ПРО ЯДРО ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ ДВОТОЧКОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

©2007 р. Петро КАЛЕНЮК [1,2], Ігор КОГУТ [1], Зіновій НИТРЕБИЧ [1]

[1]Національний університет „Львівська політехніка“, вул. С. Бандери, 12, Львів 79013
[2]Інститут математики, Жешувський університет, вул. Рейтана, 16 А, Жешув 35-959

Редакція отримала статтю 5 вересня 2007 р.

Указано спосіб побудови нетривіальних квазіполіномних розв'язків однорідного рівняння із частинними похідними першого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними зі сталими комплексними коефіцієнтами, що задовольняють однорідну двоточкову нелокальну крайову умову. Для побудови розв'язків використано диференціально-символьний метод.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дана стаття присвячена побудові нетривіальних розв'язків квазіполіномного вигляду такої крайової задачі у шарі $\Pi_h = (0,h) \times \mathbb{R}^s$:

$$[\partial_t - a(\partial_x)]\, U(t,x) = 0, \quad t \in (0,h), \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{1}$$

$$p(\partial_x)\, U(0,x) + q(\partial_x)\, U(h,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^s, \tag{2}$$

де $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $a(\partial_x)$ — диференціальний вираз, загалом, нескінченного порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами та цілим аналітичним символом $a(\nu) \neq \mathrm{const}$, $\nu \in \mathbb{R}^s$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $s \in \mathbb{N}$, $p(\partial_x)$, $q(\partial_x)$ — диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами.

УДК 517.95, MSC 2000: 35G15, 35K05
Робота виконана при фінансовій підтримці ДФФД України (проект № 25.1/080, Договір № Ф 25/542–2007 від 03.09.2007 р.)

Задачам з нелокальними крайовими умовами в обмежених та необмежених областях для лінійних рівнянь із частинними похідними в останні роки присвячено чимало досліджень. Це пов'язано з неможливістю постановки коректної задачі з локальними крайовими умовами (див. [3]), а також із тим, що такі задачі є моделями багатьох реальних процесів (див., зокрема, [6, 7, 10]).

Задачі з умовами, що пов'язують сліди шуканого розв'язку та його похідних на частинах межі області, вивчалися у працях [1, 11]. Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними є некоректними крайовими задачами, причому як в обмежених, так і в необмежених областях. Встановленню класів існування і єдиності розв'язку таких задач в обмежених областях з використанням метричного підходу до оцінки знизу малих знаменників присвячені дослідження [8, 9]. У працях [2, 12, 13] одержано критерії коректності задач з нелокальними крайовими умовами у шарі Π_T для лінійного еволюційного рівняння із частинними похідними. Задача (1), (2) у шарі Π_h за допомогою диференціально-символьного методу [5] у випадку $p(\partial_x) \equiv 1$, $q(\partial_x) \equiv \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, вивчалася у праці [4].

Некоректність задач з нелокальними крайовими умовами для рівнянь із частинними похідними пов'язана у першу чергу з тим, що однорідна задача може мати нетривіальні розв'язки. Тому дослідження ядра задачі з нелокальною крайовою умовою є актуальною задачею і саме цьому присвячена дана стаття.

2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

2.1. Допоміжні позначення

Для $n, r \in \mathbb{Z}_+^s$, $x, \nu \in \mathbb{R}^s$ позначимо

$$r \leqslant n \Leftrightarrow r_i \leqslant n_i,\ i = \overline{1,s}; \quad x^r = \prod_{i=1}^{s} x_i^{r_i}; \quad \nu \cdot x = \sum_{i=1}^{s} \nu_i x_i; \quad r! = \prod_{i=1}^{s} r_i!;$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}; \quad |r| = \sum_{i=1}^{s} r_i; \quad (\partial_\nu)^r = \frac{\partial^{|r|}}{\partial \nu_1^{r_1} \partial \nu_2^{r_2} \ldots \partial \nu_s^{r_s}}.$$

Введемо такі класи квазіполіномів:
K_M — клас квазіполіномів вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x) \exp[\alpha_j \cdot x],$$

де $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $x \in \mathbb{R}^s$, $m \in \mathbb{N}$; $Q_j(x)$, $j = \overline{1,m}$, — поліноми з комплексними коефіцієнтами;
$K_{\mathbb{C},M}$ — клас квазіполіномів вигляду

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t,x) \exp[\beta_j t + \alpha_j \cdot x],$$

де $\beta_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}^s$, $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+s}$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ або $\beta_j \neq \beta_k$ для $j \neq k$; $Q_j(t,x)$, $j = \overline{1,m}$, — поліноми змінних t,x з комплексними коефіцієнтами.

Дію диференціального виразу нескінченного порядку $g(\partial_\nu)$ на вираз $\exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]$ з покладанням $\nu = 0$ для $g(x) \in K_{\mathbb{C}}$ будемо розуміти так: якщо

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x) \exp[\alpha_j \cdot x], \tag{3}$$

то

$$g(\partial_\nu)\{\exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]\}|_{\nu=0} \equiv \sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)\{\exp[a(\nu)t + \nu \cdot x]\}|_{\nu=\alpha_j}. \tag{4}$$

2.2. Випадок однієї просторової змінної

Нехай у задачі (1), (2) $s = 1$. Згідно з диференціально-символьним методом [5], диференціальному виразові $a(\partial_x)$ заміною ∂_x на параметр $\nu \in \mathbb{R}$ співставимо його символ — функцію $a(\nu)$.

Лема 1. *Якщо $U(t,x)$ — розв'язок рівняння* (1) *і $U(t,x) \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}}$, то цей розв'язок можна подати у вигляді*

$$U(t,x) = g(\partial_\nu)\{\exp[a(\nu)t + \nu x]\}|_{\nu=0}, \tag{5}$$

де $g(\partial_\nu)$ — диференціальний вираз, символом якого є функція $g(x) \in K_{\mathbb{C}}$.

Доведення. Нехай $U(t,x)$ — розв'язок рівняння (1) і $U(t,x) \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}}$. Позначимо

$$U(0,x) = \varphi(x), \tag{6}$$

тоді, очевидно, $\varphi(x) \in K_{\mathbb{C}}$. Побудуємо функцію

$$U_1(t,x) = \varphi(\partial_\nu)\{\exp[a(\nu)t + \nu x]\}|_{\nu=0} \tag{7}$$

і покажемо, що вона задовольняє рівняння (1). Справді,

$$[\partial_t - a(\partial_x)]\, U_1(t,x) = [\partial_t - a(\partial_x)]\, \varphi(\partial_\nu)\{\exp[a(\nu)t + \nu x]\}|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi\left(\partial_\nu\right)\left[\partial_t - a\left(\partial_x\right)\right]\left\{\exp\left[a(\nu)t + \nu x\right]\right\}\big|_{\nu=0} =$$
$$= \varphi\left(\partial_\nu\right)\left[a(\nu) - a(\nu)\right]\left\{\exp\left[a(\nu)t + \nu x\right]\right\}\big|_{\nu=0} = 0.$$

Крім того, очевидно, $U_1(0,x) = \varphi(x)$. Отже, $U(t,x)$ і $U_1(t,x)$ є квазіполіномними розв'язками задачі Коші (1), (6). Методом від супротивного неважко довести, що ці квазіполіномні розв'язки задачі Коші співпадають, тобто $U(t,x) = U_1(t,x)$. Лему доведено.

Підберемо функцію $g(x)$ — символ диференціального виразу $g\left(\partial_\nu\right)$ у формулі (5) — з класу $K_{\mathbb{C}}$ так, щоб виконувалась умова (2). Розглянемо функцію

$$\eta(\nu) = p(\nu) + q(\nu)\exp\left[a(\nu)h\right] \tag{8}$$

та множину її нулів $P = \{\nu \in \mathbb{C} : \ \eta(\nu) = 0\}$. Через p_α будемо позначати кратність нуля α функції (8).

Теорема 1. *Нехай функція $g(x)$ — квазіполіном з класу K_P вигляду*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x)\exp\left[\alpha_j x\right], \tag{9}$$

де $Q_j(x)$ — довільні поліноми з комплексними коефіцієнтами степенів $n_j \leqslant p_{\alpha_j} - 1$, $j = \overline{1,m}$. Тоді функція (5) *є розв'язком задачі* (1), (2).

Доведення. Нехай $g(x)$ — квазіполіном з $K_{\mathbb{C}}$ вигляду (9) і виконуються умови теореми. Тоді, як було зазначено вище, функція (5) є розв'язком рівняння (1). Покажемо виконання умови (2). Враховуючи рівність (4) для $s = 1$, маємо

$$p\left(\partial_x\right)U(0,x) + q\left(\partial_x\right)U(h,x) = p\left(\partial_x\right)\sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\partial_\nu\right)\left\{\exp\left[\nu x\right]\right\}\big|_{\nu=\alpha_j} + q\left(\partial_x\right)\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)\{\exp\left[a(\nu)h + \nu x\right]\}\big|_{\nu=\alpha_j} = \sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)p(\partial_x)\ \{\exp\left[\nu x\right]\}\big|_{\nu=\alpha_j} +$$
$$+\sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)q(\partial_x)\{\exp\left[a(\nu)h + \nu x\right]\}\big|_{\nu=\alpha_j} = \sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)\{p(\nu)\exp\left[\nu x\right]\}\big|_{\nu=\alpha_j} +$$
$$+\sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)\{q(\nu)\exp\left[a(\nu)h + \nu x\right]\}\big|_{\nu=\alpha_j} = \sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)\times$$
$$\times\{\exp\left[\nu x\right]\left(p(\nu) + q(\nu)\exp\left[a(\nu)h\right]\right)\}\big|_{\nu=\alpha_j} = \sum_{j=1}^{m} Q_j(\partial_\nu)\{\exp\left[\nu x\right]\eta(\nu)\}\big|_{\nu=\alpha_j}.$$

Оскільки точка $\nu = \alpha_j$ є нулем функції (8) кратності p_{α_j} і $n_j \leqslant p_{\alpha_j}-1$, де $j=\overline{1,m}$, то всі доданки в останній сумі дорівнюють нулеві, тобто

$$p\left(\partial_x\right) U(0,x) + q\left(\partial_x\right) U(h,x) = 0.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо функція $U(t,x)$ з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}}$ є розв'язком задачі* (1), (2), *то $U(t,x)$ має вигляд*

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(t,x) \exp[\beta_j t + \alpha_j x],$$

у якому $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in P$ і $Q_j(t,x)$ — деякі поліноми з комплексними коефіцієнтами, степені за x яких не перевищують $p_{\alpha_j}-1$.

Доведення. Нехай функція $U(t,x)$ з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}}$ є розв'язком задачі (1), (2). Тоді, згідно з лемою 1, її можна подати у вигляді (5), де

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \exp\left[\alpha_j x\right] Q_j(x), \quad m \in \mathbb{N},\ \alpha_j \in \mathbb{C},$$

$Q_j(x)$ — поліноми з комплексними коефіцієнтами степенів $n_j \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки функція $U(t,x)$ задовольняє умову (2), то

$$g\left(\partial_\nu\right) \left\{\exp\left[\nu x\right] \left(p(\nu) + q(\nu) \exp\left[a\left(\nu\right) h\right]\right)\right\}\big|_{\nu=0} \equiv 0.$$

Останню тотожність запишемо у вигляді

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\partial_\nu\right) \left\{\exp\left[\nu x\right] \eta(\nu)\right\}\big|_{\nu=\alpha_j} \equiv 0.$$

Оскільки $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, де $j,k=\overline{1,m}$, то

$$Q_j\left(\partial_\nu\right) \left\{\exp\left[\nu x\right] \eta(\nu)\right\}\big|_{\nu=\alpha_j} \equiv 0, \quad j=\overline{1,m}. \tag{10}$$

Тотожність (10) можлива лише тоді, коли α_j є нулем функції (8), тобто $\alpha_j \in P$, причому $n_j \leqslant p_{\alpha_j}-1$. Теорему доведено.

Приклад 1. Опишемо деякі розв'язки задачі з нелокальною крайовою умовою для рівняння теплопровідності

$$\begin{gathered}\left[\partial_t - \partial_x^2\right] U(t,x) = 0, \quad t \in (0,1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ e\,\partial_x^2 U(0,x) - \partial_x U(1,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.\end{gathered} \tag{11}$$

Для даної задачі маємо $h = 1$, $a(\nu) = \nu^2$, $p(\nu) = e\nu^2$, $q(\nu) = -\nu$, $\eta(\nu) = e\nu^2 - \nu\exp[\nu^2]$.

До множини P належать, зокрема, числа 0 та 1. Нулі $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_1 = 1$ є нулями кратності 1. Згідно з теоремою 1, щоб знайти квазіполіномні розв'язки задачі (11), що відповідають нулям $\alpha_1 = 0$ та $\alpha_1 = 1$, за функцію $g(x)$ можна взяти квазіполіноми вигляду $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = \exp[x]$ та їх лінійні комбінації.

Обчислимо значення функції $\exp[\nu^2 t + \nu x]$ точках $\nu = 0$ та $\nu = 1$:

$$\{\exp[\nu^2 t + \nu x]\}\big|_{\nu=0} = 1; \quad \{\exp[\nu^2 t + \nu x]\}\big|_{\nu=1} = \exp[t + x].$$

Отже, знайдені розв'язки задачі (11) мають вигляд:

$$U_1(t, x) = A, \quad U_2(t, x) = B\exp[t + x], \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Приклад 2. Знайдемо деякі нетривіальні розв'язки задачі

$$\begin{gathered} \left[\partial_t - \partial_x^2 + 2\partial_x - 1\right] U(t, x) = 0, \quad t \in (0, 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \left[\partial_x^2 - 2\partial_x + 2\right] U(0, x) - U(1, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{12}$$

Для даної задачі маємо $h = 1$, $a(\nu) = \nu^2 - 2\nu + 1 = (\nu - 1)^2$, $p(\nu) = \nu^2 - 2\nu + 2$, $q(\nu) = -1$, $\eta(\nu) = \nu^2 - 2\nu + 2 - \exp\left[(\nu - 1)^2\right]$,

Число $\alpha = 1$ є нулем функції $\eta(\nu)$ кратності 4. Згідно з теоремою 1, щоб знайти розв'язки задачі (12), що відповідають нулеві $\alpha = 1$, за функцію $g(x)$ можна взяти квазіполіном вигляду

$$g(x) = \exp[x](A + Bx + Cx^2 + Dx^3), \quad A, B, C, D \in \mathbb{C}.$$

Обчислимо значення функції $\exp[(\nu-1)^2 t + \nu x]$ та її похідних при $\nu = 1$:

$$\exp[(\nu - 1)^2 t + \nu x]\big|_{\nu=1} = \exp[x]; \ \ \partial_\nu\{\exp[(\nu - 1)^2 t + \nu x]\}\big|_{\nu=1} = x\exp[x];$$

$$\partial_\nu^2\{\exp[(\nu - 1)^2 t + \nu x]\}\big|_{\nu=1} = (2t + x^2)\exp[x];$$

$$\partial_\nu^3\{\exp[(\nu - 1)^2 t + \nu x]\}\big|_{\nu=1} = (6tx + x^3)\exp[x].$$

Отже, знайдені розв'язки задачі (12) мають вигляд:

$$U(t, x) = \exp[x](A + Bx + C(2t + x^2) + D(6tx + x^3)), \quad A, B, C, D \in \mathbb{C}.$$

Приклад 3. Знайдемо деякі нетривіальні розв'язки задачі

$$\begin{gathered} \left[\partial_t - i\,\partial_x^4\right] U(t, x) = 0, \quad t \in (0, 1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \left[i - \partial_x^4\right] U(0, x) - i\,U(1, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{13}$$

Для даної задачі маємо $h = 1$, $a(\nu) = i\nu^4$, $p(\nu) = i - \nu^4$, $q(\nu) = -i$, $\eta(\nu) = i - \nu^4 - i\exp\left[i\nu^4\right]$.

Число $\alpha = 0$ є нулем функції $\eta(\nu)$ кратності 8. Згідно з теоремою 1, щоб знайти розв'язки задачі (13), що відповідають нулеві $\alpha = 0$, за функцію $g(x)$ можна взяти поліном вигляду $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{7} C_k x^k$.

Обчислюючи значення функції $\exp[i\nu^4 t + \nu x]$ та її похідних до сьомого порядку включно у точці $\nu = 0$, знаходимо розв'язки задачі (13):

$$U(t,x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4(24\,i\;t + x^4) + C_5(120\,i\,t\,x + x^5) +$$

$$+ C_6(360\,i\,t\,x^2 + x^6) + C_7(840\,i\,t\,x^3 + x^7), \quad C_k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1,7}.$$

Приклад 4. Знайдемо деякі нетривіальні розв'язки задачі

$$\begin{gathered} \partial_t U(t,x) - e\,U(t,x+1) = 0, \quad t \in (0,1), \quad x \in \mathbb{R}, \\ e\,(\partial_x + 2)\,U(0,x) - U(1,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{14}$$

Запишемо рівняння у вигляді

$$[\partial_t - \exp\left[1 + \partial_x\right]]\,U(t,x) = 0.$$

Отже, $h = 1$, $a\,(\nu) = \exp[1+\nu]$, $p(\nu) = e[\nu+2]$, $q(\nu) = -1$, $\eta(\nu) = e(\nu+2) - \exp\left[\exp[1+\nu]\right]$. Число $\alpha = -1$ є нулем функції $\eta(\nu)$ кратності 2. Згідно з теоремою 1, щоб знайти розв'язки задачі (14), що відповідають нулеві $\alpha = -1$, за функцію $g(x)$ можна взяти квазіполіном вигляду

$$g(x) = \exp[-x](A + Bx), \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Обчислюючи значення функції $\exp[\exp[1+\nu]t + \nu x]$ та її похідної у точці $\nu = -1$, знаходимо розв'язки задачі (14):

$$U(t,x) = \exp[t - x]\,(A + B(t+x))\,, \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

2.3. Випадок багатьох просторових змінних

Дослідимо задачу (1), (2) для випадку $s > 1$. Як і в одновимірному випадку, аналогічно доводиться, що розв'язок $U(t,x)$ рівняння (1), який належить до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$, можна подати у вигляді

$$U(t,x) = g\left(\partial_\nu\right)\left\{\exp\left[a(\nu)t + \nu\cdot x\right]\right\}\big|_{\nu=0}\,, \tag{15}$$

де $g(\partial_\nu)$ — диференціальний вираз, символом якого є функція $g(x)$ з класу $K_{\mathbb{C}^s}$. Будемо знову підбирати функцію $g(x)$ з класу $K_{\mathbb{C}^s}$ так, щоб виконувалась умова (2). Розглянемо функцію (8), у якій, очевидно, тепер $\nu \in \mathbb{C}^s$. Нехай $P = \{\alpha \in \mathbb{C}^s : \eta(\alpha) = 0\}$. Для $\alpha \in P$ будемо розглядати множини:

$$\Omega_1(\alpha) = \left\{\omega \in \mathbb{Z}_+^s : (\partial_\nu)^\omega \eta(\nu)|_{\nu=\alpha} \neq 0\right\};$$

$$\Omega_2(\alpha) = \left\{\widetilde{\omega} \in \mathbb{Z}_+^s : \widetilde{\omega} = \omega + r,\ \omega \in \Omega_1(\alpha),\ r \in \mathbb{Z}_+^s,\ r \neq (0,0,\ldots,0)\right\};$$

$$\Omega(\alpha) = \Omega_1(\alpha) \cup \Omega_2(\alpha); \quad \overline{\Omega}(\alpha) = \mathbb{Z}_+^s \backslash \Omega(\alpha).$$

Теорема 3. *Нехай функція $g(x)$ — квазіполіном з класу K_P вигляду*

$$g(x) = Q(x) \exp[\alpha \cdot x], \tag{16}$$

де $Q(x)$ — довільний поліном від s змінних вигляду

$$Q(x) = \sum_{|r| \leqslant n} B_r x^r, \quad r \in \mathbb{Z}_+^s, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

коефіцієнти якого задовольняють систему алгебричних рівнянь:

$$\sum_{\substack{r \geqslant q, |r| \leqslant n, \\ r \in \Omega(\alpha), \\ r-q \in \Omega_1(\alpha)}} B_r C_r^q \left(\partial_\nu\right)^{r-q} \eta(\nu)\big|_{\nu=\alpha} = 0, \qquad q \in \mathbb{Z}_+^s,\ |q| \leqslant n-1. \tag{18}$$

Тоді функція (15) *є розв'язком задачі* (1), (2). *Навпаки, якщо функція з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ з $m = 1$ є розв'язком задачі* (1), (2), *то її можна зобразити у вигляді* (15), *де $g(x)$ має вигляд* (16), *$\alpha \in P$ і коефіцієнти B_r задовольняють систему* (18).

Доведення. Подібно, як і в одновимірному випадку, маємо:

$$p\left(\partial_x\right) U(0,x) + q\left(\partial_x\right) U(h,x) =$$

$$= Q(\partial_\nu) \left\{\exp[\nu \cdot x] \left(p(\nu) + q(\nu) \exp[a(\nu)h]\right)\right\}|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r| \leqslant n} B_r \left(\partial_\nu\right)^r \left\{\eta(\nu) \exp[\nu \cdot x]\right\}|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \sum_{|r| \leqslant n} B_r \sum_{q \leqslant r} C_r^q x^q \exp[\alpha \cdot x] \left(\partial_\nu\right)^{r-q} \eta(\nu)\big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \exp[\alpha \cdot x] \sum_{|r| \leqslant n} \sum_{q \leqslant r} B_r C_r^q x^q \left(\partial_\nu\right)^{r-q} \eta(\nu)\big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \exp\left[\alpha \cdot x\right] \sum_{|q|\leqslant n} \sum_{\substack{r\geqslant q,\\ |r|\leqslant n}} B_r C_r^q x^q \left(\partial_\nu\right)^{r-q} \eta(\nu)\big|_{\nu=\alpha} =$$

$$= \exp\left[\alpha \cdot x\right] \sum_{|q|\leqslant n} x^q \sum_{\substack{r\geqslant q,\\ |r|\leqslant n}} B_r C_r^q \left(\partial_\nu\right)^{r-q} \eta(\nu)\big|_{\nu=\alpha}.$$

Останній вираз дорівнюватиме нулю тоді та лише тоді, коли

$$\forall q \in \mathbb{Z}_+^s, \quad |q| \leqslant n: \quad \sum_{\substack{r\geqslant q,\\ |r|\leqslant n}} B_r C_r^q \left(\partial_\nu\right)^{r-q} \eta(\nu)\big|_{\nu=\alpha} = 0,$$

звідки одержуємо

$$\forall q \in \mathbb{Z}_+^s, \quad |q| \leqslant n: \quad \sum_{\substack{r\geqslant q, |r|\leqslant n,\\ r\in\Omega(\alpha),\\ r-q\in\Omega_1(\alpha)}} B_r C_r^q \left(\partial_\nu\right)^{r-q} \eta(\nu)\big|_{\nu=\alpha} = 0.$$

Неважко переконатися, що при $|q| = n$ усі рівняння будуть тотожностями $0 = 0$. Тому в останній системі рівнянь можна вважати, що $|q| \leqslant n - 1$. Теорему доведено.

Аналогічно можна довести теорему для випадку, коли $g(x)$ — довільний квазіполіном з класу $K_{\mathbb{C}^s}$, тобто для $m > 1$.

Зауваження 1. Якщо $\omega \in \overline{\Omega}(\alpha)$, то функція

$$U(t,x) = \left(\partial_\nu\right)^\omega \left\{ \exp[a(\nu)t + \nu \cdot x] \right\}\big|_{\nu=\alpha}$$

є розв'язком задачі (1), (2). Крім того, система рівнянь (18) охоплює множину квазіполіномів, що відповідають мультиіндексам $\omega \in \Omega(\alpha)$.

Зауваження 2. Якщо функція $U(t,x) \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$ і є розв'язком задачі (1), (2), то $U(t,x) \in K_{\mathbb{C},P}$.

Приклад 5. Розглянемо задачу

$$\left[\partial_t - \partial_x - \partial_y^2\right] U(t,x,y) = 0, \quad t \in (0,1), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\partial_x^3 U(0,x,y) - \partial_y^3 U(1,x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Маємо $a(\nu) = \nu_1 + \nu_2^2$, $h = 1$, $s = 2$, $p(\nu) = \nu_1^3$, $q(\nu) = -\nu_2^3$, $\eta(\nu) = \nu_1^3 - \nu_2^3 \exp\left[\nu_1 + \nu_2^2\right]$.

Зауважимо, що $\eta\left((0,0)\right) = 0$. Будемо шукати розв'язок задачі, що відповідає цьому нулеві, у випадку, коли $g(x,y)$ є, наприклад, поліномом 4-го степеня за сукупністю змінних:

$$\begin{gathered} g(x,y) = B_{(0,0)} + B_{(1,0)}x + B_{(0,1)}y + B_{(2,0)}x^2 + B_{(1,1)}xy + B_{(0,2)}y^2 + \\ + B_{(3,0)}x^3 + B_{(2,1)}x^2y + B_{(1,2)}xy^2 + B_{(0,3)}y^3 + \\ + B_{(4,0)}x^4 + B_{(3,1)}x^3y + B_{(2,2)}x^2y^2 + B_{(1,3)}xy^3 + B_{(0,4)}y^4. \end{gathered}$$

До множини $\Omega_1(\alpha)$ належать, зокрема, мультиіндекси $(3,0)$, $(0,3)$, $(1,3)$. Мультиіндекси $(4,0)$, $(3,1)$, $(1,3)$, $(0,4)$ належать до множини $\Omega_2(\alpha)$, а мультиіндекси $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(2,1)$, $(1,2)$ належать до множини $\overline{\Omega}(\alpha)$.

Запишемо для даного випадку систему (18):

$$\begin{cases} B_{(3,0)}C^{(0,0)}_{(3,0)} \left.\dfrac{\partial^3\eta(\nu)}{\partial\nu_1^3}\right|_{\nu=(0,0)} + B_{(0,3)}C^{(0,0)}_{(0,3)} \left.\dfrac{\partial^3\eta(\nu)}{\partial\nu_2^3}\right|_{\nu=(0,0)} + \\ \qquad + B_{(1,3)}C^{(0,0)}_{(1,3)} \left.\dfrac{\partial^4\eta(\nu)}{\partial\nu_1\partial\nu_2^3}\right|_{\nu=(0,0)} = 0, \\ B_{(4,0)}C^{(1,0)}_{(4,0)} \left.\dfrac{\partial^4\eta(\nu)}{\partial\nu_1^4}\right|_{\nu=(0,0)} + B_{(1,3)}C^{(1,0)}_{(1,3)} \left.\dfrac{\partial^4\eta(\nu)}{\partial\nu_1\partial\nu_2^3}\right|_{\nu=(0,0)} = 0, \\ B_{(3,1)}C^{(0,1)}_{(3,1)} \left.\dfrac{\partial^4\eta(\nu)}{\partial\nu_1^3\partial\nu_2}\right|_{\nu=(0,0)} + B_{(0,4)}C^{(0,1)}_{(0,4)} \left.\dfrac{\partial^4\eta(\nu)}{\partial\nu_2^4}\right|_{\nu=(0,0)} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{gathered} 6B_{(3,0)} - 6B_{(0,3)} - 6B_{(1,3)} = 0, \quad 24B_{(4,0)} - 6B_{(1,3)} = 0, \\ 6B_{(3,1)} - 24B_{(0,4)} = 0. \end{gathered}$$

Звідси отримаємо $B_{(3,1)} = 4B_{(0,4)}$, $B_{(1,3)} = 4B_{(4,0)}$, $B_{(3,0)} = B_{(0,3)} + 4B_{(4,0)}$; $B_{(0,0)}$, $B_{(1,0)}$, $B_{(0,1)}$, $B_{(2,0)}$, $B_{(1,1)}$, $B_{(0,2)}$, $B_{(2,1)}$, $B_{(1,2)}$, $B_{(0,3)}$, $B_{(4,0)}$, $B_{(2,2)}$, $B_{(0,4)}$ — довільні комплексні числа.

Обчислюючи значення функції $\exp[(\nu_1+\nu_2^2)t+\nu_1x+\nu_2y]$ та її частинних похідних до четвертого порядку включно у точці $(0,0)$, знаходимо розв'язок даної задачі:

$$\begin{gathered} U(t,x,y) = C_1 + C_2(t+x) + C_3y + C_4(t+x)^2 + C_5(t+x)y + \\ + C_6(2t+y^2) + (C_9 + 4C_{10})(t+x)^3 + C_7(t+x)^2y + C_8(t+x)(2t+y^2) + \\ + C_9(6ty+y^3) + C_{10}(t+x)^4 + 4C_{12}(t+x)^3y + C_{11}(t+x)^2(2t+y^2) + \end{gathered}$$

$$+4C_{10}(t+x)(6t+y^3)+C_{12}(12t^2+12ty^2+y^4); \quad C_i\in\mathbb{R},\ \ i=\overline{1,12}.$$

Приклад 6. Розглянемо задачу

$$\left[\partial_t+\partial_x^2+2\partial_x\partial_y+\partial_y^2\right]U(t,x,y)=0, \quad t\in(0,1), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

$$\left[1-\partial_x^2-2\partial_x\partial_y-\partial_y^2\right]U(0,x,y)-U(1,x,y)=0, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Маємо $a(\nu)=-(\nu_1+\nu_2)^2$, $h=1$, $s=2$, $p(\nu)=1-(\nu_1+\nu_2)^2$, $q(\nu)=-1$, $\eta(\nu)=1-(\nu_1+\nu_2)^2-\exp\left[-(\nu_1+\nu_2)^2\right]$. Зауважимо, що $\eta\left((0,0)\right)=0$.

Будемо шукати розв'язок даної задачі, що відповідає цьому нулеві, у випадку, коли $g(x,y)$ є поліномом третього степеня:

$$g(x,y)=B_{(0,0)}+B_{(1,0)}x+B_{(0,1)}y+B_{(2,0)}x^2+B_{(1,1)}xy+B_{(0,2)}y^2+$$
$$+B_{(3,0)}x^3+B_{(2,1)}x^2y+B_{(1,2)}xy^2+B_{(0,3)}y^3.$$

До множини $\Omega_1(\alpha)$ належать, зокрема, мультиіндекси $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. Мультиіндекси $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$ належать до $\Omega_2(\alpha)$, а до множини $\overline{\Omega}(\alpha)$ належать, зокрема, мультиіндекси $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Запишемо для даного випадку систему (18):

$$\begin{cases}
B_{(2,0)}C_{(2,0)}^{(0,0)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_1^2}\right|_{\nu=(0,0)}+B_{(1,1)}C_{(1,1)}^{(0,0)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\right|_{\nu=(0,0)}+\\
\qquad +B_{(0,2)}C_{(0,2)}^{(0,0)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_2^2}\right|_{\nu=(0,0)}=0,\\
B_{(3,0)}C_{(3,0)}^{(1,0)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_1^2}\right|_{\nu=(0,0)}+B_{(2,1)}C_{(2,1)}^{(1,0)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\right|_{\nu=(0,0)}+\\
\qquad +B_{(1,2)}C_{(1,2)}^{(1,0)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_2^2}\right|_{\nu=(0,0)}=0,\\
B_{(2,1)}C_{(2,1)}^{(0,1)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_1^2}\right|_{\nu=(0,0)}+B_{(1,2)}C_{(1,2)}^{(0,1)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_1\partial\nu_2}\right|_{\nu=(0,0)}+\\
\qquad +B_{(0,3)}C_{(0,3)}^{(0,1)}\left.\dfrac{\partial^2\eta(\nu)}{\partial\nu_2^2}\right|_{\nu=(0,0)}=0,
\end{cases}$$

тобто

$$-4B_{(2,0)}-4B_{(1,1)}-4B_{(0,2)}=0, \quad -12B_{(3,0)}-8B_{(2,1)}-4B_{(1,2)}=0,$$
$$-4B_{(2,1)}-8B_{(1,2)}-12B_{(0,3)}=0.$$

Звідси отримаємо $B_{(1,1)} = -(B_{(2,0)} + B_{(0,2)})$, $B_{(3,0)} = -(2B_{(2,1)} + B_{(1,2)})/3$, $B_{(0,3)} = -(2B_{(1,2)} + B_{(2,1)})/3$; $B_{(0,0)}$, $B_{(1,0)}$, $B_{(0,1)}$, $B_{(2,0)}$, $B_{(0,2)}$, $B_{(2,1)}$, $B_{(1,2)}$ — довільні комплексні числа.

Обчислюючи значення функції $\exp[-(\nu_1 + \nu_2)^2 t + \nu_1 x + \nu_2 y]$ та її частинних похідних до третього порядку включно у точці $(0,0)$, знаходимо розв'язок даної задачі у вигляді:

$$U(t,x,y) = C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3(-2t + x^2) - (C_3 + C_4)(-2t + xy) +$$
$$C_4(-2t + y^2) - (2C_5 + C_6)(-6tx + x^3)/3 + C_5(-4tx - 2ty + x^2 y) +$$
$$+ C_6(-2tx - 4ty + x^2 y) - (C_5 + 2C_6)(-6ty + y^3)/3,$$

де C_i, $i = \overline{0,6}$, — довільні комплексні числа.

3. ВИСНОВКИ

Досліджено питання знаходження у класі квазіполіномів нетривіальних розв'язків однорідного рівняння із частинними похідними першого порядку за часом і загалом нескінченного порядку за просторовими змінними, що задовольняють однорідну нелокальну двоточкову крайову умову з диференціальними поліномами у ній. За допомогою диференціально-символьного методу вказано алгоритм побудови розв'язків такої задачі, які зображаються як результат дії диференціального квазіполінома певного вигляду на розв'язок рівняння класично відокремленого вигляду за параметрами відокремлення.

[1] *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739–740.

[2] *Борок В.М.* Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 1. – С. 185–201.

[3] *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.

[4] *Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М.* Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 2. – С. 7–15.

[5] *Каленюк П.І., Нитребич З.М.* Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ „Львівська політехніка“, 2002. – 292 с.

[6] *Мамян А.Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. – С. 292-296.

[7] *Нахушев А.М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1995. – **21**, № 1. – С. 95–101.

[8] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[9] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[10] *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.

[11] *Скубачевский А.Л.* Нелокальные краевые задачи со сдвигом // Мат. заметки. – 1985. – **38**, № 4. – С. 587–598.

[12] *Фардигола Л.В.* Корректные задачи в слое с дифференциальным оператором в краевом условии // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1083–1090.

[13] *Фардигола Л.В.* Нелокальные двухточечные краевые задачи в слое с дифференциальным оператором в краевом условии // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1122–1128.

ON A NULL SPACE OF THE PROBLEM WITH NONLOCAL TWO-POINT CONDITION FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Petro KALENYUK [1,2], *Ihor KOHUT* [1], *Zinoviy NYTREBYCH* [1]

[1]Lviv Polytechnic National University,
12 S.Bandera Str., Lviv 79013, Ukraine
[2]Institute of Mathematics, University of Rzeszów,
Rejtana av. 16A, Rzeszów, Poland

We propose a method for constructing solutions of the homogeneous equation of first order in time and generally infinite order in spatial variables with constant complex coefficients, which satisfy a homogeneous nonlocal condition. This condition is a two-point one and contains differential polynomials with constant coefficients. To construct the solutions, we use the differential-symbol method.