ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

©2007 р. Володимир ІЛЬКІВ [1], *Тетяна МАГЕРОВСЬКА* [2]

[1]Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С. Бандери, 13, Львів 79013
[2]Львівський державний університет внутрішніх справ,
вул. Городоцька, 26, Львів 79007

Редакція отримала статтю 17 вересня 2007 р.

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора для строго гіперболічного рівняння довільного порядку зі змінними коефіцієнтами досліджено умови розв'язності задачі із загальними багатоточковими нелокальними умовами. За допомогою метричного підходу встановлено існування та єдиність розв'язку, а також його гладкість у шкалі просторів Соболєва. Доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникають у процесі побудови цього розв'язку.

1. Постановка задачі. Позначення. В області $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega^p_{2\pi}$, де $T > 0$, $\Omega^p_{2\pi} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, розглядається багатоточкова задача для гіперболічного рівняння

$$L(t, D_t, D)u \equiv D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, D) D_t^{n-j} u = 0 \tag{1}$$

$$lu \equiv \sum_{\alpha=1}^{M} \sum_{j=1}^{n} B_{j\alpha}(D) D_t^{n-j} u\big|_{t=t_\alpha} = \varphi, \tag{2}$$

де $0 \le t_1 < \cdots < t_M \le T$, $D_t = \partial/\partial t$.

УДК 517.946+511.37, MSC 2000: 35L20, 35B10

Робота виконана при фінансовій підтримці ДФФД України (проект № 25.1/080, Договір № Ф 25/542–2007 від 03.09.2007 р.)

Коефіцієнти $A_j(t,D)$ рівняння (1) — диференціальні оператори вигляду $A_j(t,D) = \sum\limits_{|s|\le jl} a_{js}(t)D^s$, де $a_{js}(t)$ — неперервно диференційовні на $[0,T]$ комплекснозначні функції, причому $A_j^0(t,D) = \sum\limits_{|s|=jl} a_{js}(t)D^s$, $A_j^1(t,D) = \sum\limits_{|s|\le(j-1)l} a_{js}(t)D^s$, $D^s = D_1^{s_1}\cdots D_p^{s_p}$, $D_1 = -i\partial/\partial x_1,\ldots,D_p = -i\partial/\partial x_p$, $s=(s_1,\ldots,s_p)$, $|s| = s_1+\cdots+s_p$. Строга гіперболічність рівняння (1) означає, що корені $\lambda_1(t,\xi),\ldots,\lambda_n(t,\xi)$ рівняння

$$\lambda^n + \sum_{j=1}^{n} A_j^0(t,\xi)\lambda^{n-j} = 0 \tag{3}$$

є уявними та різними для всіх $(t,\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$. Тому ці корені є неперервно диференційовними функціями за змінною t та гладкими за змінною ξ, а функція $\prod\limits_{1\le i<j\le n}\left|\lambda_i(t,\xi)-\lambda_j(t,\xi)\right|^2$ є додатною. Оператори $B_{j\alpha}(D)$ — це стовпці вигляду: $B_{j\alpha}(D) = \sum\limits_{|s|\le jl} B_{j\alpha s}D^s$, де $B_{j\alpha s}\in\mathbb{C}^n$. Компоненти векторів $B_{j\alpha s}\in\mathbb{C}^n$ вважаємо параметрами задачі (1), (2). Натуральне число l характеризує ріст коренів $\lambda_j(t,\xi)$ при $\xi\to\infty$.

Задача (1), (2) розглядалася в роботі [1] для систем неоднорідних безтипних диференціальних рівнянь, а також для випадку двоточкових умов в роботах [2,3]. Встановлено розв'язність задач у просторах $\mathbf{E}_{h,l} = \mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $h,l\in\mathbb{R}$, періодичних вектор-функцій $\psi(x) = \sum\limits_k \widehat{\psi}_k e^{i(k,x)}$, які є поповненням множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi;\mathbf{E}_{h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\exp(2h\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\psi}_k^*\widehat{\psi}_k\Big)^{1/2},$$

де $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_{2\pi}^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1+\cdots+k_px_p$, $\widetilde{k} = (1+k_1^2+\cdots+k_p^2)^{1/2}$, а символ „*“ позначає операцію ермітового спряження. Ці простори складаються з функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають експоненційну поведінку. Така властивість є характерною ознакою нелокальних задач для безтипних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Для рівнянь зі сталими коефіцієнтами задачі типу (1), (2) мають розв'язки [4, 5] у шкалі просторів Соболєва $\{\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\}$, де простір $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $q\in\mathbb{R}$, є поповненням множини тригонометричних многочленів за нормою

$$\|\psi;\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{\,2q}\widehat{\psi}_k^*\widehat{\psi}_k\Big)^{1/2}.$$

У роботах [6, 7] встановлено, що розв'язки нелокальних задач для рівнянь зі змінними коефіцієнтами гіперболічного типу (строго гіперболічних) другого порядку за змінною t, також належать шкалі просторів Соболєва, якщо цій шкалі належать праві частини задач. Нелокальні задачі для гіперболічних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами, факторизованих та деяких інших рівнянь вивчалися також у роботах [8–11].

Розглядувані задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки. Для отримання оцінок знизу малих знаменників використовується метричний підхід [12, 13]. Існування розв'язку встановлюється для всіх задач за винятком множини задач малої міри в просторі коефіцієнтів крайових умов.

У роботі показано, що майже всі задачі (1), (2) розв'язні в просторах Соболєва, подібно до нелокальних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. Встановлено гладкість їх розв'язків та залежність гладкості від коефіцієнтів нелокальних умов.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо в банаховому просторі $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, де $\mathbf{H}^N_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, $l, q \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, — простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що $D^j_t u \in \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)$ для кожного $j = 0, 1, \ldots, N$; норма визначається формулою $\|u; \mathbf{H}^N_{l,q}(\mathcal{D}^p)\| = \Big(\sum\limits_{j=0}^{N} \|D^j_t u; \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)\|^2\Big)^{1/2}$.

Якщо $U^j \in \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\big)$ для $j = 1, \ldots, n$, то вважаємо, що вектор-функція $U = \mathrm{col}(U^1, \ldots, U^n)$ належить до простору $\mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)$ і має норму $\|U; \mathbf{H}_q(\mathcal{D}^p)\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \|U^j; \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\|^2$.

Для послідовності комплексних чисел $F(k)$ введемо псевдодиференціальний оператор $F(D)$ за формулою $F(D)\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} F(k)\widehat{\psi}_k e^{ikx}$, де $\psi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\psi}_k e^{ikx}$. Якщо послідовність $|F(k)|$ обмежена зверху (знизу), то оператор $F(D)$ (оператор $F^{-1}(D)$) є обмеженим у шкалі $\{\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\}$.

Послідовність $\widetilde{k}$, що використовується у визначенні норми в $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, визначає оператор $\widetilde{D}$, для якого $\|\varphi; \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\| = \|\widetilde{D}^{q_1}\varphi; \mathbf{H}_{q-q_1}(\Omega^p_{2\pi})\|$.

2. Сталі коефіцієнти в головній частині рівняння. Нехай рівняння (1) має сталі коефіцієнти в головній частині: $A^0_j(t,D) = A^0_j(D)$.

Позначимо $\mu_j(k) = -i\widetilde{k}^{\,-l}\lambda_j(k)$ при $k \neq 0$, $\mu_j(0) = 0$, $j = 1, \ldots, n$,

$$U_k(t) = \mathrm{col}\left(U^1_k(t), \ldots, U^n_k(t)\right) = \mathrm{col}\left(\widetilde{k}^{\,(n-j)l} u^{(j)}_k(t)\right)_{j=0}^{n-1}, \tag{4}$$

де $u_k(t)$ — коефіцієнти Фур'є розв'язку u задачі (1), (2). Якщо вектор-функція $U = \mathrm{col}(U^1, \dots, U^n) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} U_k(t) e^{ikx}$, то

$$D_t U = i\widetilde{D}^l A(t, D) U, \qquad A(t, D) = A^0(D) + A^1(t, D), \tag{5}$$

де $A^0(D)$ і $A^1(t, D)$ — оператор-матриці порядку n з елементами $A^0_{ij}(D)$ та $A^1_{ij}(t, D)$, причому $A^1_{i,i+1}(t, 0) = A^0_{i,i+1}(k) = 1$ при $k \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $A^0_{nj}(k) = -i^{-j} A^0_j(k/\widetilde{k}^{\,l})$, $A^1_{nj}(t, k) = -(i\widetilde{k}^{\,l})^{-j} A^1_j(t, k)$, всі інші елементи $A^0_{ij}(k)$ та $A^1_{ij}(t, k)$ є нулями. Із заміни (4) випливає, що $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, якщо $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$.

Числа $\mu_j(k)$, $k \neq 0$, є простими коренями многочлена

$$L^0(\mu, k) = \mu^n + \sum_{j=1}^{n} A^0_{nj}(k) \mu^{n-j} = \prod_{j=1}^{n} \big(\mu - \mu_j(k)\big) \tag{6}$$

з обмеженими на $[0, T] \times \mathbb{Z}^p$ коефіцієнтами $A^0_{nj}(k)$, $j = 1, \dots, n$, тому вони також обмежені зверху:

$$\max_{j,k} |\mu_j(k)| \leq \widetilde{\mu}, \tag{7}$$

де $\widetilde{\mu}$ залежить тільки від $|a_{js}|$, $|s| = jl$, $j = 1, \dots, n$, а похідна $\dot{L}^0(\mu, k)$, $k \neq 0$, за змінною μ многочлена (6) на його коренях внаслідок гіперболічності обмежена знизу, тому

$$\max_{j,k} |\dot{L}^0(\mu_j(k), k)| = \max_{j,k} \prod_{j=1, j \neq \alpha}^{n} \big|\mu_j(k) - \mu_\alpha(k)\big| \geq d. \tag{8}$$

Виконаємо заміну

$$U_k(t) = R(k) G(t, k) Z_k(t), \tag{9}$$

де вектори $Z_k(t) = \mathrm{col}\big(Z^1_k(t), \dots, Z^n_k(t)\big)$ — невідомі, $R(0)$, $G(t, 0)$ — одиничні матриці, $R(k) = \big(\mu_j^{\alpha-1}(k)\big)^n_{\alpha,j=1}$, $G(t, k) = \mathrm{diag}\,\big(\exp(i\widetilde{k}^{\,l} \mu_j(k) t)\big)^n_{j=1}$ для ненульових векторів k. Тоді функція $Z = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} Z_k(t) e^{ikx}$, задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$D_t Z = i\widetilde{D}^l G^{-1}(t, D) R^{-1}(D) A^1(t, D) R(D) G(t, D) Z. \tag{10}$$

Елементи $i\widetilde{D}^l A^1_{ij}(t, D)$ матриці $i\widetilde{D}^l A^1(t, D)$ є обмеженими операторами, як і елементи матриць $R(D)$, $G(t, D)$, $R^{-1}(D)$ та $G^{-1}(t, D)$.

Теорема 1. *Якщо Z задовольняє систему рівнянь* (10), $Z \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, $q_1 \in \mathbb{R}$, *то* $U = R(D) G(t, D) Z \in \mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ *і задовольняє систему* (5).

Якщо фундаментальна матриця $\Phi_j(t,D)$ *системи* (10) *нормована рівністю* $\Phi_j(t_j,D)=G^{-1}(t_j,D)R^{-1}(D)$, $j=1,\dots,n$, *то*

$$U=R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p),\qquad U(t_j,\cdot)=C,\tag{11}$$

для довільної вектор-функції $C\in\mathbf{H}_{q_1}(\Omega^p_{2\pi})$.

Доведення. Оскільки $i\widetilde{D}^l A^0(D)R(D)G(t,D)=R(D)D_tG(t,D)$ і виконується рівність (10), то $D_tU=i\widetilde{D}^lA(t,D)U$. Внаслідок обмеженості операторів $R(D)$ та $G(t,D)$ із умови $Z\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$ випливає включення $U\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$.

Нехай $A^2(t,k)=i\widetilde{k}^{\,l}G^{-1}(t,k)R^{-1}(k)A^1(t,k)R(k)G(t,k)$, тоді загальний розв'язок рівняння $Z'_k=A^2(t,k)Z_k$ є таким: $Z_k=\Phi_j(t,k)C_k$, де $C_k\in\mathbb{C}^n$, тому $Z=\Phi_j(t,D)$, $U=R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C$ для $C=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}C_ke^{ikx}$, а також $U(t_j,\cdot)=R(D)G(t_j,D)\Phi_j(t_j,D)C=C$.

Оскільки $\Phi'_j(t,k)=A^2(t,k)\Phi_j(t,k)$, то з формул

$$\big(\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\big)'=\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\big(A^{2*}(t,k)+A^2(t,k)\big)\Phi_j(t,k)\big),$$

$$\beta_1\le\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\big(A^{2*}(t,k)+A^2(t,k)\big)\Phi_j(t,k)\big)/\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\le\beta_2,$$

де β_1 і β_1 — незалежні від t та k додатні сталі, отримуємо нерівності

$$\big(e^{-\beta_1t}\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\big)'\ge0,\qquad\big(e^{-\beta_2t}\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\big)'\le0.$$

Інтегруючи ці нерівності на відрізку $[t_j,t]$, отримуємо відповідно при $t<t_j$ та при $t\ge t_j$ оцінки

$$\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\le e^{\beta_1(t-t_j)}\operatorname{tr}\big(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\big),$$

$$\operatorname{tr}\big(\Phi^*_j(t,k)\Phi_j(t,k)\big)\le e^{\beta_2(t-t_j)}\operatorname{tr}\big(R^{*-1}(k)R^{-1}(k)\big).$$

Отже, оператори $\Phi_j(t,D)$ і $R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)$ є обмеженими. Звідси маємо, що $U\in\mathbf{H}_{q_1}(\mathcal{D}^p)$, якщо $C\in\mathbf{H}_{q_1}(\Omega^p_{2\pi})$. Теорему доведено.

Із врахуванням заміни (4), умови (2) перетворяться до вигляду

$$\sum_{\alpha=1}^{M}B_\alpha(D)U|_{t=t_\alpha}=\varphi,\tag{12}$$

де $B_\alpha(D)=\big(\widetilde{D}^{-nl}B_{n\alpha}(D),\widetilde{D}^{-(n-1)l}B_{n-1,\alpha}(D),\dots,\widetilde{D}^{-l}B_{1\alpha}(D)\big)$ є обмеженими операторами. Використовуючи тепер заміну (11), отримаємо систему рівнянь для визначення вектор-функції C:

$$\Delta_j(D)C=\varphi,\tag{13}$$

$$\Delta_j(D) = B_j(D) + \sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{M} B_\alpha(D)R(D)G(t,D)\Phi_j(t_\alpha,D), \;\; j=1,\ldots,n. \quad (14)$$

Теорема 2. *Якщо для деякого j, $1 \le j \le n$, існує $\Delta_j^{-1}(D)$, то задача (5), (12) має не більше одного розв'язку. При виконанні нерівностей*

$$\widehat{\varphi}_k^* \Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \le \beta_3 \widetilde{k}^{\,2r}, \qquad \beta_3 > 0, \quad r \in \mathbb{R}, \quad (15)$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, де $\widehat{\varphi}_k$ — коефіцієнти Фур'є вектор-функції φ, розв'язок U існує, належить до $\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, де $q < nl - r - p/2$, і має вигляд

$$U = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)\Delta_j^{-1}(D)\varphi. \quad (16)$$

При цьому існує єдиний розв'язок $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1 \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ задачі (1), (2).

Доведення. Якщо $\widetilde{U}$ та $\widetilde{\widetilde{U}}$ — різні розв'язки задачі (5), (12), то ненульовий розв'язок $U^0 = \widetilde{U} - \widetilde{\widetilde{U}}$ однорідної задачі (5), (12) має вигляд $U^0 = R(D)G(t,D)\Phi_j(t,D)C$, як у формулі (11), і $\Delta_j(D)C = 0$, де $C = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} C_k e^{ikx}$, $C \neq 0$. Тоді існує $\bar{k} \in \mathbb{Z}^p$ таке, що $C_{\bar{k}} \neq 0$. Оскільки $C_{\bar{k}}$ визначається із системи лінійних однорідних алгебричних рівнянь $\Delta_j(\bar{k})C_{\bar{k}} = 0$, то матриця $\Delta_j(\bar{k})$ є виродженою. Отже, матриця $\Delta_j^{-1}(\bar{k})$ не існує, як і оператор $\Delta_j^{-1}(D)$, що суперечить припущенню теореми. Єдиність розв'язку U доведено.

З теореми 1 випливає така нерівність:

$$\|U; \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_4 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{\,2(q-nl)} \widehat{\varphi}_k^* \Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k. \quad (17)$$

З умови (15) при $q < nl - r - p/2$ отримаємо включення $U \in \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)$, оскільки $\|U; \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_3\beta_4 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{\,2(q-nl+r)} < \infty$. На підставі формули (4) отримуємо рівності $u = \widetilde{D}^{-nl}U^1$ і $\|u; \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\| = \|U; \mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|$. Теорему доведено.

Нехай φ — довільна функція із $\mathbf{H}_{q_1}(\Omega^p_{2\pi})$, тоді з обмеженості елементів матриці $\Delta_j(D)$ випливає нерівність

$$\widehat{\varphi}_k^* \Delta_j^{-1*}(k)\Delta_j^{-1}(k)\widehat{\varphi}_k \le \beta_5 \widehat{\varphi}_k^* \widehat{\varphi}_k / |\det \Delta_j(k)|^2, \quad (18)$$

де стала β_5 не залежить від k та від φ.

Теорема 3. *Якщо φ належить до простору $\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega^p_{2\pi})$ і для деякої послідовності $\{j(k)\}$, де $1 \le j(k) \le n$, виконується умова*

$$|\det \Delta_{j(k)}(k)| \ge \beta_6 \widetilde{k}^{\,r}, \qquad \beta_6 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (19)$$

то задача (1), (2) *має єдиний розв'язок u із простору* $\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$.

Доведення. Оцінка $\|U;\mathbf{H}_{q-nl}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \beta_4\beta_5 \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \dfrac{\widetilde{k}^{\,2(q-nl)}\widehat{\varphi}_k^*\widehat{\varphi}_k}{|\det\Delta_{j(k)}(k)|^2}$ випливає з нерівностей (17), (18). Тоді з умови (19) і теореми 2 отримуємо, що $u \in \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, оскільки $\|u;\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\| \le \sqrt{\beta_4\beta_5}\beta_6^{-1}\|\varphi;\mathbf{H}_{q-nl-r}(\Omega^p_{2\pi})\|$. Теорему доведено.

3. Оцінки малих знаменників. Вирази $\Delta_j(k)$ є полілінійними функціями елементів матриць $B_1(k),\ldots,B_n(k)$ і нелінійно залежать від елементів матриці $A^0(k)$ та матриці $A^1(t,k)$. Вони, взагалі, є малими знаменниками задачі (1), (2), які можуть також обертатися в нуль для деяких значень її коефіцієнтів.

Будемо використовувати метричний підхід для отримання оцінок знизу знаменників $|\Delta_j(k)|$, вважаючи фіксованим рівняння (1). Елементи векторів $B_{j\alpha s}$ із умови (2) належать одиничному кругу $\mathcal{O}$ з центром у початку координат комплексної площини, тобто $B_{j\alpha s} \in \mathcal{O}^n$. Це не обмежує загальності і отримується нормуванням умови (2).

Позначимо через $\delta(k)$ матрицю $\Delta_{j(k)}(k)$. Послідовність $j(k)$ виберемо так: $j(k)=1$, якщо $|k_1| = \max\{|k_1|,\ldots,|k_p|\}$, інакше $j(k)=2$, якщо $|k_2| = \max\{|k_1|,\ldots,|k_p|\}$ тощо. Нехай $b^{(m-1)n+j} = B^{\zeta^{(m-1)n+j}}_{1\alpha_m s^{(m-1)n+j}}$, де $j=1,\ldots,n$, $m=1,\ldots,p$, $s^{(m-1)n+j} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1},\theta^{(m-1)n+j},\underbrace{0,\ldots,0}_{p-m})$, $0 \le \theta^{(m-1)n+j} \le jl$, причому $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_p\} \in \{1,\ldots,M\}^p$, $\{\zeta^{(m-1)n+1},\ldots,\zeta^{mn}\} = \{1,\ldots,n\}$. Визначимо число θ і вектор b формулами

$$\theta = \min_{j=1,\ldots,p}\sum_{\sigma=1}^{n}\theta^{(j-1)n+\sigma}, \qquad b = \mathrm{col}(b^1,\ldots,b^{pn}). \tag{20}$$

Вважаємо, що елементи матриці $\delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, залежать від компонент $b^1,\ldots,b^{pn}$ вектора $b\in\mathcal{O}^{pn}$; інші компоненти векторів $B_{j\alpha s}$ фіксуємо. При цьому матриця $\delta(0)=\Delta_1(0)$ не залежить від $b^1,\ldots,b^{pn}$, тому фіксовані коефіцієнти вибираємо так, щоб $\det\delta(0)\neq 0$.

Лема 1. *Для довільних чисел r та ε, де* $r < \theta - n(p+(n+1)l)/2$, $0<\varepsilon<1$, *та для всіх векторів* $b\in\mathcal{O}^{pn}\setminus B_\varepsilon$, $\operatorname{meas} B_\varepsilon \le \varepsilon$, *виконується нерівність* (19), *де*

$$\beta_6 = \varepsilon^{n/2}\min\left\{|\det\delta(0)|/\varepsilon^{n/2},\, n^{-n/2}\pi^{-n^2p/2}\Big(\sum_{k\neq 0}\widetilde{k}^{\,2(r-\theta)/n+(n+1)l}\Big)^{-n/2}\right\}.$$

Доведення проводиться так, як доведення леми 2 в роботі [6].

Із леми 1 і теореми 3 випливає основний результат роботи.

Теорема 4. *Якщо* $0 < \varepsilon < 1$, $r > n(p+(n+1)l)/2$, $\varphi \in \mathbf{H}_{q-nl-\theta+r}(\Omega_{2\pi}^p)$, *то для всіх векторів* $b \in \mathcal{O}^{pn} \setminus B_\varepsilon$, *де* $\operatorname{meas} B_\varepsilon \leq \varepsilon$, *існує єдиний розв'язок* $u \in \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)$ *задачі* (1), (2) *і виконується нерівність* $\varepsilon^n \|u; \mathbf{H}_{l,q}^n(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \beta_7 \|\varphi; \mathbf{H}_{q-nl-\theta+r}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2$, *де* β_7 *— додатна стала.*

4. Висновки. Отже, задача із загальними багатоточковими нелокальними умовами для строго гіперболічних рівнянь високого порядку з неперервними за t коефіцієнтами є розв'язною у шкалі просторів Соболєва періодичних за змінною x функцій, гладкість розв'язку залежить від коефіцієнтів крайових умов.

Отримані результати можна поширити на випадки змінних коефіцієнтів у головній частині рівняння та на гіперболічні системи.

[1] *Ільків В.С.* Багатоточкова нелокальна неоднорідна задача для систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за t коефіцієнтами // Мат. вісник НТШ. – 2004. – **1**. – С. 47–58.

[2] *Ільків В.С.* Нелокальна крайова задача для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 139–143.

[3] *Ільків В. С.* Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із частинними похідними// Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 4. – С. 87–94.

[4] *Ільків В.С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 84–95.

[5] *Ільків В.С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – № 11. – С. 57–64.

[6] *Ільків В.С., Магеровська Т.В.* Нелокальна двототочкова задача для строго гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку // Мат. вісник НТШ. – 2006. – **3**. – С. 69–83.

[7] *Ільків В.С.* Крайова задача з нелокальними двоточковими умовами для гіперболічного рівняння другого порядку // Вісник нац. ун-ту. „Львівська політехніка“. „Фіз.-мат. науки“. – 2006. – № 566. – С. 41–51.

[8] *Гой Т.П.* Нелокальна крайова задача для слабко нелінійного гіперболічного рівняння // VI-а Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука: Матеріали конф. (Київ, 15–17. 05. 1997). – К., 1997. – С. 108.

[9] *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К.: Ин-т мат. НАН Украины. – 1996. – С. 74–76.

[10] *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186–195.

[11] *Полищук В.Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. – К.: Наук. думка. – 1979. – С. 54–65.

[12] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук.думка, 1984. – 264 с.

[13] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

NONLOCAL MULTI-POINT PROBLEM FOR HIGH ORDER STRONG HYPERBOLIC EQUATION

Volodymyr IL'KIV [1], *Tetyana MAHEROVSKA* [2]

[1]Lviv Polytechnic National University,
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine
[2]Lviv State University of Internal Affairs
26 Horodots'ka Str., Lviv 79007, Ukraine

We consider the problem with nonlocal multi-point boundary conditions for high order in time strictly hyperbolic equation with variable coefficients in Cartesian product of the time interval and the spatial multidimensional torus. We establish the solvability of this problem in the Sobolev spaces scale for almost all (except for the set of a given small measure) vectors of coefficients in the nonlocal conditions. We prove the metric theorem of the lower estimation of small (nonlinear) denominators of the problem.