y)).$$

З цього означення слідує, що (X, f) чутлива тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_1 > 0$.

Можна визначити чутливість і в більш сильній формі. Систему (X, f) будемо називати *асимптотично чутливою*, якщо є таке $\varepsilon > 0$, що всередині будь-якої відкритої непорожньої $U \subset X$ знайдуться дві точки x та y, для яких $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$. Для отримання кількісної характеристики, пов'язаної з цією формою чутливості, визначимо *діаметральну асимптотичну константу Ляпунова*

$$\mathcal{L}_2 = \inf_{U \in \mathcal{O}(X)} \sup_{x,y \in U} \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)).$$

У загальному (не компактному) випадку з чутливості не слідує асимптотична чутливість. Наступний приклад показує, що існують системи, для яких $\mathcal{L}_1 > 0$, але $\mathcal{L}_2 = 0$.

Приклад 2.1. Розглянемо канторів куб $K = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ з оператором зсуву $f : K \to K$, $f : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \to (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$, та (ультра)метрикою

$$d\big((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}\big) = \max\big(\{0\} \cup \{2^{-|i|} : x_i \neq y_i\}\big).$$

У канторовому кубі розглянемо всюди щільну підмножину

$$X = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in K : |\{i \in \mathbb{Z} : x_i \neq 0\}| < \infty\},$$

що складається з послідовностей, у яких лише скінченна кількість координат відмінна від нуля. Нескладно перевірити, що для системи (K, f) справджується рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = 1$, у той час як для підсистеми $(X, f|X)$ маємо $\mathcal{L}_1 = 1$ і $\mathcal{L}_2 = 0$.

Таким чином, система $(X, f|_X)$ є чутливою, але не асимптотично чутливою.

Також для довільної системи (X, f) можна ввести константи чутливості, пов'язані з відхиленням орбіт різних точок від орбіти певної точки $x \in X$. А саме, нехай

$$\mathcal{L}_3(x) = \inf_{U \in \mathcal{O}_x(X)} \sup_{y \in U} \sup_{n \in \mathbb{N}} d\big(f^n(x), f^n(y)\big).$$

Число $\mathcal{L}_3 = \inf_{x\in X} \mathcal{L}_3(x)$ називатимемо *радіальною константою Ляпунова*. Нарешті, введемо *радіальну асимптотичну константу Ляпунова*:

$$\mathcal{L}_4 = \inf_{x \in X} \mathcal{L}_4(x), \quad \text{де} \quad \mathcal{L}_4(x) = \inf_{U \in \mathcal{O}_x(X)} \sup_{y \in U} \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)).$$

У [8] доведено, що у випадку компактного X та неперервної f вірно $\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_1/2$. Також для довільної системи (X, f) виконуються очевидні нерівності

$$\mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_4 \quad \text{та} \quad \mathcal{L}_1 \geq \mathcal{L}_3 \geq \mathcal{L}_4.$$

З усього цього слідує, що за компактного X та неперервної f будь-які два числа Ляпунова відрізняються не більше, ніж удвічі.

Ще у [8] було наведено приклад системи (X, f) з компактним X та неперервною f, для якої $\mathcal{L}_1 = 2\mathcal{L}_3$, а також системи, для якої $\mathcal{L}_3 = 2\mathcal{L}_4$. Існування систем зі згаданими додатковими обмеженнями, для яких $\mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_2$, залишається відкритим питанням. Теорема 3.1 відповідає на це питання у випадку системи на відрізку.

3. Рівності між числами Ляпунова для відображення відрізка

Доведемо рівності між деякими числами Ляпунова у випадку системи на відрізку.

Теорема 3.1. *Якщо I – відрізок, то для системи (I, f) виконується рівність $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.*

Доведення. Розглянемо непорожню відкриту множину $U \subset I$. Також візьмемо довільне $\delta > 0$.

За означенням діаметральної константи Ляпунова, знайдуться $x_1, y_1 \in U$ та $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $d(f^{n_1}(x_1), f^{n_1}(y_1)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Відображення f є неперервним, тому існує відрізок $V_1 \subset U$, який містить точку x_1 і для якого $\operatorname{diam}(f^{n_1}(V_1)) < \delta$. Аналогічно, існує відрізок $W_1 \subset U$, який містить точку y_1 і для якого також виконується нерівність $\operatorname{diam}(f^{n_1}(W_1)) < \delta$. З нерівності трикутника отримуємо $d(f^{n_1}(V_1), f^{n_1}(W_1)) > \mathcal{L}_1 - 3\delta$, де $d(A, B)$ для множин A та B означає мінімум величини $d(a, b)$ по всіх $a \in A$ та $b \in B$.

Побудуємо послідовності відрізків $\{V_k\}_{k=2}^{\infty}$ та $\{W_k\}_{k=2}^{\infty}$ та зростаючу послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$ з наступними властивостями. По-перше, для всіх $k \in \mathbb{N}$ будуть мати місце включення $V_{k+1} \subset V_k$ та $W_{k+1} \subset W_k$. По-друге, для кожного $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ справджуватиметься нерівність $d(f^{n_k}(V_k), f^{n_k}(W_k)) > \mathcal{L}_1 - 3\delta$. Оскільки ми вже знайшли V_1, W_1 та n_1, послідовності можна будувати індуктивно. Тобто, для довільного $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ достатньо довести існування відповідних V_k, W_k та n_k, припускаючи, що V_{k-1}, W_{k-1} та n_{k-1} вже обрані.

У відрізку V_{k-1} виберемо настільки малий відрізок S, що для всіх цілих невід'ємних $i \leq n_{k-1}$ виконується $\operatorname{diam}(f^i(S)) < \mathcal{L}_1 - \delta$. З властивостей константи $\mathcal{L}_1$ слідує, що знайдеться таке m, для якого $\operatorname{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. За вибором S, має місце нерівність $m > n_{k-1}$.

Спочатку розглянемо випадок, коли існує точка $y \in W_{k-1}$, для якої $f^m(y) \notin f^m(S)$. Нехай z – той кінець відрізка $f^m(S)$, який знаходиться далі від $f^m(y)$. Очевидно, знайдеться точка $x \in S$, для якої $f^m(x) = z$. Тоді $d(f^m(x), f^m(y)) = d(z, f^m(y)) \geq \operatorname{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Розглянемо відрізок V_k, для якого виконуються умови $x \in V_k$, $V_k \subset V_{k-1}$ та $\operatorname{diam}(f^m(V_k)) < \delta$. Аналогічно, нехай W_k – деякий відрізок, для якого $y \in W_k$, $W_k \subset W_{k-1}$ та $\operatorname{diam}(f^m(W_k)) < \delta$. У якості n_k візьмемо m. Тоді, як і вимагалося, справджується нерівність $d(f^{n_k}(V_k), f^{n_k}(W_k)) = d(f^m(V_k), f^m(W_k)) \geq d(f^m(x), f^m(y)) - 2\delta > \mathcal{L}_1 - 3\delta$.

Залишився випадок, коли $f^m(W_{k-1}) \subset f^m(S)$. Тоді справедливе включення $f^m(W_{k-1}) \subset f^m(V_{k-1})$, тому що $S \subset V_{k-1}$. За означенням $\mathcal{L}_1$, існує таке $t \in \mathbb{N}$, що $\operatorname{diam}(f^t(f^m(W_{k-1}))) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Отже, для деяких $y, z \in W_{k-1}$ виконується нерівність $d(f^{m+t}(y), f^{m+t}(z)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Оскільки $f^m(W_{k-1}) \subset f^m(V_{k-1})$, знайдеться $x \in V_{k-1}$, для якої $f^m(x) = f^m(z)$, а отже $f^{m+t}(x) = f^{m+t}(z)$. Маємо $x \in V_{k-1}$, $y \in W_{k-1}$ та $d(f^{m+t}(x), f^{m+t}(y)) > \mathcal{L}_1 - \delta$. Тому можна взяти $n_k = m + t$, а відрізки V_k та W_k обрати так само, як і в попередньому випадку.

Усі відрізки послідовності $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ є вкладеними, тому вони мають спільну точку v. Аналогічно, відрізки послідовності $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ мають деяку спільну точку w. За вибором V_1 та W_1, справедливе включення $v, w \in U$. Також, за побудовою $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ вірна нерівність $d(f^{n_k}(v), f^{n_k}(w)) > \mathcal{L}_1 - 3\delta$. Тобто, $\mathcal{L}_2 \geq \mathcal{L}_1 - 3\delta$. З довільності $\delta > 0$ отримуємо, що $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$. □

Доведемо аналогічну теорему для радіальних констант.

Теорема 3.2. *Для довільної динамічної системи (I, f) на відрізку I справджується рівність $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in I$ та деяку відкриту множину $U \subset I$, яка містить x. Також оберемо довільне $\delta > 0$.

За означенням $\mathcal{L}_3$, знайдуться $y \in U$ та $n_1 \in \mathbb{N}$, для яких $d(f^{n_1}(x), f^{n_1}(y)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. На множині U оберемо відрізок V_1, який містить y та задовольняє умову $\operatorname{diam}(f^{n_1}(V_1)) < \delta$. Тоді вірна нерівність $d(f^{n_1}(x), f^{n_1}(V_1)) < \mathcal{L}_3 - 2\delta$, де $d(p, A)$ позначає відстань від точки p до найближчої до неї точки з множини A.

Побудуємо послідовність відрізків $\{V_k\}_{k=2}^{\infty}$ та зростаючу послідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$ з наступними властивостями. По-перше, для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконуватиметься співвідношення $V_{k+1} \subset V_k$. По-друге, для кожного $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$ справджуватиметься нерівність $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(V_k)) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$. Як і в доведенні попередньої теореми, будуватимемо послідовності індуктивно.

Розглянемо довільне $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 2)$. Оберемо на V_{k-1} настільки малий відрізок S, що для всіх цілих невід'ємних $i \leq n_{k-1}$ виконується $\operatorname{diam}(f^i(S)) < \mathcal{L}_3 - \delta$. З означення $\mathcal{L}_3$ слідує, що є таке m, для якого $\operatorname{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. За вибором S, маємо $m > n_{k-1}$.

Розглянемо випадок, коли $f^m(x) \notin f^m(S)$. Нехай z – той з двох кінців відрізка $f^m(S)$, який знаходиться далі від $f^m(x)$. Тоді, очевидно, $d(f^m(x), z) > \operatorname{diam}(f^m(S)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Оскільки $z \in f^m(S)$, існує точка $y \in S$, для якої $f^m(y) = z$. Оберемо відрізок $V_k \subset S$, який містить y та має настільки малу довжину, що $\operatorname{diam}(f^m(V_k)) < \delta$. Також покладемо $n_k = m$. Тоді $V_k \subset S \subset V_{k-1}$ та $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(V_k)) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$, що і було потрібно.

Залишився випадок, коли $f^m(x) \in f^m(S)$. За означенням $\mathcal{L}_3$, існують $t \in \mathbb{N}$ та $z \in f^m(S)$, для яких $d(f^t(f^m(x)), f^t(z)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Розглянемо точку $y \in S$, для якої $f^m(y) = z$. Тоді $d(f^{m+t}(x), f^{m+t}(y)) > \mathcal{L}_3 - \delta$. Покладемо $n_k = m + t$ і, аналогічно попередньому випадку, оберемо відрізок $V_k \subset S$, який містить y та задовольняє умову $\operatorname{diam}(f^{n_k}(V_k)) < \delta$.

Послідовно розглядаючи всі натуральні $k \geq 2$, ми побудуємо потрібні послідовності $\{V_k\}_{k=2}^{\infty}$ та $\{n_k\}_{k=2}^{\infty}$. Для точки v, що належить усім V_k, за будь-якого $k \in \mathbb{N}$ виконується умова $d(f^{n_k}(x), f^{n_k}(v)) > \mathcal{L}_3 - 2\delta$. Отже, $\mathcal{L}_4 \geq \mathcal{L}_3 - 2\delta$, а завдяки довільності $\delta > 0$ виходить $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$. □

Наведемо приклад системи, для якої $\mathcal{L}_3 < \mathcal{L}_1$. Нехай $I = [0, 1]$ та $f(x) = |1 - 2x|$. Легко показати, що для довільної непорожньої відкритої підмножини $U \subset I$ знайдеться таке $n \in \mathbb{N}$, що $f^n(U) = I$. Тому $\mathcal{L}_1 = 1$. З іншого боку, точка $x = \frac{1}{3}$ є нерухомою для f. Отже, для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ та $y \in I$ справедливе співвідношення $d(f^n(x), f^n(y)) = |\frac{1}{3} - f^n(y)| \leq \frac{2}{3}$. Тому $\mathcal{L}_3 \leq \frac{2}{3}$ (і можна показати, що $\mathcal{L}_3 = \frac{2}{3}$.)

Далі ми покажемо, що така ситуація не є типовою. Нагадаємо, що

$$\mathcal{L}_3(x) = \inf_{U \in \mathcal{O}_x(X)} \sup_{y \in U} \sup_{n \in \mathbb{N}} d\big(f^n(x), f^n(y)\big).$$

Підмножину $Y \subset X$ будемо називати *підмножиною першої категорії Бера*, якщо Y можна представити як зліченне об'єднання ніде не щільних підмножин з X. Підмножини першої категорії Бера є, у деякому сенсі, малими підмножинами. Наприклад, тому, що відрізок (або іншу непорожню компактну множину) не можна покрити зліченною кількістю підмножин першої категорії.

Теорема 3.3. *Для довільної динамічної системи (X, f) на метричному просторі (X, d) підмножина $Y = \{x \in X | \ \mathcal{L}_3(x) < \mathcal{L}_1\}$ є підмножиною першою категорії Бера в X.*

Доведення. Нехай $B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ позначає відкриту кулю радіуса r навколо $x \in X$. Позначимо через A_{pq} множину таких точок x, що для будь-якого $y \in B_{1/p}(x)$ та будь-якого невід'ємного цілого числа n виконується нерівність $d(f^n(x), f^n(y)) < \mathcal{L}_1 - \frac{1}{q}$. Очевидно, $Y = \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{q=1}^{\infty} A_{pq}$.

Доведемо, що кожна A_{pq} – ніде не щільна, тобто вона не є щільною ні в якій відкритій непорожній множині $U \subset X$. Припустимо протилежне: нехай деяка A_{pq} щільна в певній $U \in \mathcal{O}(X)$. Оберемо в U відкриту підмножину V діаметром менше $\frac{1}{p}$. За означенням $\mathcal{L}_1$, існують точки $x, y \in V$ та число $n \in N$, для яких $d(f^n(x), f^y(n)) > \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2q}$. Оскільки A_{pq} щільна у V, існує точка $z \in A_{pq} \cap V$, яка настільки близька до x, що $d(f^n(x), f^n(z)) < \frac{1}{2q}$. Але за означенням множини A_{pq} маємо, що $d(f^n(z), f^n(y)) < \mathcal{L}_1 - \frac{1}{q}$. Тоді, за нерівністю трикутника, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n) < \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2q}$, що суперечить вибору x, y та n. Отже, кожна A_{pq} – ніде не щільна, а тоді Y є підмножиною першої категорії. □

4. Узагальнення отриманих результатів

Теореми 3.1 та 3.2 виконуються не лише для систем, заданих на відрізку. Щоб зробити узагальнення цих теорем, опишемо вимогу до відображення f, яку назвемо умовою сильної віддаленості.

Будемо казати, що для відображення $f : X \to X$ виконується *умова сильної віддаленості*, якщо існує таке $r_1 > 0$, що для довільної замкненої кулі $B = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ радіуса $r < r_1$, довільного цілого $n \geq 0$ та довільної $x \notin f^n(B)$ справджується нерівність $\sup_{y \in f^n(B)} d(x, y) \geq \mathrm{diam}(f^n(B))$. Легко переконатися, що доведення теорем 3.1 та 3.2 використовують лише той факт, що метричний простір X – повний, а f є неперервною та задовольняє умову сильної віддаленості.

Для відрізка I зі стандартною метрикою $d(x, y) = |x - y|$ описаний принцип, очевидно, виконується за довільної неперервної f. Виявляється принцип має місце і для інших видів систем.

По-перше, він вірний для відрізка I з будь-якою *монотонною* метрикою, тобто такою метрикою d, що для будь-яких $x < y < z$ виконуються нерівності $d(x, y) \leq d(x, z)$ та $d(y, z) \leq d(x, z)$.

По-друге, принцип сильної віддаленості справедливий для кола, на якому відстань між точками x та y визначається як довжина більш короткої дуги з кінцями в цих точках. Також даний принцип розповсюджується на скінченне об'єднання відрізків та кіл, які не перетинаються. Це слідує з того, що куля U достатньо малого радіуса буде належати лише одному колу або відрізку. Тому її неперервний образ $f^n(U)$ також знаходитиметься всередині однієї зв'язної компоненти простору, а до нього можна застосувати попередні міркування.

Таким чином, можна сформулювати більш загальну теорему.

Теорема 4.1. *Нехай X – повний метричний простір, а $f : X \to X$ є неперервним і задовольняє умову сильної віддаленості. Тоді для (X, f) справджуються рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.*

Нагадаємо, що метрика d на множині X називається *ультраметрикою*, якщо вона задовольняє посилену нерівність трикутника

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \text{ для довільних точок } x, y, z \in X.$$

Наприклад, метрика на канторовому кубі із прикладу 2.1 є ультраметрикою. Посилена нерівність трикутника гарантує, що для довільної підмножини $B \subset X$ ультраметричного простору (X, d) та точки $x \in X$ справджується нерівність $\mathrm{diam}(B) \leq \sup_{y \in B} d(x, y)$, звідки випливає, що будь-яке відображення $f : X \to X$ на X задовольняє умову сильної віддаленості. Тому із теореми 4.1 випливає наступний наслідок.

Наслідок 4.2. *Для довільної динамічної системи (X, f) на повному ультраметричному просторі справджуються рівності $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ та $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_4$.*

Автор висловлює подяку Т.О. Банаху та С.Ф. Коляді за пропозиції й корисні поради відносно написання даної статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. E. Akin, J. Auslander, K. Berg, *When is a transitive map chaotic?* Convergence in ergodic theory and probability (Columbus, OH, 1993), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., **5**, de Gruyter, Berlin, (1996), 25–40.

2. E. Akin and S. Kolyada, *Li–Yorke sensitivity*, Nonlinearity, **16** (2003), 1421–1433.

3. J. Auslander, J. Yorke, *Interval maps, factors of maps and chaos*, Tohoku Mathematical Journal, **32** (1980), 177–188.

4. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, American Mathematical Monthly, **99**:4 (1992), 332–334.

5. R. L. Devaney, *An introduction to chaotical dynamical systems*, second edition, Addison–Wesley Studies in Nonlinearity, (1989), 336 pp.

6. J. Guckenheimer, *Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps*, Comm. Math. Phys., **70** (1979), 133–160.

7. E. Glasner and B. Weiss, *Sensitive delendence on initial conditions*, Nonlinearity, **6** (1993), 1067–1075.

8. S. Kolyada, O. Rybak, *On the Lyapunov numbers*, Colloquium Mathematicum, **131**:2 (2013), 209–218.

9. S. Ruette, *Chaos for continuous interval maps*, University of Paris-Sud, (2003), 123 pp.

10. А.М. Блох, *О чувствительных отображениях отрезка*, Успехи математических наук, **37** (1982), 189–190.

Надійшло 15.10.2013

Після переробки 04.11.2013