Математичний Вісник
Наукового товариства
імені Шевченка
2013. — Т.10

Mathematical Bulletin
of the Shevchenko
Scientific Society
2013. — V.10

ПРО ПОШАРОВО РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Галина Волошин[1,2], Володимир Маслюченко[2], Олександр Маслюченко[1,2]

[1]*Економіко-правничий факульнет, Буковинський державний фінансово-економічний університет, Штерна, 1, Чернівці, 58000, Україна*

[2]*Факультет математики та інформатики, Чернівецький національний університет, Університетська 28, Чернівці, 58000, Україна*

Волошин Г., Маслюченко В., Маслюченко О. *Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами* // Мат. вісник НТШ. — 2013. — Т.10. — С. 135–158.

У просторі $S = CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, наділеному локально опуклою топологією пошарової рівномірної збіжності, вивчається секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ простору P всіх поліномів від двох змінних. Зокрема, з'ясовується, що нарізно неперервні функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, у яких проекція E точок розриву на вісь абсцис не більш, ніж зліченна, або така, що звуження $f|_{E\times[0,1]}$ неперервне, належать до $\overline{P}^s$.

V. Maslyuchenko, O. Maslyuchenko, H. Voloshyn, *On layer-wise uniform approximation of separately continuous functioins by polynomials*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **10** (2013), 135–158.

We study the sequential closure $\overline{P}^s$ of the space P of all polynomials of two variables in the space $S = CC[0,1]^2$ of all separately continuous functions $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, endowed with a locally convex topology of layer-wise uniform convergence. In particular, we prove that separately continuous functions $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ belong to $\overline{P}^s$ if where the projection E of discontinuity points on the x-axis is at most countable or the restriction $f|_{E\times[0,1]}$ is continuous.

1. Вступ.

У цій праці ми підсумовуємо результати досліджень задачі про секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ простору P всіх многочленів від двох змінних у просторі $S = CC[0,1]^2$ всіх

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 41A10 *УДК:* 517.51

Ключові слова і фрази: нарізно неперервна функція, сукупно неперервна функція, топологія пошарово рівномірної збіжності, секвенціальне замикання простору поліномів від двох змінних і простору сукупно неперервних функцій.

E-mail: vmaslyuchenko@gmail.com, ovmasl@gmail.com, galja.vlshin@gmail.com

Автори висловлюють вдячність В.Михайлюку за корисні зауваження, що дозволили покращити первісний варіант статті.

нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, наділеному топологією $\mathcal{T}$ пошарової рівномірної збіжності, які були отримані за останній період з літа 2012 року до літа 2013 року і доповідалися на багатьох конференціях [1]–[4]. Основне питання формулюється так: для яких нарізно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ існує така послідовність многочленів $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $f_n(x,y)$ рівномірно прямує до $f(x,y)$ відносно x на $[0,1]$ для кожного $y \in [0,1]$ і відносно y на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$? Тобто йдеться про опис елементів з $\overline{P}^s$.

Зауважимо, що в [1, 5] було з'ясовано, що для звичайного замикання справджується рівність $\overline{P} = \overline{C} = S$, де $C = C[0,1]^2$ – простір усіх сукупно неперервних функцій $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Для секвенціального замикання, як і для звичайного, теж $\overline{P}^s = \overline{C}^s$, але питання про те, чи має місце рівність $\overline{C}^s = S$, залишається поки що відкритим. Локально опуклий простір $(S,\mathcal{T})$ не задовольняє першу аксіому зліченності, тому в ньому секвенціальне замикання може не збігатися зі звичайним. Не знаючи чи $\overline{C}^s = S$, природно поставити задачу про відшукання такої підмножини L в S, що $\overline{L}^s \neq \overline{L}$. Вона теж ще не розв'язана.

Тут ми досліджуємо властивості простору $\overline{P}^s = \overline{C}^s$, зокрема, з'ясовуємо, що він інваріантний відносно переходу до рівномірної границі послідовностей. Ми доводимо, що функція Шварца $sp(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $sp(0,0) = 0$, належить до $\overline{C}^s$, як і довільна функція $f \in S$ зі скінченною множиною точок розриву $D(f)$. Тому і функція Бера

$$f_0(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} sp(x - x_k, y - y_k)$$

для довільної послідовності точок $p_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ теж входить у $\overline{C}^s$.

Ще Р.Бер у своїй дисертації [6] встановив, що для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ проекції $pr_X(D(f))$ і $pr_Y(D(f))$ множини $D(f)$ її точок розриву на осі абсцис і ординат відповідно є множинами першої категорії. Звідси легко вивести, що для кожної функції $f \in S$ існують такі дві залишкові G_δ-множини A і B на відрізку $X = Y = [0,1]$, що функція f буде сукупно неперервною у кожній точці з множини $xp(A \times B) = (A \times Y) \cup (X \times B)$. Використовуючи категорні міркування, ми доводимо, що для кожної функції f з $\overline{C}^s$ існують такі залишкові G_δ-множини A і B на $[0,1]$, що для кожної точки $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$ і довільного $\varepsilon > 0$ існують околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно і функція $g \in C$, такі, що $|f(p) - g(p)| \leq \varepsilon$ на хресті $xp(U \times V) = (U \times Y) \cup (X \times V)$. Легко зрозуміти, що описана в цьому твердженні властивість (її ми назвали властивість M) сильніша, ніж сформульована вище властивість Бера. Постало природне питання: чи кожна функція $f \in S$ має властивість M? Виявилося, що це справді так і довести це можна двома способами, перший з яких базується на теоремі Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова [7, с.105], а другий використовує компактність відрізка $[0,1]$ і властивість Бера.

Нарешті, ми розвиваємо метод лінійної інтерполяції і з допомогою нього показуємо, що кожна функція $f \in S$, у якої одна з проекцій $pr_X(D(f))$ чи $pr_Y(D(f))$ на вісь абсцис чи ординат не більш, ніж зліченна, входить в $\overline{C}^s$. Ми з'ясовуємо також, що коли у функції $f \in S$ і звуження $f|_{E\times Y}$ неперервне, де $E = pr_X(D(f))$, то $f \in \overline{C}^s$.

2. Історія.

Дослідження питань апроксимації нарізно неперервних функцій розпочалося з праці А.Лебеґа [8], в якій він, використавши наближення неперервної функції ламаними, довів, що кожна нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Бера, тобто є поточковою границею сукупно неперервних функцій $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Поточкова апроксимація нарізно неперервних функцій сукупно неперервними, тобто їх берівська класифікація, як і споріднена з нею лебеґівська класифікація, вивчалась у працях багатьох математиків: Г.Ган, К.Куратовський, Д.Монтґомері, В.Моран, Б.Джонсон, Ж.Сан-Ремо, В.Рудін, Ґ.Вера, Р.Генсел, В.Маслюченко, В.Михайлюк, О.Собчук, Т.Банах, О.Карлова та ін. (див. дисертації [9]–[11] і вказану там літературу). Ці дослідження тривають і нині (див., наприклад, [12]).

В останній час активізувалися дослідження питань пошарово рівномірної апроксимації нарізно неперервних функцій. Вони теж мають своїм джерелом піонерську працю А.Лебеґа [8], адже ламані g_n з вершинами у точках $(\frac{k}{n}, g(\frac{k}{n}))$, де $k = 0, 1, \dots, n$, рівномірно збігаються до неперервної функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ на відрізку, і тому метод Лебеґа дає нам апроксимацію нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ сукупно неперервними CL-функціями $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, які неперервні відносно першої змінної і є лінійними сплайнами відносно другої, при цьому $f_n(x,y) \rightrightarrows f(x,y)$ відносно y на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$. Це спостереження використав М.Цуджі [13], отримавши на його основі певний варіант теореми Бера про проекцію.

У праці [14] з допомогою многочленів Бернштейна для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ була побудована послідовність сукупно неперервних CP-функцій $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, неперервних відносно першої змінної і поліноміальних відносно другої, для яких всі вертикальні x-розрізи $f_n^x = f_n(x,\cdot)$ функцій f_n рівномірно на $[0,1]$ збігаються до вертикального x-розрізу $f^x = f(x,\cdot)$ функції f, і на основі цього отримано нове доведення теореми Бера про проекцію. Тут же пошарова рівномірна апроксимація привела до отримання нових характеризацій метризовних компактів. Ідеї цієї праці були розвинуті в роботах [15]–[18], де замість алгебраїчних поліномів розглядалися тригонометричні, зокрема, поліноми Фейєра і Джексона, а також досліджувалася загальна проблема: для яких компактів Y для кожного всюди щільного лінійного підпростору N банахового простору $C_u(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою, довільного топологічного простору X і будь-якої нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ існує послідовність сукупно неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, таких, що $f_n^x \in N$ для довільних $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$? Зокрема, в [17] з допомогою побудов праці [14] було показано, що для метризовних компактів це так.

Сформульоване у вступі питання про пошарову рівномірну апроксимацію нарізно неперервних функцій многочленами природно виникло у зв'язку з топологізацією простору $S = CC[0,1]^2$, встановленням рівності $\overline{P} = S$ і згаданим результатом про апроксимацію CP-функціями f_n, для яких тільки $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$. Воно вперше прозвучало в доповіді другого з співавторів на міжнародній конференції пам'яті С.Банаха у Львові у вересні 2012 року і опубліковане в тезах [2].

3. Основні означення і позначення.

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ ми покладаємо

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x, y) = f(p).$$

Відображення $f^x : Y \to Z$ називається *вертикальним x-розрізом*, а відображення $f_y : X \to Z$ – *горизонтальним y-розрізом* відображення f.

Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *нарізно неперервним* у точці $p_0 = (x_0, y_0)$ з добутку $X \times Y$, якщо відображення $f^{x_0} : Y \to Z$ неперервне у точці y_0, а відображення $f_{y_0} : X \to Z$ неперервне у точці x_0, і просто *нарізно неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці добутку $X \times Y$. Зрозуміло, що відображення $f : X \times Y \to Z$ буде нарізно неперервним тоді і тільки тоді, коли всі його вертикальні x-розрізи $f^x : Y \to Z$ і горизонтальні y-розрізи $f_y : X \to Z$ неперервні. Сукупність усіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ ми позначаємо символом $CC(X \times Y, Z)$.

Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *сукупно неперервним* або просто *неперервним* у точці $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(p_0)$ у просторі Z існують такі околи U і V точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, що $f(U \times V) \subseteq W$, тобто f є неперервним у точці p_0 відносно топології добутку на $X \times Y$, і просто *сукупно неперервним* чи *неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці з $X \times Y$. Множина всіх сукупно неперервних відображень позначається через $C(X \times Y, Z)$ відповідно до того, що множина всіх неперервних відображень $f : X \to Y$ позначається через $C(X, Y)$. Для скорочення ми вживаємо символи

$$C(X) = C(X, \mathbb{R}),\ CC(X \times Y) = CC(X \times Y, \mathbb{R}) \text{ і } C(X \times Y) = C(X \times Y, \mathbb{R})$$

Як простори $C(X)$ чи $C(X \times Y)$, так і простір $CC(X \times Y)$ – це векторні простори відносно звичайних дій над функціями, лінійні підпростори просторів $\mathbb{R}^X$ чи $\mathbb{R}^{X \times Y}$ всіх функцій на X чи $X \times Y$ відповідно.

Зрозуміло, що з сукупної неперервності в точці випливає нарізна неперервність у цій же точці, отже, $C(X \times Y, Z) \subseteq CC(X \times Y, Z)$. Обернене, взагалі кажучи, не правильне, як показує хрестоматійний приклад функції Шварца $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка нарізно неперервна, але не є сукупно неперервною в точці $(0, 0)$ (і тільки в ній).

Для відображення $f : X \to Y$ символом $C(f)$ ми позначаємо множину його точок неперервності, а через $D(f) = X \setminus C(f)$ – множину його точок розриву. Для відображення $f : X \times Y \to Z$ символ $C(f)$ означає множину точок, в яких f сукупно неперервне, а $D(f) = (X \times Y) \setminus C(f)$, тобто точки розриву відображення $f : X \times Y \to Z$ – це ті точки, в яких f не є сукупно неперервним. Так, для функції Шварца $C(sp) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ і $D(f) = \{(0, 0)\}$.

Для підмножини E топологічного простору T символом $\overline{E}$ ми позначаємо звичайне *замикання* множини E в T, тобто сукупність усіх точок дотику t з T множини E, які можуть бути охарактеризовані умовою: існує сітка $(t_i)_{i \in I}$, що складається з точок $t_i \in E$, яка збігається до t в T. Символ $\overline{E}^s$ означає *секвенціальне замикання* множини E в T, тобто сукупність усіх точок t з T, для яких існує звичайна послідовність $(t_n)_{n=1}^{\infty}$

точок t_n з E, яка прямує до t. У просторах з першою аксіомою зліченності, зокрема, в метризовних просторах, завжди $\overline{E} = \overline{E}^s$, але, взагалі кажучи, справджується лише включення $\overline{E}^s \subseteq \overline{E}$, рівності ж може не бути. Так, секвенціальне замикання простору $C(\mathbb{R})$ всіх неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у просторі $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ всіх функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності – це простір $B_1(\mathbb{R})$ всіх функцій першого класу Бера, а звичайне замикання – це весь простір $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, при цьому $B_1(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, бо функція Діріхле $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ не належить до $B_1(\mathbb{R})$.

Для довільної функції $f : T \to \mathbb{R}$ покладемо

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in T} |f(t)|.$$

Функція $\| \cdot \|_\infty$ буде нормою на просторі $l_\infty(T)$ всіх обмежених функцій $f : T \to \mathbb{R}$, зокрема, на просторі $C(T)$ всіх неперервних функцій $f : T \to \mathbb{R}$, якщо T – компактний простір. Для компактного простору T нормований простір $(C(T), \| \cdot \|_\infty)$ ми позначаємо символом $C_u(T)$, для його елементів $\|f\|_\infty = \max_{t \in T} |f(t)|$.

Символом $C_p(T)$ для довільного топологічного простору T позначається простір $C(T)$ з топологією поточкової збіжності, що породжується сім'єю переднорм

$$q_t(f) = |f(t)|, \quad t \in T.$$

Допускаючи вільність мови, функцію $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^T \to [0; +\infty]$ ми називаємо *рівномірною нормою*, адже послідовність функцій $f_n : T \to \mathbb{R}$ буде рівномірно збігатися до функції $f : T \to \mathbb{R}$ на T тоді і тільки тоді, коли $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Для позначення рівномірної збіжності на множині T ми вживаємо звичайне коротке позначення: $f_n \rightrightarrows f$ на T.

4. Топологізація простору нарізно неперервних функцій і рівність $\overline{P}^s = \overline{C}^s$.

Нехай X і Y – компактні топологічні простори. Розглянемо на векторному просторі $CC(X \times Y)$ дві сім'ї переднорм, поклавши для функції $f \in CC(X \times Y)$ і довільних елементів $x \in X$ і $y \in Y$

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty \quad \text{і} \quad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty.$$

Локально опуклу топологію $\mathcal{T}$ на просторі $CC(X \times Y)$, що породжується сукупністю переднорм

$$\{\| \cdot \|^x : x \in X\} \cup \{\| \cdot \|_y : y \in Y\}$$

ми називаємо *топологією пошарової рівномірної збіжності*, бо $f_n \to f$ у просторі $(CC(X \times Y), \mathcal{T})$ тоді і тільки тоді, коли $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in X$ і $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$.

У цій статті ми розглянемо частинний випадок, коли $X = Y = [0, 1]$, відклавши дослідження загального випадку на пізніші часи. У цьому випадку добуток $X \times Y$ – це одиничний квадрат $Q = [0, 1]^2$ на числовій площині $\mathbb{R}^2$, а $CC(X \times Y)$ – це простір $CC[0, 1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$, заданих на квадраті Q.

Простір $CC[0,1]^2$, наділений топологією пошарової рівномірної збіжності, ми будемо позначати літерою S. Літерою P позначається простір всіх поліномів

$$f(x,y)=\sum_{j,k=0}^{n} a_{j,k}x^j y^k$$

від двох дійсних змінних, для яких $0\le x\le 1$ і $0\le y\le 1$, а літерою C – простір $C[0,1]^2$ усіх сукупно неперервних функцій $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$. Зрозуміло, що P і C є лінійними підпросторами S, причому $P\subset C\subset S$ (включення строгі).

Властивості простору S вивчалися у праці [5], де було з'ясовано, що S – це повний сепарабельний локально опуклий простір, що не задовольняє першу аксіому зліченності, а значить, не метризовний, причому $\overline{P}=\overline{C}=S$, де замикання, зрозуміло, розглядається у просторі S.

У цій статті ми будемо вивчати секвенціальне замикання $\overline{P}^s$ в S. Почнемо з такого простого спостереження.

Теорема 4.1. $\overline{P}^s=\overline{C}^s$.

Доведення. Оскільки $P\subseteq C$, то і $\overline{P}^s\subseteq\overline{C}^s$. Покажемо, що виконується і обернене включення.

Нехай $f\in\overline{C}^s$. Тоді існує така послідовність функцій $f_n\in C$, що $f_n\to f$ у просторі S, тобто

$$\|f_n-f\|^x\to 0 \quad \text{і} \quad \|f_n-f\|_y\to 0 \ \text{ для довільних } \ x,y\in[0,1].$$

За теоремою Вейєрштрасса для функцій двох змінних [19] простір P усіх поліномів на Q всюди щільний у просторі $C_u(Q)$. Тому для кожного номера n існує такий многочлен $g_n\in P$, що $\|g_n-f_n\|_\infty\le\frac{1}{n}$. В такому разі для довільного $x\in[0,1]$

$$\|g_n-f\|^x=\|g_n^x-f^x\|_\infty\le\|g_n^x-f_n^x\|_\infty+\|f_n^x-f^x\|_\infty\le\|g_n-f_n\|_\infty+\|f_n-f\|^x\le\frac{1}{n}+\|f_n-f\|^x,$$

звідки негайно випливає, що $\|g_n-f\|^x\to 0$. Так само перевіряється і те, що $\|g_n-f\|_y\to 0$ для кожного $y\in[0,1]$. Тому $g_n\to f$ у просторі S, отже, $f\in\overline{P}^s$.

□

Надалі ми будемо вивчати саме секвенціальне замикання $\overline{C}^s$ простору C сукупно неперервних функцій у просторі S нарізно неперервних функцій на квадраті. Зауважимо, що цю задачу можна розглядати і в загальнішому випадку, коли квадрат Q замінено на добуток $X\times Y$ довільних компактних просторів і поняття многочлена втрачає зміст.

5. Функції зі скінченним числом точок розриву.

Оскільки простір C інваріантний відносно рівномірної збіжності послідовностей, то виникає підозра чи не інваріантний він і відносно пошарово рівномірної збіжності послідовностей, тобто чи бува не виконується рівність $\overline{C}^s=C$. Функція Шварца sp, звужена на квадрат Q, одразу ж спростовує цю гіпотезу.

Теорема 5.1. $sp|_Q \in \overline{C}^s \setminus C$.

Доведення. Ясно, що $f = sp|_Q \in S\setminus C$. Покажемо, що $f \in \overline{C}^s$. Для цього виріжемо з квадрата Q відкритий квадратик $Q_n = (0, \frac{1}{n})^2$, розглянувши для кожного номера n замкнену підмножину $E_n = Q\setminus Q_n$ квадрата Q. Оскільки функція Шварца нарізно неперервна і розривна тільки в точці $(0,0)$, то звуження $g_n = f|_{E_n}$ буде сукупно неперервною функцією. За теоремою Тітце-Урисона [7, с.116] існує функція $f_n \in C$, така, що $f_n|_{E_n} = g_n$. (Звичайно, таку функцію легко побудувати і безпосередньо). Легко зрозуміти, що $f_n \to f$ в S. Справді, зафіксуємо якусь точку x з відрізка $[0,1]$. Якщо $x = 0$, то $f_n^x = f_n^0 = f^0 = f^x$, бо $\{0\} \times [0,1] \subseteq E_n$ для кожного n, отже, в цьому випадку $\|f_n - f\|^x = 0$ для кожного n. Нехай $x > 0$. Тоді існує такий номер N, що $\frac{1}{n} \le x$ для всіх $n \ge N$. У такому разі $f_n^x = f^x$ при $n \ge N$, бо $\{x\} \times [0,1] \subseteq E_n$ при $n \ge N$. Тому тут маємо, що $\|f_n - f\|^x = 0$ при $n \ge N$. Таким чином, $\|f_n - f\|^x \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $x \in [0,1]$. З міркувань симетрії ясно, що і $\|f_n - f\|_y \to 0$ для кожного $y \in [0,1]$, отже, $f_n \to f$ в S, а значить $f \in \overline{C}^s$. □

Теорема 5.2. *Нехай $f \in S$ і множина $D(f)$ скінченна. Тоді $f \in \overline{C}^s$.*

Доведення. Якщо $D(f) = \varnothing$, то $f \in C$ і все зрозуміло. Нехай $D(f) \ne \varnothing$. Тоді $D(f) = \{p_1, \dots, p_m\}$ для деякого натурального m, де $p_k \ne p_j$ при $k \ne j$. Нехай $p_k = (x_k, y_k)$ при $k = 1, \dots, m$. Для кожного n легко побудувати диз'юнктну систему квадратів

$$Q_{n,k} = (x_k - \delta_n, x_k + \delta_n) \times (y_k - \delta_n, y_k + \delta_n)$$

з центрами у точках p_k, де $k = 1, \dots, m$, причому $0 < \delta_n \le \frac{1}{n}$. Для кожної пари (n,k) розглянемо хрестик $C_{n,k} = (\{x_k\} \times (y_k - \delta_n, y_k + \delta_n)) \cup ((x_k - \delta_n, x_k + \delta_n) \times \{y_k\})$ і відкриту в $\mathbb{R}^2$ множину $G_{n,k} = Q_{n,k} \setminus C_{n,k}$. Множина $G_n = \bigcup\limits_{k=1}^{m} G_{n,k}$ теж відкрита в $\mathbb{R}^2$, а тому множина $E_n = Q\setminus G_n$ замкнена в квадраті Q. Для кожного n розглянемо звуження $g_n = f|_{E_n}$. Оскільки функція f нарізно неперервна і розривна тільки в точках p_k, то функція $g_n : E_n \to \mathbb{R}$ буде неперервною. За теоремою Тітце-Урисона існує така неперервна функція $f_n : Q \to \mathbb{R}$, що $f_n|_{E_n} = g_n$. Легко зрозуміти, що $f_n \to f$ в S.

Справді, нехай $0 \le x \le 1$. Якщо $x = x_k$ для деякого $k = 1, \dots, m$, то $f_n^x = f_n^{x_k} = f^{x_k} = f^x$, бо $\{x_k\} \times [0,1] \subseteq E_n$ для кожного n за побудовою. В такому разі $\|f_n - f\|^x = 0$ для кожного n. Якщо ж $x \ne x_k$ при $k = 1, \dots, m$, то число $\delta = \min\{|x - x_k| : k = 1, \dots, m\}$ додатне. За побудовою $0 < \delta_n \le \frac{1}{n}$, отже, $\delta_n \to 0$. Тому існує такий номер N, що $\delta_n \le \delta$ при $n \ge N$. Тоді $\{x\} \times [0,1] \subseteq E_n$ при $n \ge N$ і тому $f_n^x = f^x$ при $n \ge N$, отже, $\|f_n - f\|^x = 0$ при $n \ge N$. Таким чином, $\|f_n - f\|^x \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $x \in [0,1]$. Так само встановлюється, що $\|f_n - f\|_y \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $y \in [0,1]$. Звідси випливає, що $f_n \to f$ в S, отже, $f \in \overline{C}^s$. □

Кажуть, що послідовність відображень $g_n : T \to Z$ *стабільно збігається* до відображення $g : T \to Z$ (позначається: $g_n \xrightarrow{d} g$), якщо існує такий номер N, що $g_n = g$, як тільки $n \ge N$. Ми скажемо, що послідовність відображень $f_n : X \times Y \to Z$ *пошарово стабільно збігається* до відображення $f : X \times Y \to Z$, якщо $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ для кожного

$x \in X$ і $(f_n)_y \xrightarrow{d} f_y$ для кожного $y \in Y$. Ясно, що у випадку $Z = \mathbb{R}$ зі стабільної збіжності випливає рівномірна, а з пошарово стабільної збіжності – пошарово рівномірна збіжність. З доведення теореми 5.2 випливає, що для функції $f \in S$ зі скінченним числом розривів існує послідовність неперервних функцій $f_n \in C$, яка пошарово стабільно збігається до f.

6. Нормальна і рівномірна збіжність.

Свою дисертацію [6] Р.Бер починає з розгляду функції $f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка задається формулою

$$f_0(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} sp(p - p_k),$$

де $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність різних точок площини $\mathbb{R}^2$. Це функція нарізно неперервна і у неї $D(f_0) = \{p_k : k \in \mathbb{N}\}$. Наступне природне питання, яке постало в наших дослідженнях: чи $f_0|_Q \in \overline{C}^s$? Воно зафіксоване в тезах [2]. У цьому пункті ми дамо на нього позитивну відповідь.

Почнемо з допоміжних тверджень.

Лема 6.1. *Нехай X – довільна множина і послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ рівномірно на X збігається до функції $f : X \to \mathbb{R}$, причому $|f(x)| \le \gamma$ на X для деякого $\gamma \ge 0$. Тоді функції $g_n(x) = \max\{-\gamma, \min\{f_n(x), \gamma\}\}$ задовольняють на X нерівність $|g_n(x)| \le \gamma$ і $g_n \rightrightarrows f$ на X.*

Доведення. Зрозуміло, що $g_n(x) = f_n(x)$, якщо $|f_n(x)| \le \gamma$, $g_n(x) = \gamma$, якщо $f_n(x) \ge \gamma$, і $g_n(x) = -\gamma$, якщо $f_n(x) \le -\gamma$. Тому $|g_n(x)| \le \gamma$ на X.

Покажемо, що $g_n \rightrightarrows f$ на X. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки $f_n \rightrightarrows f$ на X, то існує такий номер N, що для довільного $x \in X$ при $n \ge N$ виконується нерівність

$$f(x) - \varepsilon \le f_n(x) \le f(x) + \varepsilon.$$

Візьмемо $x \in X$ і $n \ge N$. Якщо $|f_n(x)| \le \gamma$, то $g_n(x) = f_n(x)$, отже, тоді і

$$f(x) - \varepsilon \le g_n(x) \le f(x) + \varepsilon.$$

Нехай $f_n(x) \ge \gamma$. Тоді $g_n(x) = \gamma \ge f(x)$. В такому разі

$$f(x) \le g_n(x) \le f_n(x) \le f(x) + \varepsilon,$$

тим більше

$$f(x) - \varepsilon \le g_n(x) \le f(x) + \varepsilon.$$

Нарешті, нехай $f_n(x) \le -\gamma$. Тоді $g_n(x) = -\gamma \le f(x)$. Тепер

$$f(x) - \varepsilon \le f_n(x) \le g_n(x) \le f(x),$$

отже, і тут $f(x) - \varepsilon \le g_n(x) \le f(x) + \varepsilon$. Таким чином, $|g_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ на X, як тільки $n \ge N$, отже, $g_n \rightrightarrows f$ на X. □

Лема 6.2. *Нехай $f \in S$, $f_n \in C$ для кожного номера n, $f_n \to f$ в S, $|f(p)| \le \gamma$ на Q і $g_n(p) = \max\{-\gamma, \min\{f_n(p), \gamma\}\}$. Тоді $g_n \in C$, $|g_n(p)| \le \gamma$ на Q для кожного n і $g_n \to f$ в S.*

Доведення. Оскільки максимум і мінімум двох неперервних функцій залишається знову неперервною функцією, то $g_n \in C$ для кожного n. Нерівність $|g_n(p)| \le \gamma$ доведена в попередній лемі. Покажемо, що $g_n \to f$ в S.

Зафіксуємо $x \in X$. Ясно, що для довільного $y \in [0,1]$

$$g_n^x(y) = g_n(x,y) = \max\{-\gamma, \min\{f_n(x,y), \gamma\}\} = \max\{-\gamma, \min\{f_n^x(y), \gamma\}\}.$$

За умовою $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$. Тоді за лемою 6.1 і $g_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$. Так само доводиться, що і $(g_n)_y \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$ для кожного $y \in [0,1]$. Тому $g_n \to f$ в S. □

Ми кажемо, що функціональний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ *нормально збігається на множині* E, якщо існує такий номер m, що числовий ряд $\sum_{k=m}^{\infty} \|u_k\|_\infty$, де $\|u_k\|_\infty = \sup_{p\in E} |u_k(p)|$, збігається.

Теорема 6.3. *Нехай $f(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ на Q, причому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ нормально збігається на Q і $u_k \in \overline{C}^s$ для кожного k. Тоді і $f \in \overline{C}^s$.*

Доведення. За умовою існує такий номер m, що ряд $\sum_{k=m}^{\infty} \|u_k\|_\infty$ збігається. Нехай

$$g(p) = \sum_{k=1}^{m-1} u_k(p) \quad \text{і} \quad h(p) = \sum_{k=m}^{\infty} u_k(p).$$

Оскільки C – лінійний підпростір S, то таким буде і $\overline{C}^s$. Тому $g \in \overline{C}^s$. Для функцій u_k при $k \ge m$ виконується нерівність $|u_k(p)| \le \|u_k\|_\infty = c_k < +\infty$ на Q. Оскільки $u_k \in \overline{C}^s$, то існує така послідовність функцій $u_{k,n} \in C$, що $u_{k,n} \to u_k$ в S. Покладаючи

$$v_{k,n}(p) = \max\{-c_k, \min\{u_{k,n}(p), c_k\}\}$$

при $k \ge m$, ми отримаємо згідно з лемою 6.2 функції $v_{k,n} \in C$, такі, що $|v_{k,n}(p)| \le c_k$ на Q і $v_{k,n} \to u_k$ в S. Розглянемо функції

$$h_n(p) = \sum_{k=m}^{\infty} v_{k,n}(p).$$

Зі збіжності ряду $\sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k$ на основі ознаки Вейєрштрасса випливає рівномірна збіжність на Q ряду для визначення функцій h_n. Оскільки $v_{k,n} \in C$ для кожного $k \ge m$, то і $h_n \in C$ за відомою теоремою з аналізу.

Покажемо, що $h_n \to h$ у S. Для фіксованого x з $[0,1]$, очевидно, будемо мати

$$\|h_n - h\|^x \le \sum_{k=m}^{\infty} \|v_{k,n} - u_k\|^x.$$

При цьому

$$\|v_{k,n} - u_k\|^x = \|v_{k,n}^x - u_k^x\|_\infty \le \|v_{k,n} - u_k\|_\infty \le \|v_{k,n}\|_\infty + \|u_k\|_\infty \le 2\|u_k\|_\infty = 2c_k$$

для довільних номерів n і кожного $k \ge m$. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} 2c_k$ збігається, то ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \|v_{k,n} - u_k\|^x$ збігається рівномірно відносно n на множині $\mathbb{N}$ за ознакою Вейєрштрасса, тому за теоремою про граничний перехід під знаком нескінченної суми

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|^x = \sum_{k=m}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \|v_{k,n} - u_k\|^x = \sum_{k=m}^{\infty} 0 = 0.$$

Так само доводиться, що $\|h_n - h\|_y \to 0$ для кожного $y \in [0,1]$. Отже, $h_n \to h$ в S.

Це доводить, що $h \in \overline{C}^s$. Оскільки $f = g + h$, причому обидва доданки g і h належать до $\overline{C}^s$, то і $f \in \overline{C}^s$. □

Наслідок 6.4. *Звуження $f_0|_Q$ функції Бера f_0 на квадрат Q належить до $\overline{C}^s$.*

Доведення. Для функцій $u_k(p) = \frac{1}{2^k} sp(p - p_k)$ виконується оцінка $|u_k(p)| \le \frac{1}{2^k}$ для всіх k і довільного $p \in Q$, що дає нам нормальну збіжність відповідного ряду. Оскільки $u_k \in \overline{C}^s$ для кожного k за теоремою 5.2 (і з теореми 5.1 це легко вивести), то $f_0|_Q \in \overline{C}^s$ за теоремою 6.3. □

З теореми 6.3 можна вивести, що $\overline{C}^s$, як і C, інваріантний відносно рівномірної збіжності послідовностей.

Лема 6.5. *Нехай послідовність функцій $f_n : E \to \mathbb{R}$ рівномірно на E збігається до функції $f : E \to \mathbb{R}$. Тоді існує така підпослідовність $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, що $f(p) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ на E, де $u_1 = f_{n_1}$ і $u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ при $k > 1$, причому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ нормально збігається на E.*

Доведення. З того, що $f_n \rightrightarrows f$ на E, легко вивести, що існує така строго зростаюча послідовність номерів n_k, що

$$|f_n(p) - f(p)| \le \frac{1}{2^{k+2}} \quad \text{на} \quad E \quad \text{при} \quad n \ge n_k.$$

Покладемо $u_1 = f_{n_1}$ і $u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ при $k > 1$. Оскільки $n_k > n_{k-1}$ при $k > 1$, то для таких k будемо мати

$$|u_k(p)| = |f_{n_k}(p) - f_{n_{k-1}}(p)| \le |f_{n_k}(p) - f(p)| + |f_{n_{k-1}}(p) - f(p)| \le \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}$$

на множині E, отже, $\|u_k\|_\infty \le \frac{1}{2^k}$ для кожного $k > 1$, звідки випливає нормальна збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ на E. Але

$$\sum_{k=1}^{m} u_k(p) = f_{n_1}(p) + f_{n_2}(p) - f_{n_1}(p) + \ldots + f_{n_m}(p) - f_{n_{m-1}}(p) = f_{n_m}(p)$$

і $f_{n_m}(p) \to f(p)$ на E, тому $f(p) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ на E і лема доведена. □

Теорема 6.6. *Нехай* $f_n \in \overline{C}^s$ *для кожного номера* n *і* $f_n \rightrightarrows f$ *на* Q. *Тоді і* $f \in \overline{C}^s$.

Доведення. Згідно з лемою 6.5 існують строго зростаюча послідовність номерів n_k і відповідні функції u_k, такі, що $f(p) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(p)$ на Q, причому ряд збігається нормально на Q. Оскільки $f_n \in \overline{C}^s$ для кожного n і $\overline{C}^s$ – це лінійний підпростір S, то $u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}} \in \overline{C}^s$ при $k > 1$ і $u_1 = f_{n_1} \in \overline{C}^s$. Тоді і $f \in \overline{C}^s$ згідно з теоремою 6.3. □

7. Рівномірне наближення функцій з $\overline{C}^s$ і S на хрестах

Нагадаємо, що *хрестом* підмножини E добутку $X \times Y$ називається множина

$$xp(E) = (pr_X(E) \times Y) \cup (X \times pr_Y(E)),$$

де $pr_X : X \times Y \to X$ і $pr_Y : X \times Y \to Y$ – проекції, що визначаються формулами

$$pr_X(x, y) = x \quad \text{і} \quad pr_Y(x, y) = y.$$

Топологічний простір X називається *берівським* [20, с.116], якщо в ньому кожна непорожня відкрита множина є множиною другої категорії. Кожний повнометризовний чи компактний простір є берівським. Зокрема, таким буде відрізок $[0, 1]$. Беровість простору X рівносильна такій умові [21, с.64]: для кожної послідовності замкнених в X множин F_n, такої, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, відкрита множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} int(F_n)$ всюди щільна в X. Зараз ми, користуючись цією умовою, виведемо певну апроксимативну властивість функцій $f \in \overline{C}^s$.

Нехай $f \in \overline{C}^s$ і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – така послідовність функцій $f_n \in C$, що $f_n \to f$ в S. Покладемо для скорочення запису $X = [0, 1] = Y$. Для кожного $\varepsilon > 0$ і довільного номера n розглянемо множини

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X : (\forall k \geq n)(\|f_n - f\|^x \leq \varepsilon)\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon) = X$, бо $\|f_k - f\|^x \to 0$ при $k \to \infty$ для кожного $x \in X$.

Легко перевірити, що множини $A_n(\varepsilon)$ замкнені. Справді, нехай $x_j \in A_n(\varepsilon)$, $x \in X$ і $x_j \to x$. Зафіксуємо $k \geq n$ і $y \in Y$. Оскільки $x_j \in A_n(\varepsilon)$, то $|f_k(x_j, y) - f(x_j, y)| \leq \varepsilon$. Але $f_k(x_j, y) \to f_k(x, y)$, бо функція f_k неперервна, і $f(x_j, y) \to f(x, y)$, бо функція f нарізно неперервна, отже, неперервна функція f_y. Тому і

$$|f_k(x, y) - f(x, y)| = \lim_{j \to \infty} |f_k(x_j, y) - f(x_j, y)| \leq \varepsilon,$$

звідки, перейшовши до супремума, отримаємо, що $\|f_k - f\|^x \leq \varepsilon$. Тому і $x \in A_n(\varepsilon)$, отже, $A_n(\varepsilon)$ – замкнена множина в X.

Введемо множини

$$G_n(\varepsilon) = intA_n(\varepsilon) \quad \text{і} \quad G(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(\varepsilon).$$

Оскільки простір $X = [0,1]$ берівський, то відкрита в X множина $G(\varepsilon)$ всюди щільна в X. Її доповнення $X \backslash G(\varepsilon)$ буде ніде не щільним в X, а перетин

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} G(\tfrac{1}{m})$$

буде залишковою в X множиною типу G_δ.

Аналогічно, вводячи множини

$$B_n(\varepsilon) = \{y \in Y : (\forall k \geq n)(\|f_k - f\|_y \leq \varepsilon)\},$$

які будуть замкненими в Y і для них $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon) = Y$, ми отримаємо, що відкрита множина

$$H(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n(\varepsilon), \quad \text{де} \quad H_n(\varepsilon) = intB_n(\varepsilon),$$

всюди щільна в Y, а перетин

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} H(\tfrac{1}{m})$$

буде залишковою G_δ-множиною у просторі Y.

Теорема 7.1. *Нехай $f \in \overline{C}^s$, $f_n \in C$, $f_n \to f$ в S і A та B – побудовані вище залишкові G_δ-множини в $X = Y = [0,1]$. Тоді для кожної точки $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$ і довільного $\varepsilon > 0$ існують околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно і неперервна функція $g \in C$, такі, що $|f(p) - g(p)| \leq \varepsilon$ на $xp(U \times V)$.*

Доведення. Візьмемо номер m настільки великим, що $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Тоді $x_0 \in G(\frac{1}{m}) \subseteq G(\varepsilon)$ і $y_0 \in H(\frac{1}{m}) \subseteq H(\varepsilon)$. Знайдемо такі номери n і l, що $x_0 \in G_n(\varepsilon)$, $y_0 \in H_l(\varepsilon)$ і покладемо $U = G_n(\varepsilon)$ і $V = H_l(\varepsilon)$. Множини U і V відкриті, отже, вони будуть околами точок x_0 і y_0 відповідно. Оскільки $U \subseteq A_n(\varepsilon)$ і $V \subseteq B_l(\varepsilon)$, то $\|f_k - f\|^x \leq \varepsilon$ для всіх $x \in U$ і $k \geq n$, а $\|f_m - f\|_y \leq \varepsilon$ для всіх $y \in V$ і $k \geq l$. Візьмемо $k = \max\{n, l\}$ і покладемо $g = f_k$. Для цієї функції будемо мати, що

$$|g(x,y) - f(x,y)| \leq \varepsilon \quad \text{на} \quad U \times Y \quad \text{і} \quad |g(x,y) - f(x,y)| \leq \varepsilon \quad \text{на} \quad X \times V,$$

отже, $|g(x,y) - f(x,y)| \leq \varepsilon$ на $xp(U \times V)$. Крім того, $g = f_k \in C$. Таким чином, g і є шуканою функцією. □

Нехай X і Y – довільні топологічні простори. Ми кажемо, що функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має *властивість* M, якщо існують такі залишкові множини A і B у просторах X і Y відповідно, що для кожної точки $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$ і довільного $\varepsilon > 0$ існують такі околи U і V точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно і неперервна функція $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, що $|g(p) - f(p)| \leq \varepsilon$ на $xp(U \times V)$. Будемо говорити, що $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має *властивість* B, якщо існують такі залишкові множини A і B у просторах X і Y відповідно, що $xp(A \times B) \subseteq C(f)$.

В теоремі 7.1 ми встановили, що кожна функція $f \in \overline{C}^s$ має властивість M. Ясно, що доведення проходить для довільних компактних просторів X і Y.

Теорема 7.2. *Нехай X і Y – топологічні простори і функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має властивість* M. *Тоді вона має і властивість* B.

Доведення. Нехай A і B – залишкові множини, існування яких вимагається в означенні властивості M. Покажемо, що $xp(A\times B) \subseteq C(f)$. Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in xp(A\times B)$ і $\varepsilon > 0$. Розберемо випадок, коли $x_0 \in A$ і $y_0 \in Y$. Існують окіл U_0 точки x_0 в X і неперервна функція $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, такі, що $|g(p) - f(p)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ на $U_0 \times Y$. З неперервності функції g у точці p_0 випливає, що існують такі околи U і V точок x_0 і y_0 у просторах X і Y відповідно, що $U \subseteq U_0$ і $|g(p) - g(p_0)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ на $U \times V$. Тоді для кожної точки p з $U \times V$ будемо мати

$$|f(p) - f(p_0)| \le |f(p) - g(p))| + |g(p) - g(p_0)| + |g(p_0) - f(p_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Це і означає, що f неперервна в точці p_0. Так само міркуємо і коли $x_0 \in X$, а $y_0 \in B$. Таким чином, $p_0 \in C(f)$, отже, f має властивість B. □

Дослідження того, коли $\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{M}$, є цікавою задачею, повне розв'язання якої ми відкладемо на майбутнє. Поки що обмежимося таким результатом.

Теорема 7.3. *Нехай X і Y – компактні простори і функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має властивість* B. *Тоді вона має і властивість* M.

Доведення спирається на допоміжне твердження.

Лема 7.4. *Нехай X – топологічний простір, Y – компактний простір, $x_0 \in X$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – функція, для якої $\{x_0\} \times Y \subseteq C(f)$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X, що $|f(x, y) - f(x_0, y)| \le \varepsilon$ на множині $U \times Y$.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки функція f неперервна в кожній точці (x_0, y), де $y \in Y$, то для кожного $y \in Y$ існують окіл U_y точки x_0 в X і відкритий окіл V_y точки y в Y, такі, що $|f(x, v) - f(x_0, y)| \le \frac{\varepsilon}{2}$ на добутку $U_y \times V_y$. Сім'я $(V_y)_{y\in Y}$ утворює відкрите покриття компактного простору Y. Виберемо з неї скінченне покриття Y множинами $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$. Множина $U = \bigcap_{k=1}^n U_{y_k}$ є околом точки x_0 в X, який і буде шуканим. Справді, для довільної точки $(x, y) \in U \times Y$ існує таке $k = 1, \dots, n$, що $y \in V_{y_k}$. Оскільки $x \in U_{y_k}$, бо $U \subseteq U_{y_k}$, то точки (x, y) і (x_0, y) належать до добутку $U_{y_k} \times V_{y_k}$. Тому

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \le |f(x, y) - f(x_0, y_k)| + |f(x_0, y_k) - f(x_0, y)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Доведення теореми 7.3. Розглянемо залишкові множини A і B у просторах X і Y відповідно, про які йдеться в означенні властивості B. Нехай $\varepsilon > 0$, $x_0 \in A$ і $y_0 \in B$. Оскільки $\{x_0\} \times Y \subseteq C(f)$, то за лемою 7.4 існує такий окіл U точки x_0 в X, що

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{на} \quad U \times Y.$$

Так само існує такий окіл V точки y_0 в Y, що

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{на} \quad X \times V.$$

Розглянемо функцію $g(x,y) = f(x,y_0) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0)$ на $X \times Y$. Оскільки функція f нарізно неперервна, то g неперервна за сукупністю змінних.

Оскільки

$$g(x,y)-f(x,y) = f(x,y_0)-f(x,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0) = f(x_0,y)-f(x,y)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

то

$$|g(x,y) - f(x,y)| \le |f(x,y_0) - f(x,y)| + |f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

на множині $X \times V$ і

$$|g(x,y) - f(x,y)| \le |f(x_0,y) - f(x,y)| + |f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

на множині $U \times Y$. Таким чином,

$$|g(p) - f(p)| \le \varepsilon \quad \text{на} \quad xp(U \times V).$$

Наслідок 7.5. *Нехай X і Y – компактні простори, а $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді f має властивість* M.

Доведення. Справді, за теоремою Наміоки [22] функція f має властивість B, а тому вона має і властивість M згідно з теоремою 7.3. □

Наслідок 7.5 показує, що кожна функція з S, а не тільки з $\overline{C}^s$ має властивість M. Первісне доведення цього факту базувалося на теоремі Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова [7, с.105], яка твердить, що для нормального простору X, напівнеперервної зверху функції $g : X \to \mathbb{R}$, напівнеперервної знизу функції $h : X \to \mathbb{R}$, таких, що $g(x) \le h(x)$ на X, існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $g(x) \le f(x) \le h(x)$ на X, причому ця властивість є характеристичною для нормальності. Ми наведемо його тут, оскільки воно базується на твердженні, яке цікаве і саме по собі.

Лема 7.6. *Нехай X – нормальний простір, $\varepsilon > 0$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – функція, у якої коливання $\omega_f(x) \le \varepsilon$ на X. Тоді існує така неперервна функція $g : X \to \mathbb{R}$, що $|f(x) - g(x)| \le 2\varepsilon$ на X.*

Доведення. Нехай $f^\wedge(x) = \underline{\lim}_{u\to x} f(u)$ і $f^\vee(x) = \overline{\lim}_{u\to x} f(u)$ – нижня і верхня функції Бера для функції f. Оскільки коливання $\omega_f(x)$ у кожній точці скінченне, то і числа $f^\wedge(x)$ і $f^\vee(x)$ скінченні і $\omega_f(x) = f^\vee(x) - f^\wedge(x)$. Добре відомо, що функції $f^\wedge$ і $f^\vee$ напівнеперервні знизу і зверху відповідно. Оскільки $\omega_f(x) \le \varepsilon$, то $f^\vee(x) \le f^\wedge(x) + \varepsilon$ і $f^\wedge(x) \ge f^\vee(x) - \varepsilon$ на X. Але $f^\wedge(x) \le f(x) \le f^\vee(x)$ на X. Тому $f^\vee(x) - \varepsilon \le f(x) \le f^\wedge(x) + \varepsilon$ на X. Функція $f^\vee - \varepsilon$ напівнеперервна зверху, а функція $f^\wedge + \varepsilon$ – знизу. Тому за теоремою Гана-Д'єдонне-Тонґа-Катетова існує така неперервна функція $g : X \to \mathbb{R}$, що $f^\vee(x) - \varepsilon \le g(x) \le f^\wedge(x) + \varepsilon$ на X. Оскільки і $f(x)$ лежить у тих же межах, то

$$|f(x) - g(x)| \le (f^\wedge(x) + \varepsilon) - (f^\vee(x) - \varepsilon) = 2\varepsilon - \omega_f(x) \le 2\varepsilon$$

на X, бо $\omega_f(x) \ge 0$. □

Зауважимо, що можна розглянути рівномірну відстань

$$d(f, C(X)) = \inf\{\|f - g\|_\infty : g \in C(X)\}$$

до простору $C(X)$ всіх неперервних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і довести подібним чином, що $d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\|\omega_f\|_\infty$ для нормального простору X (див. [23, с.23], де було доведено, що для обмеженої функції $f : X \to \mathbb{R}$ рівномірна відстань $d(f, C_b(X))$ до простору $C_b(X)$ обмежених неперервних функцій $g : X \to \mathbb{R}$ дорівнює $\frac{1}{2}\|\omega_f\|_\infty$, якщо простір X – паракомпакт).

Нехай $f \in S$. Покажемо, що f має властивість M. За теоремою Бера про проекцію існують такі залишкові множини A і B на відрізку $[0, 1] = X = Y$ що $xp(A \times B) \subseteq C(f)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і розглянемо множину

$$D^\varepsilon(f) = \{p \in Q : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}.$$

Це множина замкнена в Q, а тому за теоремою Куратовського [7, с.200] її проекції $X_\varepsilon = pr_X(D^\varepsilon(f))$ і $Y_\varepsilon = pr_Y(D^\varepsilon(f))$ замкнені.

Нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in A \times B$. Оскільки $xp(p_0) \subseteq C(f)$, то $x_0 \notin X_\varepsilon$ і $y_0 \notin Y_\varepsilon$. Тому існують такі замкнені околи U і V точок x_0 і y_0 відповідно, що $U \cap X_\varepsilon = \varnothing$ і $V \cap Y_\varepsilon = \varnothing$. Зрозуміло, що у кожній точці p хреста $E = xp(U \times V)$ виконується нерівність $\omega_f(p) \leq \varepsilon$. Підпростір E замкнений в Q, а тому нормальний. За лемою 7.6 існує така неперервна функція $g_0 : E \to \mathbb{R}$, що $|f(p) - g_0(p)| \leq 2\varepsilon$. Згідно з теоремою Тітце-Урисона існує така неперервна функція $g : Q \to \mathbb{R}$, для якої $g|_E = g_0$. Для цієї функції будемо мати

$$|f(p) - g(p)| \leq 2\varepsilon \quad \text{на} \quad E = xp(U \times V),$$

отже, f має властивість M.

8. Лінійна інтерполяція та її застосування.

Нехай A – скінченна підмножина інтервалу (a, b) числової прямої, для якого $-\infty < a < b < +\infty$, і $\widetilde{A} = A \cup \{a, b\}$. Припустимо, що n – це число елементів множини A (воно може дорівнювати і нулю, коли множина A порожня). Занумеруємо елементи множини $\widetilde{A}$ у порядку зростання. Тоді множина $\widetilde{A}$ запишеться у вигляді $\widetilde{A} = \{a_k : k = 0, \ldots, n + 1\}$, де $a = a_0 < \ldots < a_{n+1} = b$. Для непорожньої множини A, будемо мати $A = \{a_k : k = 1, \ldots, n\}$.

Кожній функції $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ поставимо у відповідність функцію $h = L_A g$, графіком якої є ламана з вузлами $(a_k, g(a_k))$, де $k = 0, \ldots, n+ 1$. Якщо $A = \varnothing$, то h – це лінійна функція, яка задається формулою

$$h(x) = g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a),$$

якщо ж $A \neq \varnothing$, то h – це неперервна кусково лінійна функція, яка на кожному відрізку $[a_k, a_{k+1}]$, де $k = 0, \ldots, n$, задається формулою

$$h(x) = g(a_k) + \frac{g(a_{k+1}) - g(a_k)}{a_{k+1} - a_k}(x - a_k).$$

Розглянемо числа $\Delta a_k = a_{k+1} - a_k$ при $k = 0, \ldots, n$ і

$$\eta_A = \eta_{[a,b],A} = \max_{k=0,\ldots,n} \Delta a_k.$$

Лема 8.1. *Нехай $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна підмножина інтервала (a, b), яка щільна в ньому, $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$ і $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Тоді послідовність чисел η_{A_n} прямує до нуля.*

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо якесь розбиття $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ відрізка $[a, b]$, для якого $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j < \frac{\varepsilon}{2}$ для кожного $j = 0, \ldots, m-1$. Оскільки множина A щільна в інтервалі (a, b), то для кожного $j = 0, \ldots, m-1$ існує такий номер k_j, що $a_{k_j} \in (x_j, x_{j+1})$. Нехай $N = \max\{k_1, \ldots, k_m\}$. Покажемо, що $\eta_{A_n} < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Нехай $n \geq N$. Занумеруємо точки множини $\widetilde{A_n} = \{a, b\} \cup A_n$ у порядку зростання, тобто нехай $\widetilde{A_n} = \{b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}\}$, де $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_{n+1} = b$. Тоді $\eta_{A_n} = \max_{i=0,\ldots,n} \Delta b_i$, де $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$. Покажемо, що $\eta_{A_n} < \varepsilon$, тобто, що $\Delta b_i < \varepsilon$ для кожного $i = 0, \ldots, n$. Зафіксуємо індекс $i = 0, \ldots, n$ і доведемо, що $\Delta b_i < \varepsilon$. Існує такий індекс $j = 0, \ldots, m-1$, що $x_j \leq b_i \leq x_{j+1}$. Якщо $j = m-1$, то $x_{m-1} \leq b_i \leq x_m = b$, а тому і $x_{m-1} \leq b_i < b_{i+1} \leq x_m = b$. Отже,

$$\Delta b_i = b_{i+1} - b_i \leq x_m - x_{m-1} = \Delta x_{m-1} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Якщо ж $j < m-1$, то на інтервалі (x_{j+1}, x_{j+2}) є точка $a_{k_{j+1}} = b_l$, для якої, зрозуміло, $b_i < b_l$. Тому $x_j \leq b_i < b_{i+1} \leq b_l < x_{j+2}$, адже $i < l$. Таким чином,

$$\Delta b_i = b_{i+1} - b_i \leq x_{j+2} - x_j = \Delta x_j + \Delta x_{j+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

що і завершує доведення. □

Теорема 8.2. *Нехай $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна підмножина інтервала (a, b), яка всюди щільна в ньому, причому $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $g \in C[a, b]$ і $g_n = L_{A_n} g$. Тоді $g_n \rightrightarrows g$ на $[a, b]$.*

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки неперервна на відрізку $X = [a, b]$ функція g буде і рівномірно неперервною, то існує таке $\delta > 0$, що $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ як тільки $|x' - x''| < \delta$ і x', $x'' \in X$. За лемою 8.1 існує такий номер N, що $\eta_{A_n} < \delta$, як тільки $n \geq N$.

Візьмемо $x \in X$ і $n \geq N$ і покажемо, що $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$. Нехай $\widetilde{A_n} = \{a, b\} \cup A_n = \{b_0, \ldots, b_{n+1}\}$, де $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_{n+1} = b$. Існує таке $i = 0, \ldots, n$, що $b_i \leq x \leq b_{i+1}$. На відрізку $[b_i, b_{i+1}]$ функція g_n буде лінійною, отже, число $g_n(x)$ лежить між числами $g_n(b_i) = g(b_i)$ та $g_n(b_{i+1}) = g(b_{i+1})$. Тому $|g_n(x) - g(b_i)| \leq |g(b_{i+1}) - g(b_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$, адже $b_{i+1} - b_i = \Delta b_i < \delta$. Але $|x - b_i| < \delta$, отже і $|g(x) - g(b_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тому

$$|g_n(x) - g(x)| \leq |g_n(x) - g(b_i)| + |g(x) - g(b_i)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Застосуємо тепер конструкцію з теореми 8.2 до апроксимації нарізно неперервних функцій. Для відображення $f : X \times Y \to Z$ ми покладаємо $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$.

Теорема 8.3. *Нехай $f \in S$ і $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна підмножина інтервалу $(0,1)$, яка всюди щільна в ньому і $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і $f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x)$ для $(x,y) \in [0,1]^2$. Тоді $f_n \in C$ для кожного n, $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$ для кожного $y \in [0,1]$, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ для кожного $x \in C_Y(f)$, де $Y = [0,1]$, і $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$. для кожного $x \in \widetilde{A} = A \cup \{0,1\}$.*

Доведення. Нехай $\widetilde{A_n} = A_n \cup \{0,1\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, де $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = 1$. На замкненому прямокутнику $Q_k = [x_k, x_{k+1}] \times [0,1]$, де $k = 0, 1, \ldots, n$, функція f_n задається формулою

$$f_n(x,y) = f(x_k, y) + \frac{f(x_{k+1}, y) - f(x_k, y)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k).$$

Оскільки функції f^{x_k} і $f^{x_{k+1}}$ неперервні, то звуження $f_n|_{Q_k}$ – це неперервна функція. Але $Q = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k$ і множини Q_k замкнені, тому і функція $f_n : Q \to \mathbb{R}$ неперервна.

Оскільки $(f_n)_y = L_{A_n} f_y$ і функції f_y неперервні, то $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на $[0,1]$ для кожного $y \in [0,1]$ на основі теореми 8.2.

Візьмемо $x \in C_Y(f)$ і покажемо, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$. Нехай $\varphi : [0,1] \to C_u[0,1]$, $\varphi(t) = f^t$ – асоційоване з f відображення. Як добре відомо ([9, твердження 2.1.2], див. також лему 7.4) $C_Y(f) = C(\varphi)$, тому $x \in C(\varphi)$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий δ-окіл U точки x у просторі $X = [0,1]$, що $\|\varphi(t) - \varphi(x)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$, як тільки $t \in U$. З леми 8.1 випливає, що можна знайти такий номер N, для якого при $n \geq N$ відстань між довільними двома сусідніми елементами множини $\widetilde{A}_n$ менша від δ.

Покажемо, що $|f_n^x(y) - f^x(y)| < \varepsilon$ для довільного $y \in Y = [0,1]$, як тільки $n \geq N$. Нехай $n \geq N$. Якщо $x \in \widetilde{A}_n$, то $f_n^x = f^x$ за побудовою і вказана нерівність очевидно виконується. Тому припустимо, що $x \notin \widetilde{A}_n$. Позначимо літерою a найбільший з елементів множини $\widetilde{A}_n$, які менші від x, а через b – найменший з елементів множини $\widetilde{A}_n$, які більші від x. Ясно, що такі елементи існують, бо $0 < x < 1$, а $\{0,1\} \subseteq \widetilde{A}_n$. Зрозуміло, що $a < x < b$, причому a і b – це сусідні елементи множини $\widetilde{A}_n$, отже, $b - a < \delta$. Раз так, то $x < b < a + \delta < x + \delta$ і $x - \delta < b - \delta < a < x$, тому $\{a, b\} \subseteq U$, а значить, $\|\varphi(a) - \varphi(x)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ і $\|\varphi(b) - \varphi(x)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Зафіксуємо якийсь елемент $y \in Y$. Функція $(f_n)_y$ лінійна на $[a,b]$. Крім того, $f_n^a = f^a = \varphi(a)$ і $f_n^b = f^b = \varphi(b)$. Тому

$$\begin{aligned} |f_n^x(y) - f^x(y)| &\leq |f_n^x(y) - f_n^a(y)| + |f_n^a(y) - f^x(y)| \leq |f_n^b(y) - f_n^a(y)| + \|\varphi(a) - \varphi(x)\|_\infty = \\ &= |f^b(y) - f^a(y)| + \|\varphi(a) - \varphi(x)\|_\infty \leq \|\varphi(b) - \varphi(a)\|_\infty + \|\varphi(x) - \varphi(a)\|_\infty \leq \\ &\leq 2\|\varphi(x) - \varphi(a)\|_\infty + \|\varphi(b) - \varphi(x)\|_\infty < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, ми з'ясували, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$.

Нарешті, нехай $x \in \widetilde{A}$. Тоді існує такий номер N_x, що $x \in \widetilde{A}_{N_x}$. В такому разі $x \in \widetilde{A}_n$ для всіх $n \geq N_x$, а тому за побудовою $f_n^x = f^x$ при $n \geq N_x$. Отже, $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$. □

Теорема 8.4. *Нехай $f \in S$ і проекція множини $D(f)$ на вісь абсцис чи ординат не більш, ніж зліченна. Тоді $f \in \overline{C}^s$.*

Доведення. Припустимо, що проекція $E_1 = pr_X(D(f))$ множини $D(f)$ на вісь абсцис не більш, ніж зліченна. Виберемо на інтервалі $(0,1)$ зліченну множину E_2, яка всюди щільна в ньому, і покладемо $A = (E_1 \cup E_2) \backslash \{0,1\}$. Множина A зліченна, отже, її можна подати у вигляді $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, де $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$. Оскільки $A \supseteq E_2$, то і A всюди щільна в $(0,1)$, причому $A \subseteq (0,1)$. Далі нехай $\widetilde{A} = A \cup \{0,1\}$. Ця множина вже містить і E_1. Як і раніше, нехай $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і $X = Y = [0,1]$.

Розглянемо послідовність функцій

$$f_n(x,y) = (L_{A_n} f_y)(x),$$

заданих на квадраті Q. Зауважимо, що за побудовою $E_1 = pr_X(D(f)) \subseteq \widetilde{A}$, тому $X \backslash \widetilde{A} \subseteq X \backslash pr_X(D(f)) = C_Y(f)$. За теоремою 8.3, $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$ і $f_n^x \xrightarrow{d} f^x$ для кожного $x \in \widetilde{A}$, а значить, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in \widetilde{A}$. Якщо ж $x \in X \backslash \widetilde{A}$, то $x \in C_Y(f)$ і тому $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y за тією ж теоремою 8.3. Крім того, $f_n \in C$ для кожного n. Таким чином, $f_n \in C$ і $f_n \to f$ в S, отже, $f \in \overline{C}^s$. □

З теореми 8.4 негайно випливає

Наслідок 8.5. *Нехай $f \in S$ і множина $D(f)$ не більш, ніж зліченна. Тоді $f \in \overline{C}^s$.*

Зрозуміло, що з наслідку 8.5 випливають теореми 5.1 і 5.2 і наслідок 6.4, які були доведені іншим методом.

9. Лінійна інтерполяція зі збереженням звуження.

Нехай F – замкнена підмножина відрізка $X = [a,b]$, для якої $\{a,b\} \subseteq F \neq X$ і $G = X \backslash F$. Оскільки $G = (a,b) \backslash F$, то G – це відкрита множина не тільки в X, але й в $\mathbb{R}$. Тому існує диз'юнктна сім'я інтервалів $I_m = (\alpha_m, \beta_m)$, де m пробігає множину M, для якої $M = \{1, \ldots, l\}$ для деякого $l \in \mathbb{N}$ або $M = \mathbb{N}$, така, що $G = \coprod_{m \in M} I_m$. При цьому всі кінці α_m і β_m інтервалів суміжності I_m множини F належать до F.

Кожній функції $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ поставимо у відповідність функцію $h = g_F : [a,b] \to \mathbb{R}$, яка визначається так:

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & x \in F, \\ g(\alpha_m) + \frac{g(\beta_m) - g(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}(x - \alpha_m), & x \in I_m. \end{cases}$$

Таким чином, $h|_F = g|_F$ і $h|_{\overline{I}_m}$ – це лінійна функція на $\overline{I}_m = [\alpha_m, \beta_m]$, для якої $h(\alpha_m) = g(\alpha_m)$ і $h(\beta_m) = g(\beta_m)$ для кожного $m \in M$.

Лема 9.1. *Нехай $g \in C[0,1]$. Тоді і $h = g_F \in C[a,b]$, причому $h|_F = g|_F$.*

Доведення. Нехай множина M скінченна, а саме, $M = \{1,\dots,l\}$. Всі множини $F, \overline{I}, \dots, \overline{I}_l$ замкнені і $X = [a,b] = F \cup \bigcup_{m=1}^{l} \overline{I}_m$, а звуження $h|_F = g|_F$ і $h|_{\overline{I}_m}$ неперервні. Тому функція h неперервна.

Припустимо, що $M = \mathbb{N}$. Оскільки всі звуження $g|_{I_m}$ на відкриті інтервали I_m неперервні, то g неперервна в кожній точці відкритої множини $G = \coprod_{m=1}^{\infty} I_m$.

Нехай $x_0 \in F = X \setminus G$. Покажемо, що функція h_n неперервна в точці x_0. Візьмемо $\varepsilon > 0$. З рівномірної неперервності функції g випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $|g(x') - g(x'')| < \varepsilon$, як тільки $|x' - x''| < \delta$ і $x', x'' \in X$. Оскільки $\beta_m - \alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$, то існує такий номер m_0, що $\beta_m - \alpha_m < \frac{\delta}{2}$, як тільки $m > m_0$. Для замкненої множини $F_0 = F \cup \bigcup\limits_{m=1}^{m_0} \overline{I}_m$ звуження $h|_{F_0}$ неперервне, бо всі звуження $h|_F$ і $h|_{\overline{I}_m}$ неперервні. Тому існує таке δ_0, що $0 < \delta_0 < \frac{\delta}{2}$ і $|h_n(x) - h_n(x_0)| < \varepsilon$, як тільки $x \in F_0$ і $|x - x_0| < \delta_0$.

Припустимо, що $|x - x_0| < \delta_0$ і $x \in X \setminus F_0$. Тоді існує таке $m > m_0$, що $\alpha_m < x < \beta_m$. При цьому

$$\beta_m = x + \beta_m - x < x + \beta_m - \alpha_m < x + \frac{\delta}{2} < x_0 + \delta_0 + \frac{\delta}{2} < x_0 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = x_0 + \delta,$$
$$\alpha_m = x - (x - \alpha_m) > x - (\beta_m - \alpha_m) > x - \frac{\delta}{2} > x_0 - \delta_0 - \frac{\delta}{2} > x_0 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = x_0 - \delta.$$

Отже, кінці α_m і β_m інтервалу I_m лежать в околі $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0. Тому $|\alpha_m - x_0| < \delta$ і $|\beta_m - x_0| < \delta$, при цьому $\{\alpha_m, \beta_m\} \subseteq F$. Так само $x_0 \in F$. Отже, за побудовою $h(\alpha_m) = g(\alpha_m)$, $h(\beta_m) = g(\beta_m)$ і $h(x_0) = g(x_0)$. Тому

$$|h(\alpha_m) - h(x_0)| = |g(\alpha_m) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{і} \quad |h(\beta_m) - h(x_0)| = |g(\beta_m) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

На відрізку $\overline{I}_m$ функція h лінійна і $\alpha_m < x < \beta_m$. Отже, число $h(x)$ лежить між числами $h(\alpha_m)$ і $h(\beta_m)$. В такому разі і для нього виконується нерівність $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. Таким чином, якщо $x \in X$ і $|x - x_0| < \delta_0$, то $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$, що і дає нам неперервність функції h у точці x_0.

□

Зауважимо, що серед довжин $|I_m| = \beta_m - \alpha_m$ інтервалів $I_m = (\alpha_m, \beta_m)$ завжди знайдеться найбільша, адже $|I_m| \to 0$ при $M = \mathbb{N}$. Введемо в розгляд число $\lambda_F = \max\limits_{m \in M} |I_m|$. Легко перевірити, що коли A – це скінченна підмножина інтервалу (a,b), то $\eta_A = \lambda_{\widetilde{A}}$, де $\widetilde{A} = A \cup \{a,b\}$.

Лема 9.2. *Нехай F – замкнена підмножина відрізка $X = [a,b]$, для якої $\{a,b\} \subseteq F \neq X$, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – щільна в доповненні $G = X \setminus F$ підмножина G, для якої $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $A_n = \{a_1,\dots,a_n\}$ і $F_n = F \cup A_n$. Тоді $\lambda_{F_n} \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доведення. Нехай $G = \coprod_{m \in M} I_m$, де $I_m = (\alpha_m, \beta_m)$. Зафіксуємо якесь $m \in M$. Розглянемо на інтервалі I_m скінченну множину $A_{m,n} = I_m \cap A_n$ і для неї числа $\eta_{m,n} = \eta_{[\alpha_m,\beta_m],Am,n}$. Доведемо, що $\eta_{m,n} \to 0$ при $n \to \infty$. Зрозуміло, що множина $B_m = I_m \cap A$ щільна в інтервалі I_m і нескінченна. Нехай $B_m = \{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, де $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ і $B_{m,k} = \{a_{n_1},\dots,a_{n_k}\}$. За лемою 8.1 маємо, що $\eta_{B_{m,k}} = \eta_{[\alpha_m,\beta_m],B_{m,k}} \to 0$ при $k \to \infty$. Але

$$\eta_{m,n} = \eta_{B_{m,k}} \quad \text{при} \quad n_k \leq n < n_{k+1},$$

адже, $A_{m,n} = B_{m,k}$ при $n_k \leq n < n_{k+1}$. Тепер зрозуміло, що і $\eta_{m,n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Далі зауважимо, що $\lambda_{F_n} = \max\limits_{m \in M} \eta_{m,n}$.Справді, нехай $\mathcal{I}_n$ – система всіх інтервалів суміжності замкненої множини F_n на відрізку $[a,b]$ і $\mathcal{I}_{m,n}$ – система всіх інтервалів суміжності скінченної множини $\widetilde{A}_{m,n} = A_{m,n} \cup \{\alpha_m, \beta_m\}$ на відрізку $[\alpha_m, \beta_m]$. Зрозуміло, що $\mathcal{I}_n = \coprod\limits_{m \in M} \mathcal{I}_{m,n}$. Тому

$$\lambda_{F_n} = \max\{|I| : I \in \mathcal{I}_n\} = \max_{m \in M} \max\{|I| : I \in \mathcal{I}_{m,n}\} = \max_{m \in M} \eta_{m,n}.$$

Доведемо тепер, що $\lambda_{F_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо множина M скінченна, то це негайно випливає з співвідношення $\lambda_{F_n} = \max\limits_{m \in M} \eta_{m,n}$ і того, що $\eta_{m,n} \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $m \in M$.

Нехай $M = \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. Зауважимо, що $\eta_{m,n} \leq |I_m|$ для довільних m і n. Оскільки $|I_m| \to 0$ при $m \to \infty$, то існує такий номер m_0, що $|I_m| < \varepsilon$ при $m > m_0$. Далі, оскільки $\eta_{m,n} \to 0$ при $n \to \infty$ для кожного $m = 1, \ldots, m_0$, то існує такий номер N, що $\eta_{m,n} < \varepsilon$ при $n \geq N$ для кожного $m = 1, \ldots, m_0$. Тому

$$\lambda_{F_n} = \max_{m \in \mathbb{N}} \eta_{m,n} = \max\{\max_{m \leq m_0} \eta_{m,n}, \max_{m > m_0} \eta_{m,n}\} < \varepsilon$$

при $n \geq N$, адже $\max\limits_{m \leq m_0} \eta_{m,n} < \varepsilon$ при $n \geq N$ і $\max\limits_{m > m_0} \eta_{m,n} \leq \max\limits_{m > m_0} |I_m| < \varepsilon$ для всіх n.

□

Теорема 9.3. *Нехай $g \in C[a,b]$, F – замкнена підмножина відрізка $X = [a,b]$, для якої $\{a,b\} \subseteq F \neq X$, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – щільна в доповненні $G = X \setminus F$ підмножина G, для якої $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і $F_n = F \cup A_n$. Тоді функції $h_n = g_{F_n}$ неперервні, $h_n|_F = g|_F$ і $h_n \rightrightarrows g$ на X.*

Доведення. Неперервність функцій h_n випливає з леми 9.1, а рівність $h_n|_F = g|_F$ з побудови, більше того, навіть $h_n|_{F_n} = g|_{F_n}$. Доведемо, що $h_n \rightrightarrows g$ на X.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. З рівномірної неперервності функцій g на відрізку $X = [a,b]$ випиває, що існує таке $\delta > 0$, що $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$, як тільки x', $x'' \in X$ і $|x' - x''| < \delta$. За лемою 9.2 існує такий номер N, що $\lambda_{F_n} < \delta$, як тільки $n \geq N$.

Нехай $n \geq N$ і $x \in X$. Якщо $x \in F_n$, то $h_n(x) = g(x)$ і $|h_n(x) - g(x)| = 0 < \varepsilon$. Нехай $x \in G_n = X \setminus F_n$, а $\mathcal{I}_n$ – система усіх складових інтервалів відкритої множини G_n. Тоді існує такий інтервал $I = (\alpha, \beta) \in \mathcal{I}_n$, що $\alpha < x < \beta$. При цьому $\{\alpha, \beta\} \subseteq F_n$ і $I = \beta - \alpha \leq \lambda_{F_n} < \delta$. В такому разі $|h_n(\beta) - h_n(\alpha)| = |g(\beta) - g(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Але функція h_n на відрізку $[\alpha, \beta]$ лінійна. Тому

$$|h_n(x) - g(\alpha)| = |h_n(x) - h_n(\alpha)| \leq |h_n(\beta) - h_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Крім того, $|x - \alpha| < \delta$, отже, і $|g(x) - g(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тому

$$|h_n(x) - g(x)| \leq |h_n(x) - g(\alpha)| + |g(x) - g(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином, $|h_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ при $n \geq N$ для довільного $x \in X$, а тому, $h_n(x) \rightrightarrows g(x)$ на X. □

Застосуємо тепер теорему 9.3 для отримання ще одного результату про пошарово рівномірну апроксимацію нарізно неперервних функцій $f : Q \to \mathbb{R}$. Для замкненої множини F на $[0,1]$ такої, що $\{0,1\} \subseteq F \neq [0,1]$ і функції $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ покладемо $L_F g = g_F$.

Теорема 9.4. *Нехай $f \in S$, $X = Y = [0,1]$, $E = pr_X(D(f))$, звуження $f|_{E\times Y}$ неперервне, $F = \overline{E} \cup \{0,1\}$, $G = X \setminus F$, $A = \{a_n : N \in \mathbb{N}\}$ – зліченна підмножина G, яка щільна в G, і $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $F_n = F \cup A_n$ і*

$$f_n(x,y) = (L_{F_n} f_y)(x),$$

якщо $(x,y) \in Q$. Тоді $f_n \in C$, $f_n|_{F\times Y} = f|_{F\times Y}$ і $f_n \to f$ в S, зокрема, $f \in \overline{C}^s$.

Доведення. Рівність $f_n|_{F\times Y} = f|_{F\times Y}$ випливає з означення функції f_n, для яких навіть виконується рівність $f_n|_{F_n\times Y} = f|_{F_n\times Y}$.

Доведемо, що звуження $f|_{\overline{E}\times Y}$ неперервне.

Нехай $x_0 \in \overline{E}$ і $y_0 \in Y$. Якщо $x_0 \notin E$, то $\{x_0\} \times Y \subseteq C(f)$, отже, f неперервна в точці $p_0 = (x_0, y_0)$, а значить, і звуження $f|_{\overline{E}\times Y}$ неперервне в цій точці.

Нехай тепер $x_0 \in E$ і $\varepsilon > 0$. За умовою звуження $f|_{E\times Y}$ неперервне в точці p_0, отже, існують такі відкриті околи U і V точок x_0 і y_0 в X і Y, що

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon \quad \text{на} \quad (U \cap E) \times V.$$

Нехай $x \in U \cap \overline{E}$ і $y \in V$. Існує послідовність точок $x_j \in U \cap E$, така, що $x_j \to x$. Оскільки функція f_y неперервна, то $f(x_j, y)] = f_y(x_j) \to f_y(x) = f(x,y)$. Отже,

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = \lim_{j\to\infty} |f(x_j,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon,$$

бо $|f(x_j,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$ для кожного j. Це і дає нам неперервність $f|_{\overline{E}\times Y}$ у точці p_0.

Покажемо, що і звуження $f|_{F\times Y}$ неперервне. Справді, $F = \{0\} \cup \overline{E} \cup \{1\}$, отже, $F \times Y = (\{0\} \times Y) \cup (E \times Y) \cup (\{1\} \times Y)$. При цьому множини $\{0\} \times Y$, $\overline{E} \times Y$ і $\{1\} \times Y$ замкнені і звуження $f|_{\{0\}\times Y}$, $f|_{\overline{E}\times Y}$ і $f|_{\{1\}\times Y}$ неперервні, адже функція f нарізно неперервна. Тому і звуження $f|_{F\times Y}$ неперервне.

Зафіксуємо n і доведемо, що функція f_n неперервна. Неперервність звуження $f|_{[\alpha_m,\beta_m]\times Y}$ випливає з теореми 8.3, яка, звичайно, справедлива не тільки для квадрата $Q = [0,1]^2$, а й для довільного прямокутника $[a,b] \times [c,d]$. Звідси негайно отримуємо, що f_n неперервна в кожній точці відкритої множини $G \times Y$. Якщо множина M скінченна, то на основі цього отримуємо і неперервність f_n на Q, адже $Q = (F \times Y) \cup \bigcup_{m\in M} ([\alpha_m, \beta_m] \times\ Y)$, доданки в цьому скінченному об'єднанні замкнені і звуження f_n на кожний з них неперервне.

Тому припустимо, що $M = \mathbb{N}$, візьмемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in F \times Y$ і доведемо, що h_n неперервна в точці p_0. Нехай $\varepsilon > 0$. Скориставшись неперервністю звуження $f|_{F\times Y}$ знайдемо таке $\delta > 0$, що $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$, як тільки $(x,y) \in F \times Y$, $|x - x_0| < \delta$ і $|y - y_0| < \delta$. Оскільки $\beta_m - \alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$ і множина A_n скінченна, то існує такий номер m_0, що $\beta_m - \alpha_m < \frac{\delta}{2}$ і $A_{m,n} = (\alpha_m, \beta_m) \cap A_n = \varnothing$ при $m > m_0$. Як і в доведенні леми 9.1, розглянемо замкнену множину $F_0 = F \cup \bigcup_{m=1}^{m_0}[\alpha_m, \beta_m]$. Звуження $f_n|_{F_0\times Y}$ неперервне, бо всі звуження $f|_{F\times Y}$ і $f|_{[\alpha_m,\beta_m]\times Y}$ при $m = 1, \dots, m_0$ неперервні. Тому існує таке число δ_0, що $0 < \delta_0 < \frac{\delta}{2}$ і $|f_n(x, y) - f_n(x_0, y_0)| < \varepsilon$, як тільки $(x, y) \in F_0 \times Y$, $|x - x_0| < \delta_0$ і $|y - y_0| < \delta_0$. Нехай $x \in X\backslash F_0$, $y \in Y$, $|x - x_0| < \delta_0$ і $|y - y_0| < \delta_0$. Оскільки $x \in X$ і $x \notin F_0$, то існує такий номер $m > m_0$, що $\alpha_m < x < \beta_m$. Як і в доведенні леми 9.1, легко перевіряється, що $x_0 - \delta < \alpha_m < \beta_m < x_0 + \delta$, звідки випливає, що $|\alpha_m - x_0| < \delta$ і $|\beta_m - x_0| < \delta$. За побудовою $f_n(\alpha_m, y) = f(\alpha_m, y)$ і $f_n(\beta_m, y) = f(\beta_m, y)$, $f_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$, адже $\{\alpha_m, \beta_m, x_0\} \subseteq F$. Оскільки при цьому $|y - y_0| < \delta_0 < \delta$, то

$$|f_n(\alpha_m, y) - f_n(x_0, y_0)| = |f(\alpha_m, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{і}$$
$$|f_n(\beta_m, y) - f_n(x_0, y_0)| = |f(\beta_m, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Функція $(f_n)_y$ лінійна на відрізу $[\alpha_m, \beta_m]$, адже $A_{m,n} = \varnothing$. Тому число $f_n(x, y)$ лежить між числами $f_n(\alpha_m, y)$ і $f_n(\beta_m, y)$, отже, і $|f_n(x, y) - f_n(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Ми показали, що $|f_n(x, y) - f_n(x_0, y_0)| < \varepsilon$, як тільки $|x - x_0| < \delta_0$, $|y - y_0| < \delta_0$ і $(x, y) \in Q$. Це і дає нам неперервність функції f_n у точці p_0.

Оскільки для кожного $y \in Y$ функція f_y неперервна і $(f_n)_y = L_{F_n} f_y$, то $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X за теоремою 9.3. Якщо $x \in F$, то $f_n^x = f^x$ для кожного n за побудовою, отже, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y. Припустимо, що $x \in X\backslash F$. Тоді існує такий номер m, що $\alpha_m < x < \beta_m$. Оскільки $D(f) \subseteq F \times Y$, то звуження $f|_{(\alpha_m,\beta_m)\times Y}$ неперервне, звідки випливає, що $x \in C_Y(f)$. Ясно, що тоді і $x \in C_Y(g)$, де $g = f|_{[\alpha_m,\beta_m]\times Y}$. Для функцій $h_n = f_n|_{[\alpha_m,\beta_m]\times Y}$ маємо $h_n = (L_{A_{m,n}} g_y)(x)$, при цьому $x \in C_Y(g)$. Тому $h_n^x \rightrightarrows g^x$ на Y за теоремою 8.3. Але $h_n^x = f_n^x$, а $g^x = f^x$. Отже, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y. □

10. Апроксимація нарізно неперервних функцій з дискретною проекцією множини точок розриву.

Нагадаємо, що підмножина A топологічного простору X називається *дискретною*, якщо для кожної точки $x \in A$ існує такий її окіл U в X, що $U \cap A = \{x\}$.

Теорема 10.1. *Нехай X – T_1 -простір, Y і Z – топологічні простори і $f : X \times Y \to Z$ – нарізно неперервне відображення, причому множина $A = pr_X(D(f))$ дискретна в просторі X. Тоді звуження $g = f|_{\overline{A}\times Y}$ сукупно неперервне.*

Доведення. Розглянемо точку $p_0 = (x_0, y_0) \in \overline{A} \times Y$ і покажемо, що відображення g неперервне в цій точці.

Нехай $x_0 \in A$. Тоді існує такий відкритий окіл U точки x_0 в X, якщо $U \cap A = \{x_0\}$. Покажемо, що $U \cap (\overline{A}\backslash A) = \varnothing$. Нехай це не так. Тоді існує точка $b \in U \cap (\overline{A}\backslash A)$. Множина $\dot{U} = U\backslash\{x_0\}$ відкрита в T_1-просторі X і $b \in \dot{U}$, адже $b \in U$ і $b \neq x_0$, бо $b \notin A$, отже, $\dot{U}$ є околом точки b. Крім того, $b \in \overline{A}$, отже, існує точка $a \in A \cap \dot{U}$. Тоді $a \in A \cap U$ і $a \neq x_0$, що неможливо, бо $A \cap U = \{x_0\}$. Таким чином, $U \cap (\overline{A}\backslash A) = \varnothing$, звідки випливає, що

$$U \cap \overline{A} = (U \cap A) \cup (U \cap (\overline{A}\backslash A)) = \{x_0\} \cup \varnothing = \{x_0\}.$$

Множина $(U\cap\overline{A})\times Y$ відкрита в підпросторі $\overline{A}\times Y$ і $g|_{(U\cap\overline{A})\times Y} = f|_{\{x_0\}\times Y}$ – це неперервна функція, адже функція $f^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$ неперервна. Тому g неперервна в кожній точці множини $\{x_0\} \times Y$, зокрема, в точці p_0.

Нехай $x_0 \in \overline{A}\backslash A$. Оскільки $A = pr_X(D(f))$ і $x_0 \notin A$, то $\{x_0\} \times Y \subseteq C(f)$, отже, в точці p_0 неперервна функція f, а значить і g. □

Наслідок 10.2. *Нехай $f \in S$ і одна з проекцій множини $D(f)$ на вісь абсцис чи ординат дискретна. Тоді $f \in \overline{C}^s$.*

Доведення. Припустимо, що множина $A = pr_X(D(f))$ дискретна. Тоді за теоремою 10.1 звуження $f|_{\overline{A}\times[0,1]}$ неперервне. В такому разі $f \in \overline{C}^s$ за теоремою 9.4. □

Зауважимо, що дискретна множина A у топологічному просторі X з другою аксіомою зліченності обов'язково не більш, ніж зліченна. Справді, нехай $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ – база в X. Для кожної точки a з A існує такий окіл U_a, що $U_a \cap A = \{a\}$, а для околу U_a існує такий елемент $B(a) \in \mathcal{B}$, що $a \in B(a) \subseteq U_a$. Оскільки $\{a\} \subseteq B(a) \cap A \subseteq U_a \cap A = \{a\}$, то $B(a) \cap A = \{a\}$. Тому $B(a') \neq B(a'')$ при $a' \neq a''$, адже якби $B(a') = B(a'')$, то і $\{a'\} = B(a') \cap A = B(a'') \cap A = \{a''\}$, отже, $a' = a''$. Таким чином, відображення $a \mapsto B(a) : A \to \mathcal{B}$ – ін'єктивне. Оскільки система $\mathcal{B}$ не більш, ніж зліченна, то такою буде і множина A.

Тому наслідок 10.2 випливає і з теореми 8.4, адже відрізок $[0,1]$ задовольняє другу аксіому зліченності.

ЛІТЕРАТУРА

1. V. Maslyuchenko, H. Voloshyn, *Closure of the set of polynomials in the space of separately continuous functions*, Int. conf. dedicated to 120th anniversary of S.Banach. Abstracts of Reports. Lviv, (17-21 September, 2012), P.97.

2. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Про секвенціальне замикання поліномів у просторі нарізно неперервних функцій*, Всеукр. наук. конф. "Алгебра, топологія, аналіз, стохастика" (АТАС - 2012), Микуличин, (20-23 вересня 2012). Тези доповідей, Івано-Франківськ (2012), 3–5.

3. Г.А. Волошин, В.К.Маслюченко, *Властивості секвенціального замикання простору поліномів у просторі нарізно неперервних функцій*, Міжнар. наук.-прак. конф. "Математика. Інформаційні технології. Освіта", (3 - 5 червня 2013), Тези доповідей, Луцьк: Світязь (2013), 16—18.

4. В.К. Маслюченко, *Про наближення нарізно неперервних функцій*, Міжнар. мат. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження акад. А.М.Самойленка, (23–30 червня 2013), Севастополь, Тези доповідей. Київ: Інститут математики НАН України (2013), 249—250.

5. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Топологізація простору нарізно неперервних функцій*, Карп. матем. публ. (в друці).

6. R. Baire, *Sur les fonctions des variables réelles*, Ann. Mat. Pura Appl., **3**:1 (1899), 1–123.

7. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, М.: Мир (1986), 752 с.

8. H. Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions*, Bull. Sci. Math. **22** (1898), 278–287.

9. В.К. Маслюченко, *Нарізно неперервні відображення і простори Кете*, Дис.... докт. фіз.-мат. наук. – Чернівці (1999), 345 с.

10. О.В. Собчук, *Берівська класифікація нарізно неперервних відображень та дискретні обернені задачі*, Дис....канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці (1996), 82 с.

11. О.О. Карлова, *Берівська та лебеґівська класифікації векторнозначних і многозначних відображень*, Дис....канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці (2006), 137 с.

12. O. Karlova, V. Maslyuchenko, V. Mykhaylyuk, *Equiconnected spaces and Baire classification of separately continuous functions and their analogs*, Cent. Eur. J. Math. **10**:3 (2012), 1042–1053.

13. M. Tsuji, *On Baire's theorem concerning a function $f(x, y)$ which is continuous with respect to each variable x and y*, J. Math. Soc. Japan. **2**:3-4 (1951), 210–212.

14. Г.А. Власюк, В.К. Маслюченко, *Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції*, Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута (2007), 52–59.

15. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, *Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π-періодичних відносно другої змінної*, Карп. матем. публ. **2**:1 (2010), 4–14.

16. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко, *Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій*, Карп. матем. публ. **2**:2 (2010), 10–20.

17. Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.Н. Нестеренко, *Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій*, Карп. матем. публ. **4**:1 (2012), 23–27.

18. Г.А. Волошин, *Нарізно неперервні відображення і теорія наближень*, дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці (2012), 138 с.

19. Г.А. Волошин, *Пошарове наближення нарізно неперервних функцій за допомогою многочленів Бернштейна від багатьох змінних*, Бук. мат. журн. **1**:1-2 (2013), 26–29.

20. Н. Бурбаки, *Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов*, М.: Наука (1975), 408 с.

21. В.К. Маслюченко, *Перші типи топологічних векторних просторів*, Чернівці: Рута (2002), 72 с.

22. I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacif. J. Math. **51**:2 (1974), 515–531.

23. Y. Benyamini, I. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. V.1.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1999), 488 p.

Надійшло 1 серпня 2013

Після переробки 15 вересня 2013