АЛГЕБРА СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ПОЛІДИСКУ В ℓ_1

Андрій ЗАГОРОДНЮК [1,2], *Ірина ЧЕРНЕГА* [2]

[1]Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ 76000
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 14 червня 2007 р.

Досліджується алгебра аналітичних функцій на полідиску в просторі ℓ_1, які є симетричними відносно перестановок базових елементів. Описано множину максимальних ідеалів цієї алгебри.

Нехай X, Y — банахові простори над полем комплексних чисел. Відображення $P : X \to Y$ називається *n-однорідним поліномом*, якщо існує симетричне n-лінійне відображення $A : X^n \to Y$ таке, що для всіх $x \in X$, $P(x) = A(x, \ldots, x)$.

Поліном степеня n на X є скінченною сумою k-однорідних поліномів, $k = 0, \ldots, n$. Через $\mathcal{P}(^n\ell_1)$ будемо позначати простір n-однорідних неперервних поліномів з ℓ_1 в $\mathbb{C}$ і через $\mathcal{P}(\ell_1)$ — простір всіх неперервних поліномів.

Відображення $f : \Omega \to Y$, де Ω — відкрита підмножина в X, називається *аналітичним*, якщо для кожного $x_0 \in \Omega$ існує окіл точки x_0, $V_{x_0} \subset \Omega$ такий, що для кожного $x \in V_{x_0}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x),$$

де f_k — неперервні k-однорідні поліноми і ряд збігається рівномірно на V_{x_0}.

УДК 517.98; MSC 2000: 46G20, 46G25.

Нехай X — комплексний банахів простір і G — напівгрупа ізометричних операторів на X. Функція f на X називається *симетричною відносно G* (або, скорочено, *G-симетричною*), якщо для кожного $\sigma \in G$

$$f(\sigma(x)) = f(x).$$

У даній роботі ми розглядаємо випадок, коли $X = \ell_p$, $1 \le p < \infty$ і $G = \mathcal{G}$ — група підстановок на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Тут $\sigma \in \mathcal{G}$ діє на ℓ_p наступним чином:

$$\sigma\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_{\sigma(i)},$$

де $e_1, e_2, \dots$ — стандартна база в ℓ_p. В літературі $\mathcal{G}$-симетричні функції на ℓ_p називаються *симетричними.*

Симетричні функції на $\mathbb{C}^n$ або $\mathbb{R}^n$ є стандартним об'єктом класичної алгебри (див., наприклад, [6]). Симетричні поліноми на просторах ℓ_p, $1 \le p < \infty$ вперше досліджувались Німеровським і Семьоновим в [5].

У [4] доведено, що поліноми

$$F_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k,$$

$k = \langle p\rangle, \langle p\rangle + 1, \dots$, де $\langle p\rangle$ — найменше ціле, яке не менше, ніж p, утворюють алгебричну базу в $\mathcal{P}_s(\ell_p)$ — просторі всіх симетричних поліномів на ℓ_p. Тобто, поліноми F_k є алгебрично незалежними і їх алгебрична комбінація збігається з усім простором $\mathcal{P}_s(\ell_p)$. Поліноми F_k в літературі часто називають *елементарними симетричними поліномами.*

Для банахової алгебри X через $M(X)$ будемо позначати множину всіх комплексних гомоморфізмів. Множина $M(X)$ називається спектром алгебри X. Комплексні гомоморфізми також називають мультиплікативними лінійними функціоналами або характерами алгебри X.

Позначимо через $H_b(\ell_1)$ алгебру цілих аналітичних функцій з ℓ_1 в $\mathbb{C}$, що є обмеженими на обмежених множинах і через $M_b(\ell_1)$ — спектр даної алгебри.

Нехай $x, y \in \ell_1$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$. В [1] визначено операцію змішування $x \bullet y \in \ell_1$ наступним чином:

$$x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots).$$

Ця операція визначає *симетричний зсув* для симетричних функцій

$$f(x) \mapsto f(x \bullet y).$$

Зауважимо, що $F_k(x \bullet y) = F_k(x) + F_k(y)$ для довільних $x, y \in \ell_1$, $k \in \mathbb{N}$.

Нехай

$$\mathbb{D} = \Big\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in \ell_1 \colon \ \sup_i |x_i| < 1 \Big\}.$$

Легко бачити, що $\mathbb{D}$ — відкрита необмежена множина. Ми будемо називати $\mathbb{D}$ полідиском в ℓ_1.

Лема 1. *Нехай $x \in \mathbb{D}$. Тоді існують $y_1, \ldots, y_m$, $\|y_k\| \le 1$, $k = 1, \ldots, m$, такі, що $x = y_1 \bullet \cdots \bullet y_m$.*

Доведення. Нехай $\|x\| = j + r$, $j \in \mathbb{N}$, $0 \le r < 1$. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|$ — абсолютно збіжний ряд, то існує номер m такий, що $\sum\limits_{k=m}^{\infty} |x_k| \le r$.

Покладемо $y_k = e_k x_k$, $k = 1, \ldots, m-1$, $y_m = \sum\limits_{k=m}^{\infty} x_k e_k$. Очевидно, що $\|y_k\| = |x_k| < 1$ при $k < m$ і $\|y_m\| \le r < 1$ та $x = y_1 \bullet \cdots \bullet y_m$.

Лему доведено.

Лема 2. *Для довільного елемента $x \in \mathbb{D}$ числова послідовність $\mathcal{F}(x) = (F_k(x))_{k=1}^{\infty}$ належить до простору послідовностей ℓ_1.*

Доведення. Нехай $x \in \ell_1$, $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < 1$. Оцінимо норму послідовності $\mathcal{F}(x) = (F_k(x))_{k=1}^{\infty}$:

$$\|\mathcal{F}(x)\| = \sum_{k=1}^{\infty} |F_k(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k \Big| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^k \le \sum_{k=1}^{\infty} \big(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \|x\|^k = \frac{1}{1 - \|x\|} < \infty.$$

Якщо x — довільний елемент з $\mathbb{D}$, то $x = y_1 \bullet \cdots \bullet y_m$, де $\|y_k\| < 1$, $k = 1 \ldots, m$, і

$$\|\mathcal{F}(x)\| = \Big\| \sum_{k=1}^{m} \mathcal{F}(y_k) \Big\| \le \sum_{k=1}^{m} \|\mathcal{F}(y_k)\| < \infty,$$

що й потрібно було довести.

Зауважимо, що $\mathcal{F}$ є аналітичним відображенням з $\mathbb{D}$ в ℓ_1, оскільки $\mathcal{F}(x)$ подається у вигляді збіжного степеневого ряду $\mathcal{F}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k(x)$ для кожного $x \in \mathbb{D}$ і $\mathcal{F}$ є обмеженим в околі нуля (див. [3, с. 58]).

Твердження 1. *Якщо $g_1 \neq g_2$, де $g_1, g_2 \in H_b(\ell_1)$, то $g_1(\mathcal{F}(x)) \neq g_2(\mathcal{F}(x))$ для довільного $x \in \mathbb{D}$.*

Доведення. Досить показати, що $g \equiv 0$, якщо $g(\mathcal{F}(x)) = 0$, коли $g \in H_b(\ell_1)$. Нехай $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Q^n(x)$, де $Q^n \in \mathcal{P}(^n\ell_1)$, і

$$Q^n\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_i e_i\Big) = \sum_{k_1+\ldots+k_n=n} \sum_{i_1<\ldots<i_n} q_{n,i_1\ldots i_n} x_{i_1}^{k_1} \ldots x_{i_n}^{k_n}.$$

З іншого боку, для довільних $x \in \mathbb{D}$, $t \in \mathbb{C}$ таких, що $tx \in \mathbb{D}$

$$g(\mathcal{F}(tx)) = \sum_{n=1}^{\infty} Q^n(\mathcal{F}(tx)) = \sum_{j=1}^{\infty} t^j r_j(x).$$

Якщо $g(\mathcal{F}(x)) = 0$ для довільного $x \in \mathbb{D}$, то $r_m(x) = 0$ для довільного m. Обчислимо $r_m(x)$:

$$r_m(x) = \sum_{\substack{k<m \\ k_1 i_1+\ldots k_n i_n=m}} q_{k,i_1\ldots i_n} F_{i_1}^{k_1}(x) \ldots F_{i_n}^{k_n}(x). \tag{1}$$

Зрозуміло, що сума у правій частині формули (1) є скінченною. Оскільки $F_1, \ldots, F_n$ — алгебрично незалежні, то в формулі (1) $q_{k,i_1\ldots i_n} = 0$ для довільних $k < m$, $k_1 i_1 + \ldots + k_n i_n = m$. Оскільки це вірно для довільного m, то $Q^n \equiv 0$ для $n \in \mathbb{N}$. Отже, $g \equiv 0$ на ℓ_1.

Твердження доведено.

Позначимо через $H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$ алгебру симетричних аналітичних функцій вигляду $f(x) = g(\mathcal{F}(x))$, де $g \in H_b(\ell_1)$, $x \in \mathbb{D}$.

Очевидно, що для кожного $g \in H_b(\ell_1)$, $g(\mathcal{F}(x))$ є аналітичною симетричою функцією на $\mathbb{D}$ (як композиція симетричних аналітичних відображень). Тому, враховуючи твердження 1, відповідність $\Psi : f \mapsto g$ є біекцією з $H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$ на $H_b(\ell_1)$. Отже, на $H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$ можна задати топологію так, щоб біекція Ψ була ізометрією. А саме, визначимо на $H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$ найслабшу топологію, в якій неперервні наступні напівнорми:

$$q_r(f) := \|(\Psi(f))\|_r = \|g\|_r = \sup_{\|x\|_{\ell_1} \leq r} |g(x)|, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Зауважимо також, що Ψ є гомоморфізмом алгебр. Таким чином, доведено наступне твердження.

Твердження 2. *Алгебри $H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$, $H_b(\ell_1)$ — ізометрично ізоморфні.*

Наслідок 1. $M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})) = M(H_b(\ell_1))$. *Зокрема,* $\ell_1 \subset M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$, *тобто для довільного* $z \in \ell_1$ *визначено гомоморфізм* $\psi_z \in M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$, *такий що* $\psi_z(f) = \Psi(f)(z)$.

Наступний приклад показує, що існує характер з $M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$, який не породжується значенням в жодній точці полідиску $\mathbb{D}$.

Приклад. Розглянемо послідовність дійсних чисел (a_n), $0 \le |a_n| < 1$ таку, що $(a_n) \in \ell_2$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ умовно збігається до деякого числа C, але не збігається абсолютно. Хоча $(a_n) \notin \ell_1$, але значення в (a_n) визначені для всіх симетричних поліномів на ℓ_1. Зокрема, $F_1((a_n)) = C$, $F_k((a_n)) = \sum a_n^k < \infty$ і $\{F_k((a_n))\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Тому (a_n) задає характер на $H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$ за формулою $\varphi(f) = \Psi(f)(\mathcal{F}((a_n)))$.

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, то існує підстановка π на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ така, що $F_1((a_{\pi(n)})) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = C' \ne C$. З іншого боку, оскільки $(a_n) \subset \ell_2$, то $F_k((a_{\pi(n)})) = F_k((a_n))$.

Позначимо через φ_π гомоморфізм "значення в $(a_{\pi(n)})$." Припустимо, що існують точки $x, y \in \mathbb{D}$ такі, що $\varphi(f) = f(x)$ і $\varphi_\pi(f) = f(y)$ для кожної функції $f \in H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$. Оскільки $\varphi(F_k) = \varphi_\pi(F_k)$, $k \ge 2$, то за наслідком 1.4 з [2] точки x і y породжують той самий гомоморфізм. Але це не так, бо $\varphi(F_1) \ne \varphi_\pi(F_1)$. Отже, принаймні один з гомоморфізмів φ і φ_π не породжується значенням в деякій точці полідиску $\mathbb{D}$.

Також значення в (a_n) є характером на $\mathcal{P}_s(\ell_1)$, але ми не знаємо, чи цей характер неперервний в топології рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Нагадаємо, що у роботі [7] описано множину максимальних ідеалів $M_b(X)$ алгебри $H_b(X)$ для довільного банахового простору X наступним чином.

Теорема A. [7] *Існує послідовність спряжених банахових просторів* $(E_k)_{k=1}^{\infty}$, $E_1 = X''$, *і вкладень* $\delta^{(k)} : E_k \to M_b(X)$ *таких, що кожен характер* $\varphi \in M_b(X)$ *зображується у вигляді*

$$\varphi = \mathop{\ast}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k), \quad u_k \in E_k.$$

Простори E_k мають таку властивість, що $\widehat{P}(u_k) := \delta^{(k)}(u_k)(P) = 0$ для всіх однорідних поліномів P, $0 < \deg P < k$, і кожен E_k можна зобразити як замкнений підпростір у другому спряженому до проективного тензорного добутку: $E_k \subset (X \otimes_{s,\pi} \ldots \otimes_{s,\pi} X)''$. Іншими словами, $M_b(X)$ можна подати як простір послідовностей $\{\{u_k\} : u_k \in E_k\}$.

Операція згортки " $*$ " для елементів з $M_b(X)$ визначена формулою

$$(\varphi * \theta)(f) = \varphi(\theta(f(\cdot + x))), \quad f \in H_b(X). \tag{2}$$

За допомогою оператора симетричного зсуву $f \mapsto f(\cdot \bullet x)$, $f \in H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$, який є гомоморфізмом алгебри $H_s^{\ell_1}(\mathbb{D})$ в себе, можна означити *симетричну згортку* елементів з $M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$ наступним чином:

$$(\varphi \star \theta)(f) = \varphi(\theta(f(\cdot \bullet x))),$$

де $f \in H_{bs}(\ell_p)$, $\varphi, \theta \in M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$.

Твердження 3. *Нехай $\psi_1, \psi_2 \in M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$ і $\varphi_1, \varphi_2 \in M_b(\ell_1)$ є такими, що $\psi_1 = \varphi_1 \circ \Psi$, $\psi_2 = \varphi_2 \circ \Psi$. Тоді $\psi_1 \star \psi_2 = (\varphi_1 * \varphi_2) \circ \Psi$.*

Доведення. За означенням,

$$\psi_1 \star \psi_2(f) = \psi_1(\psi_2(f(x \bullet y))) =$$

$$= \psi_1(\psi_2(g(\mathcal{F}(x \bullet y)))) = \psi_1(\psi_2(g(\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)))).$$

Нехай $u = \mathcal{F}(x)$, $v = \mathcal{F}(y)$. Тоді дія ψ_2 на $g(\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y))$ як на функцію від x збігається з дією φ_2 на $g(u + v)$ як на функцію від u. Аналогічне зауваження стосується і ψ_2. Тому, за означенням згортки "$*$" в M_b,

$$\psi_1(\psi_2(g(\mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)))) = \varphi_1 * \varphi_2(g) = \varphi_1 * \varphi_2(\Psi(f)).$$

Твердження доведено.

Будемо використовувати позначення

$$\mathop{\bigstar}_{k=1}^{\infty} \psi_k = \psi_1 \star \psi_2 \star \ldots \star \psi_k \star \ldots,$$

де $\psi_k \in M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$.

Теорема 1. *Нехай $E_1, \ldots, E_k, \ldots$ — послідовність просторів (як у теоремі A) для простору $X = \ell_1$. Тоді кожен елемент $\psi \in M(H_s^{\ell_1}(\mathbb{D}))$ має вигляд:*

$$\psi(f) = \mathop{\circledast}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k)(\Psi(f)) = \mathop{\bigstar}_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(u_k)(f).$$

[1] *Чернега І.В.* Оператор зсуву у просторі симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 // Мат. методи і фіз. мех. поля, 2006. – **49**, № 2. – С. 52–57.

[2] *Alencar R., Aron R., Galindo P. and Zagorodnyuk A.* Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc., 2003. – **35**. – P. 55–64.

[3] *Dineen S.* Complex Analysis in Locally Convex Spaces. – Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland, Mathematics Studies, 1981. – Vol. 57. – 492 p.

[4] *Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // Journ. London Math. Soc., 1999. – **59**. – P. 681–697.

[5] *Nemirovski A.S. and Semenov S.M.* On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik, 1973. – **21**, № 2. – P. 255–277.

[6] *van der Waerden B.L.* Modern Algebra. – Ungar, 1964. – 264 p.

[7] *Zagorodnyuk A.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc., 2006. – **134**. – P. 2559–2569.

ALGEBRA OF SYMMETRIC ANALYTIC FUNCTIONS ON A POLYDISK OF ℓ_1

Andriy ZAGORODNYUK [1,2], *Iryna CHERNEGA* [2]

[1]Vasyl Stefanyk Prykarpatskyi National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76000, Ukraine
[2]Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,
3b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

Algebra of analytic functions on a polydisk of ℓ_1 which are symmetric with respect to permutations of basis vectors is investigated. The set of maximal ideals of the algebra is described.