Математичний Вісник
Наукового товариства
імені Шевченка
2013. — Т.10

Mathematical Bulletin
of the Shevchenko
Scientific Society
2013. — V.10

УЗАГАЛЬНЕННЯ СТАЛОЇ ЕЙЛЕРА

Руслан Скуратовський

Національний Технічний Університет України, м. Києва, проспект Перемоги 37

Р. Скуратовський. *Узагальнення сталої Ейлера* // Мат. вісник НТШ. — 2013. — Т.10. — С. 163–168.

Розглядається поняття узагальненої сталої Ейлера для рядів з загальним членом, який задається певною функцією. Досліджено умови існування цієї сталої. Знайдено два критерії існування цієї сталої. Показано, що узагальнена стала Ейлера існує для розбіжних рядів з обмеженим зростанням членів ряду. Запропоновано метод використання відповідної сталої для чисельного знаходження частинних сум.

R. Skuratowskiy, *A generalization of the Euler constant*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **10** (2013), 163–168.

A notion of generalized Euler's constant is introduced for series with terms, generated by a certain function. Conditions for existence of this constant are investigated. Two criteria of the existence of generalized Euler constant are founded. It is proved that for a divergent series with bounded growth of general term the generalized Euler's constant exists. A method for calculation of partial sums of series with the help of this constant is proposed.

Вступ

Інтегральна ознака Коші дає можливість встановити зв'язок між збіжністю довільного ряду з невід'ємними членами виду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ ($f(x)$ — функція, визначена при $x \geq 1$), та збіжністю невласного інтегралу від функції f на $[1, \infty)$. Тобто, якщо функція $f(x)$ монотонно незростає при $x \geq 1$, то зі збіжності або розбіжності інтеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ можна встановити збіжність або розбіжність відповідного ряду. Але, границя від виразу

$$C_n(f) = S_n - I_n, \tag{1}$$

де $S_n = S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(n)$, $I_n = I_n(f) = \int_1^n f(x)dx$ може існувати навіть у випадку, коли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ розбігається. Зокрема, добре відомо про сталу Ейлера, введену

2010 *Mathematics Subject Classification:* 40A05+40A10 *УДК:* 517.5, 517.3
Ключові слова і фрази: ряд, інтеграл, наближення
E-mail: rqout@ukr.net

для розбіжного гармонічного ряду, породженого функцією $f_1(x) = \frac{1}{x}$. Тому природнім чином виникає питання для якого класу функцій f існує стала C_f виду:

$$C_f := \lim_{n\to\infty} (S_n - I_n)\,. \tag{2}$$

Метою роботи є відповісти на питання, про умови існування "узагальненої сталої Ейлера", тобто границі (2). Зауважимо, що у випадку монотонно спадної і збіжної до нуля функції f проблема існування і обчислення границі (2) досліджувалась в роботі [2]. Для дзета-функції Рімана існування границі (2) досліджувалось в роботі [5]. Узагальнену сталу Ейлера (2) зручно використати для наближеного обчислення часткових сум рядів [3, 2, 4] і інтегралів від деяких не елементарних функцій.

1. Основні результати

Класичний приклад існування границі (2) дає розбіжний гармонічний ряд з частинною сумою $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ й інтегралом $I_n = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n)$ $(n \in N)$.

Доведемо, що границя (2), тобто узагальнена стала Ейлера, може існувати для досить широкого класу функцій f, відмінних від функції $f_1(x) = 1/x$.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x)$ визначена на півосі $[1; +\infty)$ монотонна і обмежена, то узагальнена стала Ейлера (2) існує.*

Доведення. Зауважимо, що з монотонності і обмеженості випливає інтегровність за Ріманом [1, 4]. Нехай $f(x)$ неспадна, тоді

$$f(k-1) \le \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le f(k) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Послідовність $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ (1) є монотонно неспадною, оскільки, згідно (3),

$$C_n - C_{n-1} = S_n - S_{n-1} - (I_n - I_{n-1}) = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(x)dx \ge f(n) - f(n) = 0,$$

і обмеженою зверху, оскільки при $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$:

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=2}^{n} f(k-1) = f(n) \le M_f,$$

де $M_f = \sup_{x\in[1,\infty)} |f(x)|$ (оскільки функція $f(x)$ обмежена, то $M_f < \infty$). Таким чином послідовність $\{C_n\}$ неспадна і обмежена зверху, а отже, за теоремою Вейєрштрасса, має границю. Доведення для *незростаючої* обмеженої функції аналогічне. $\square$

Прикладами рядів, що задовольняють умову теореми 1, є: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{th}(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \ge 0)$. Ряди з членами $\mathrm{arctg}(n)$ і $\mathrm{th}(n)$ розбіжні, бо їх члени не прямують до нуля при $n \to \infty$, але відповідні сталі для них існують.

Нехай $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ — будь-яка сумовна за Лебегом на довільному скінченному відрізку $[1, A]$, де $(1 < A < \infty)$ функція. Позначимо

$$c_n := f(n) - \int_{n-1}^{n} f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N},\ n \ge 2). \tag{4}$$

Тоді послідовність $\{C_n\}$ (1) можна подати у вигляді: $C_n = f(1) + \sum_{k=2}^{n} c_k$, де $n \geq 2$. Отже, границя (2) існує тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k. \tag{5}$$

Теорема 2. *Припустимо, що функція $f(x) \in C^{\infty}(0, \infty)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ розкладна в степеневий ряд на інтервалі $(n-1-\varepsilon_n, n+1+\varepsilon_n)$ для деякого $\varepsilon_n > 0$. Узагальнена стала Ейлера (2) існує тоді, і тільки тоді, коли ряд з загальним членом*

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{f^{(k)}(n)}{(k+1)!} \tag{6}$$

збіжний.

Доведення. Як було показано вище, узагальнена стала Ейлера існує тоді а тільки тоді, коли збігається ряд (5).

За умовою, функція $f(x)$ розкладна в ряд Тейлора на довільному інтервалі $(n-1-\varepsilon_n, n+1+\varepsilon_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, загальний член ряду (5) можна подати у вигляді:

$$c_n = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(x)dx = f(n) - \int_{n-1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(n)}{k!} (x-n)^k \right) dx =$$
$$= f(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(n)}{k!} \int_{n-1}^{n} (x-n)^k dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{f^{(k)}(n)}{(k+1)!} = b_n.$$

Підкреслимо, що почленне інтегрування ряду було коректне за теоремою про почленне інтегрування степеневих рядів. Отже, збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ рівносильна збіжності ряду $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ з загальним членом (6). □

Умови теореми 2 можна дещо ослабити:

Твердження 3. *Припустимо, що функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[0, n_0]$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) і для кожного натурального $n > n_0$ розкладна в степеневий ряд на інтервалі $(n-1-\varepsilon_n, n+1+\varepsilon_n)$ для деякого додатного ε_n. Стала Ейлера C_f існує тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$, загальний член якого задається формулою (6).*

Доведення. Аналогічне до доведення теореми 2. □

Продемонструвати дію теореми 2 можна дослідивши подвійний ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{f^{(k)}(n)}{(k+1)!}$ з похідних для відомої функції $f(x) = 1/x$:

$$f'(x) = -1/x^2, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^n n!/x^{n+1}.$$

Ряд з загальним членом:

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} f^{(k)}(n)/(k+1)! = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^{(k)} k!}{n^{k+1}(k+1)!} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}$$

очевидно є збіжним за ознакою відносного порівняння з членом збіжного ряду $\frac{1}{n^2}$. З іншого боку відомо, що стала Ейлера для цього ряду існує [5].

Наслідок 4. *Нехай функція f інтегровна на $[0, n_0]$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) і розкладна в степеневий ряд на $(n-1-\varepsilon(n), n+1+\varepsilon(n))$, при всіх $n > n_0$, для деякої послідовності додатних чисел $\{\varepsilon(n)\}$. Тоді якщо ряд $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n$ збіжний, де $f_n = \sup_{k\geq 1} \left|f^{(k)}(n)\right|$, то C_f існує.*

Доведення. Скористаємось твердженням 3. Оцінимо абсолютну величину чисел b_n, введених в (6): $|b_n| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|f^{(k)}(n)\right|}{(k+1)!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_n}{(k+1)!} = (e-2) f_n$.

Тому, $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |b_n| \leq (e-2) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n < \infty$. □

Теорема 5. *Нехай функція $f : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ задовольняє наступні умови:*

1) $f \in \mathrm{C}^1(n, n+1)$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

2) В довільній точці $x = n$, де $n \in \mathbb{N}$, функція f неперервна зліва і має границю справа. Узагальнена стала Ейлера C_f існує тоді і тільки тоді, коли існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f'(x)\{x\} dx \tag{7}$$

Зазначимо, що в теоремі 5 символ $\{x\}$ означає дробову частину числа $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай $\{c_n\}_{n=2}^{\infty}$ — послідовність, що задається формулою (4). Тоді, як було обґрунтовано на сторінці 165 (перед теоремою 2), стала Ейлера C_f існує тоді і тільки тоді, коли ряд (5) збігається. Перетворимо загальний член ряду $\sum_{n=2}^{\infty} c_n$ (5), згідно з формулою (4), використовуючи формулу інтегрування частинами, наступним чином:

$$\begin{aligned} c_n = \int_{n-1}^{n} (f(n) - f(x))\, dx = \int_{n-1}^{n} (f(n) - f(x))\, d(x-n+1) = \\ = \lim_{x\to n-} (f(n) - f(x))\,(x-n+1) - \lim_{x\to n-1+} (f(n) - f(x))\,(x-n+1) + \\ + \int_{n-1}^{n} f'(x)\,(x-n+1)\, dx = \int_{n-1}^{n} f'(x)\{x\} dx. \end{aligned}$$

Зауважимо, що оскільки, за умовою теореми, функція f неперервна зліва і має границю справа в натуральних точках, то

$$\lim_{x\to n-} (f(n) - f(x))\,(x-n+1) = \lim_{x\to n-1+} (f(n) - f(x))\,(x-n+1) = 0.$$

Оскільки інтеграл $\int_{n-1}^{n} (f(n) - f(x))\, dx$ існує в сенсі Рімана, то інтеграл $\int_{n-1}^{n} f'(x)\{x\} dx$ збігається.

Отже, частинні суми ряду (5) можна подати у вигляді $\sum_{k=2}^{n} c_k = \int_1^n f'(x)\,\{x\}\, dx$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$). Тому ряд (5) збіжний тоді і тільки тоді, коли існує границя (7). □

Наслідок 6. *Якщо функція $f : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ задовольняє умови 1,2 тереми 5 і при цьому невласний інтеграл*

$$\int_1^{\infty} f'(x)\{x\} dx \tag{8}$$

збіжний, то узагальнена стала Ейлера C_f існує.

Доведення. Наслідок випливає з теореми 5, оскільки зі збіжності невласного інтегралу (8) випливає існування границі (7). □

Зазначимо, що з існування границі (7) ще не випливає збіжність невласного інтегралу (8). Наприклад, для функції $f(x) = \int_1^x \frac{\sin(2\pi\xi)}{\{\xi\}} d\xi$ ($x \in [1, \infty)$) послідовність $J_n = \int_1^n f'(x)\{x\}dx = \int_1^n \sin(2\pi x)dx = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) збігається до нуля, тоді, як невласний інтеграл $\int_1^\infty f'(x)\{x\}dx = \int_1^\infty \sin(2\pi x)dx$ розбігається.

Приклад 7. Розглянемо функцію: $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in [1, \infty)$. Функція f є неперервно-диференційованою на $[1, \infty)$, отже для функції f умови 1, 2 теореми 5 виконуються. Звернемо увагу, що відповідний інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ є розбіжним, ряд $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ теж є розбіжним. Дослідимо існування границі по n від виразу $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(n) - \int_1^n f(x)dx\right)$ за допомогою наслідку 6. Інтеграл $\int_1^\infty f'(x)\{x\}dx$ збігається абсолютно, оскільки: $\int_1^\infty \left|f'(x)\{x\}\right|dx = \int_1^\infty \left|\left(\frac{-1}{x^2}\cos x\right)\{x\}\right|dx \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$. Отже, узагальнена стала Ейлера для такої функції f існує.

Приклад 8. Нескладно перевірити, що для функції

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (2^{2n}, 2^{2n+1}] \\ -\frac{1}{x}, & x \in (2^{2n-1}, 2^{2n}] \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

визначеної на $(2^{-1}, \infty) \supseteq [1, \infty)$, умови 1,2 теореми 5 виконуються.

Знайдемо похідну $f'(x)$ при $x \in \left(2^k, 2^{k+1}\right)$, де $k \in \{-1, 0\} \cup \mathbb{N}$:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x \in (2^{2n}, 2^{2n+1}) \\ \frac{1}{x^2}, & x \in (2^{2n-1}, 2^{2n}) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Отже $|f'(x)\,\{x\}| \le \frac{1}{x^2}$ ($x \in (1, \infty) \setminus \left\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$). Тому, інтеграл $\int_1^\infty f'(x)\{x\}dx$ є абсолютно збіжним. Отже, узагальнена стала Ейлера C_f існує, в той час, як ряд $\sum_{k=1}^\infty f(n)$ та інтеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ — розбіжні.

Твердження 9. *Нехай, для функції $f : [1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ існують числа $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ та послідовність додатних чисел $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ такі, що:*

1) $f \in C^{(k)}((1-\varepsilon, \infty))$ і для кожного $j \in \{1, ..., k-1\}$ ряд $\sum_{n=1}^\infty f^{(j)}(n)$ збігається;

2) $|f^{(k)}(x)| \le \gamma_n$ для кожного $x \in [n-1, n]$;

3) $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n < +\infty$.

Тоді відповідна стала Ейлера C_f для $f(x)$ існує.

Доведення. Розкладемо величину $f(x) - f(n)$ ($1 \le n-1 \le x \le n$) за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа в околі точки n,

$$f(x) - f(n) = \left(\sum_{j=1}^{k-1} f^{(j)}(n)\frac{(x-n)^j}{j!}\right) + \frac{f^{(k)}(\xi(x))(x-n)^k}{k!}$$

де $n - 1 \le \xi(x) \le n$. Тому для даної функції f члени послідовності (4) можна подати у вигляді:

$$c_n = \int_{n-1}^{n} (f(n)-f(x))\,dx = -\int_{n-1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{k-1} f^{(j)}(n)\frac{(x-n)^j}{j!} + \frac{f^{(k)}(\xi(x))(x-n)^k}{k!}\Big)dx =$$
$$= -\Big(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{f^{(j)}(n)}{j!}\int_{n-1}^{n}(x-n)^j dx + \frac{1}{k!}\int_{n-1}^{n} f^{(k)}(\xi(x))(x-n)^k dx\Big) = \tag{9}$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\frac{f^{(j)}(n)}{(j+1)!} - \frac{1}{k!}\int_{n-1}^{n} f^{(k)}(\xi(x))(x-n)^k dx = \alpha_n + \beta_n,$$

де $\alpha_n = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\frac{f^{(j)}(n)}{(j+1)!}$ і $\beta_n = -\frac{1}{k!}\int_{n-1}^{n} f^{(k)}(\xi(x))(x-n)^k dx$.

Оскільки $f \in C^{(k)}((1-\varepsilon,\infty))$, то інтеграл $\int_{n-1}^{n}(f(n)-f(x))\,dx$ в лівій частині рівності (9) існує в сенсі Рімана. Отже, в силу лінійності оператора інтегрування, інтеграл $\int_{n-1}^{n} f^{(k)}(\xi(x))(x-n)^k dx$ в правій частині рівності (9) також існує в сенсі Рімана.

Згідно з другою умовою даного твердження члени послідовності $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ допускають оцінку:

$$|\beta_n| \le \frac{1}{k!}\int_{n-1}^{n}\left|f^{(k)}(\xi(x))\right| |x-n|^k\,dx \le \frac{1}{k!}\int_{n-1}^{n}\gamma_n dx = \frac{\gamma_n}{k!}.$$

Отже, в силу третьої умови даного твердження, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n$ — збіжний. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n$ також збіжний, за першою умовою даного твердження. Тому, в силу рівності (9), ряд (5) збіжний. Отже стала C_f існує. □

2. Висновки

Незалежно від збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ та інтегралу $\int_1^{\infty} f(x)dx$, послідовність $C_n = C_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, визначена в (1) може бути збіжною. Стала $C_f = \lim_{n\to\infty} C_n$ буде різною для різних функцій $f(x)$. Встановлено, що узагальнена стала Ейлера C_f існує для рядів $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ з обмеженими членами, навіть для тих, для яких не виконується необхідна умова збіжності.

ЛІТЕРАТУРА

1. А.Я. Дороговцев, *Ряды*, К: Вища школа (1978), 112 с.
2. О.О. Курченко, *Аналог сталої Ейлера для монотонної, збіжної до нуля функції*, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2011), №4, 26–29.
3. И.М. Рыжик, И.С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.-Л: ГИТ-ТЛ (1951), 464 с.
4. В.А. Ильин, *Математический анализ. Продолжение курса*, М: МГУ, (1987), 358 с.
5. J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*, P: Princeton University Press, (2003), 266 p.

Надійшло 30.07.2012

Після переробки 30.10.2013