СТАЦІОНАРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ВІДМОВАМИ ТА МОЖЛИВІСТЮ ВИХОДУ З ЛАДУ ПРАЦЮЮЧОГО КАНАЛУ

 Ярослав ЄЛЕЙКО, Юрій ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 12 квітня 2007 р.

Для системи масового обслуговування G/G/1/0 з можливістю виходу з ладу працюючого каналу визначено ймовірності станів граничного стаціонарного процесу та знайдено розподіл часу перебування системи у вільному стані.

ВСТУП

Дослідження ергодичних властивостей *систем масового обслуговування* (СМО) типу M/G успішно здійснювалось за допомогою методу вкладених ланцюгів Маркова [3, с. 96]. Для систем типу G/G доведення існування граничного стаціонарного процесу виявилось проблематичним. Відомі лише спроби визначення стаціонарних характеристик таких СМО з використанням напівмарковських процесів зі спеціально побудованим фазовим простором [4, гл. 5].

У цій роботі, припускаючи, що стаціонарний граничний процес існує, розглядаємо питання про визначення стаціонарних характеристик СМО G/G/1/0 з можливістю виходу з ладу працюючого каналу.

УДК 519.21; MSC 2000: 60–01

1. ЗАГАЛЬНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ ІМОВІРНОСТЕЙ

Вивчатимемо одноканальну СМО з відмовами, на вхід якої надходить стаціонарний ординарний потік замовлень, а випадкові величини T_λ (час між моментами надходження замовлень) і T_μ (час обслуговування одного замовлення) — незалежні і довільно розподілені.

Припустимо, що працюючий канал може вийти з ладу (відмовити) через випадковий час T_ν, який відраховується від моменту початку обслуговування. Відновлення (ремонт) каналу починається негайно після його виходу з ладу і триває протягом випадкового часу T_γ. Замовлення, яке обслуговувалось в момент виходу каналу з ладу, покидає систему не обслуженим.

Надалі вважатимемо, що випадкові величини T_λ, T_μ, T_ν, T_γ — незалежні в сукупності, довільно розподілені і мають скінченні математичні сподівання m_λ, m_μ, m_ν, m_γ відповідно.

Процес функціонування системи є чергуванням випадкових проміжків часу тривалістю $T_{\mu\nu} = \min\{T_\mu, T_\nu\}$ і $T_{0\mu}$ або $T_{\mu\nu} + T_\gamma$ і $T_{0\nu}$, де $T_{0\mu}$ — час від моменту завершення обслуговування чергового замовлення до моменту прибуття наступного, а $T_{0\nu}$ — час від моменту завершення відновлення (ремонту) каналу до моменту прибуття чергового замовлення.

Проаналізуємо роботу системи на досить великому проміжку часу T, вибравши за початок відліку часу момент надходження чергового замовлення у вільний канал.

Якщо $N(T)$ — кількість замовлень, що надійшли у систему за час T, $N_{\text{обс}}(T)$ — кількість обслужених за цей час замовлень, $N_{\text{пер}}(T)$ — кількість замовлень, обслуговування яких було перерване у зв'язку з виходом каналу з ладу, то для великих значень T виконується наближена рівність

$$T \approx N(T)m_\lambda \approx N_{\text{обс}}(T)(m_{\mu\nu} + m_{0\mu}) + N_{\text{пер}}(T)(m_{\mu\nu} + m_\gamma + m_{0\nu}), \quad (1)$$

де $m_{\mu\nu} = M(T_{\mu\nu})$, $m_{0\mu} = M(T_{0\mu})$, $m_{0\nu} = M(T_{0\nu})$. Введемо позначення:

$$P_{\text{пер}}(T) = \frac{N_{\text{пер}}(T)}{N_{\text{обс}}(T) + N_{\text{пер}}(T)}. \quad (2)$$

Якщо граничний стаціонарний процес існує, то ймовірність переривання обслуговування у зв'язку з виходом каналу з ладу дорівнює $P_{\text{пер}} = \lim\limits_{T\to\infty} P_{\text{пер}}(T) = P\{T_\nu < T_\mu\}$.

Наближена рівність (1) виконується тим точніше, чим триваліший проміжок часу T розглядається. Виразивши з (2) $N_{\text{пер}}(T)$, а потім з (1) — відношення $N_{\text{обс}}(T)/N(T)$ і перейшовши у ньому до границі при $T \to \infty$, визначимо стаціонарне значення ймовірності обслуговування для замовлення, що надійшло у систему (відносну пропускну здатність СМО):

$$P_{\text{обс}} = \lim_{T\to\infty} \frac{N_{\text{обс}}(T)}{N(T)} = \frac{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})}{M_{\mu\nu\gamma}}, \tag{3}$$

де $M_{\mu\nu\gamma} = m_{\mu\nu} + (1 - P_{\text{пер}})m_{0\mu} + P_{\text{пер}}(m_\gamma + m_{0\nu})$. Вигляд правої частини (3) дозволяє стверджувати, що необхідною умовою існування граничного стаціонарного процесу є існування скінченних математичних сподівань випадкових величин T_λ, T_μ, $T_{\mu\nu}$, $T_{0\mu}$, T_γ і $T_{0\nu}$.

Визначимо стаціонарний розподіл імовірностей для таких станів системи: s_0 — канал вільний; s_1 — канал працює; s_2 — канал на ремонті (недоступний). Повертаючись до рівності (1), бачимо, що проміжок часу T складається з суми довжин проміжків T_0 (часу простою каналу), T_1 (часу зайнятості каналу) і T_2 (часу ремонту каналу), тобто $T \approx \sum T_0 + \sum T_1 + \sum T_2$, де

$$\sum T_0 \approx N_{\text{обс}}(T)m_{0\mu} + N_{\text{пер}}(T)m_{0\nu};$$

$$\sum T_1 \approx \big(N_{\text{обс}}(T) + N_{\text{пер}}(T)\big)m_{\mu\nu}; \quad \sum T_2 \approx N_{\text{пер}}(T)m_\gamma.$$

Спрямовуючи $T \to \infty$ у відношеннях $\sum T_i/T$ $(i = \overline{1,3})$, отримаємо формули для ймовірностей станів граничного стаціонарного процесу

$$\begin{aligned}
p_0 &= \lim_{T\to\infty} \frac{\sum T_0}{T} = \frac{P_{\text{обс}}\big(P_{\text{пер}}m_{0\nu} + (1 - P_{\text{пер}})m_{0\mu}\big)}{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})} = \\
&= \frac{P_{\text{пер}}m_{0\nu} + (1 - P_{\text{пер}})m_{0\mu}}{M_{\mu\nu\gamma}}; \\
p_1 &= \lim_{T\to\infty} \frac{\sum T_1}{T} = \frac{P_{\text{обс}}\, m_{\mu\nu}}{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})} = \frac{m_{\mu\nu}}{M_{\mu\nu\gamma}}; \\
p_2 &= \lim_{T\to\infty} \frac{\sum T_2}{T} = \frac{P_{\text{обс}}\, P_{\text{пер}}\, m_\gamma}{m_\lambda(1 - P_{\text{пер}})} = \frac{P_{\text{пер}}\, m_\gamma}{M_{\mu\nu\gamma}}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Якщо потік замовлень — найпростіший, тобто випадкова величина T_λ розподілена за показниковим законом з параметром λ, то внаслідок відсутності післядії випадкові величини $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$ також розподілені за показниковим законом з параметром λ. Отже, $m_{0\mu} = m_{0\nu} = 1/\lambda$, і зі співвідношень (3), (4) отримаємо узагальнення формул Севастьянова [5] для системи M/G/1/0 з можливістю виходу з ладу працюючого каналу

$$\begin{gathered} P_{\text{обс}} = \frac{1 - P_{\text{пер}}}{M_\lambda}; \quad p_0 = \frac{P_{\text{обс}}}{1 - P_{\text{пер}}} = \frac{1}{M_\lambda}; \\ p_1 = \frac{\lambda P_{\text{обс}} m_{\mu\nu}}{1 - P_{\text{пер}}} = \frac{\lambda m_{\mu\nu}}{M_\lambda}; \quad p_2 = 1 - p_0 - p_1, \end{gathered} \tag{5}$$

де $M_\lambda = 1 + \lambda(m_{\mu\nu} + P_{\text{пер}} m_\gamma)$. У випадку показниково розподілених випадкових величин T_μ, T_ν і T_γ формули (5) переходять у співвідношення, отримані в роботі [1, с. 362].

2. АНАЛІЗ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН $\mathbf{T_{0\mu}}$, $\mathbf{T_{0\nu}}$

Випадкові величини $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$ об'єднує те, що вони задають інтервал часу, протягом якого система вільна, і цей проміжок часу починається після інтервалу тривалістю T_β зайнятості або недоступності каналу. Для спрощення аналізу цих випадкових величин введемо для них спільне позначення:

$$T_0 = \begin{cases} T_{0\mu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\mu\nu}; \\ T_{0\nu}, & \text{якщо } T_\beta = T_{\mu\nu} + T_\gamma. \end{cases}$$

Тривалість часу T_0 залежить від кількості замовлень, що надходять у систему за час T_β. Нехай $T_\lambda^{(k)}$ — k-разова композиція випадкових величин T_λ, $T_\lambda^{(0)} = 0$, $T_\lambda^{(1)} = T_\lambda$, а $q_k = P(A_k) = P\{T_\lambda^{(k-1)} \le T_\beta < T_\lambda^{(k)}\}(k = 1, 2, \dots)$. Тоді

$$T_0 = T_\lambda^{(k)} - T_\beta, \quad \text{з імовірністю } q_k \ (k = 1, 2, \dots).$$

Отже, випадкова величина T_0 залежить від появи одної і лише одної з попарно несумісних подій A_k, $(k = 1, 2, \dots)$, які утворюють повну групу. Тому математичне сподівання $m_0 = M(T_0)$ можна обчислити за формулою повного математичного сподівання

$$\begin{gathered} m_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) M(T_0 | A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k (k m_\lambda - m_\beta) = m_\lambda S_q - m_\beta; \\ S_q = \sum_{k=1}^{\infty} k q_k, \quad m_\beta = M(T_\beta). \end{gathered} \tag{6}$$

Тут враховано, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k = 1$, оскільки події A_k ($k = 1, 2, \dots$) утворюють повну групу попарно несумісних подій.

Якщо числовий ряд S_q збігається, то математичне сподівання m_0 існує. Оскільки $S_q = M(X) + 1$, де X — стаціонарне значення кількості замовлень, що надходять у систему за час T_β, то збіжність ряду S_q означає, що середня кількість замовлень, що надходять у систему за час недоступності каналу T_β, є скінченною. У монографії [4, с. 238] для випадку, коли вхідний потік є рекурентним, а випадкові величини T_λ і T_β мають абсолютно неперервні функції розподілу, $M(X)$ визначено через $h_\lambda(t)$ — щільність функції відновлення для випадкової величини T_λ

$$M(X) = \int_0^\infty h_\lambda(t)\big(1 - F_\beta(t)\big)\,dt,$$

де $F_\beta(t)$ — функція розподілу випадкової величини T_β. Отже, якщо функції розподілу випадкових величин T_λ, T_β абсолютно неперервні, то

$$S_q = 1 + \int_0^\infty h_\lambda(t)\big(1 - F_\beta(t)\big)\,dt. \tag{7}$$

Розглянемо випадок, коли вхідний потік регулярний, тобто $T_\lambda = T = const$, і формула (7) непридатна для знаходження S_q. Безпосередньо обчислюючи суму ряду S_q, можна записати

$$S_q = \sum_{k=1}^\infty k q_k = 1 + q_2 + q_3 + \cdots = 1 + \sum_{k=1}^\infty (q_{k+1} + q_{k+2} + \cdots) = 1 + \sum_{k=1}^\infty (1 - S_k),$$

де $S_k = \sum\limits_{i=1}^k q_i$. Оскільки

$$S_k = \sum_{i=1}^k P\{\,T_\lambda^{(i-1)} \le T_\beta < T_\lambda^{(i)}\} = \sum_{i=1}^k P\{\,(i-1)T \le T_\beta < iT\} =$$
$$= \sum_{i=1}^k \big(F_\beta(iT) - F_\beta((i-1)T)\big) = F_\beta(kT),$$

то для регулярного вхідного потоку $S_q = 1 + \sum\limits_{k=1}^\infty \big(1 - F_\beta(kT)\big)$.

Знайдемо закони розподілу випадкових величин $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$, які визначають проміжки часу, протягом яких система вільна. Для цього досить вивчити закон розподілу випадкової величини T_0 — часу перебування у вільному стані для звичайної системи G/G/1/0.

Нехай T_β — час, протягом якого система недоступна для надходження замовлень (у випадку системи G/G/1/0 без можливості виходу з ладу $T_\beta = T_\mu$ — часу обслуговування одного замовлення). Якщо функції розподілу випадкових величин T_λ і T_β абсолютно неперервні, то згідно з [4, с. 238] щільність розподілу випадкової величини $T_{\beta+0} = T_\beta + T_0$ — інтервалу часу між потраплянням замовлень у вільну систему — можна визначити за формулою

$$p_{\beta+0}(t) = p_\lambda(t)F_\beta(t) + \int_0^t \int_0^\tau h_\lambda(y) p_\beta(\tau) p_\lambda(t-y)\, dy\, d\tau,$$

де $p_\lambda(t)$, $p_\beta(t)$ — щільності розподілу випадкових величин T_λ і T_β відповідно. Припустимо, що $p_\lambda(t) \neq 0$, $p_\beta(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0, \infty)$, а $p_0(t)$ — щільність розподілу випадкової величини T_0. Тоді за формулою згортки для щільностей розподілу випадкових величин T_β і T_0 отримаємо

$$\int_0^t p_0(\tau) p_\beta(t-\tau)\, d\tau = p_{\beta+0}(t). \tag{8}$$

Нехай функції $q_\beta(t) = dp_\beta(t)/dt$, $q_{\beta+0}(t) = dp_{\beta+0}(t)/dt$ — кусково неперервні на проміжку $t \in [0, \infty)$, і нехай $p_\beta(0) \neq 0$. Тоді, диференціюючи обидві частини рівності (8) за змінною t, одержимо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду відносно функції $p_0(t)$

$$p_\beta(0)p_0(t) + \int_0^t q_\beta(t-\tau) p_0(\tau)\, d\tau = q_{\beta+0}(t). \tag{9}$$

Згідно з [2, с. 96], розв'язок цього рівняння має такий вигляд:

$$p_0(t) = \frac{q_{\beta+0}(t)}{p_\beta(0)} - \frac{1}{p_\beta(0)} \int_0^t R_\beta(t-\tau) q_{\beta+0}(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Тут $R_\beta(t)$ — резольвента ядра $q_\beta(t-\tau)$ рівняння (9), яку можна знайти за допомогою перетворення Лапласа, (застосувавши його до рівняння (9)) або методом ітерованих ядер:

$$R_\beta(t) = \sum_{k=1}^\infty q_\beta^{(k)}(t),$$

де $q_\beta^{(k)}(t)$ — k-разова згортка функції $q_\beta(t)$, $q_\beta^{(1)}(t) = q_\beta(t)$. Якщо випадкова величина T_β розподілена за показниковим законом з параметром β, то рівняння (9) набуває вигляду

$$p_0(t) - \int_0^t \beta e^{-\beta(t-\tau)} p_0(\tau)\, d\tau = \frac{q_{\beta+0}(t)}{\beta}.$$

У цьому випадку $R_\beta(t) = \beta$, і з (10) отримаємо

$$p_0(t) = \frac{q_{\beta+0}(t)}{\beta} + p_{\beta+0}(t) - p_{\beta+0}(0).$$

Зокрема, якщо випадкова величина T_λ розподілена за законом Ерланга другого порядку з параметром λ, то

$$p_0(t) = \left(\frac{\lambda^2(2\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)^2} + \frac{\lambda^2\beta t}{(\lambda+\beta)}\right)e^{-\lambda t} - \frac{\lambda^2(2\lambda+\beta)}{(\lambda+\beta)^2}e^{-(2\lambda+\beta)t}, \quad t > 0.$$

Знайдемо закон розподілу випадкової величини T_0 для випадку регулярного вхідного потоку, коли формула (10) стає непридатною для визначення $p_0(t)$. Якщо $T_\lambda = T = const$, то можливі значення випадкової величини T_0 зосереджені на відрізку $[0,\, T]$, і

$$T_0 = kT - T_\beta, \quad \text{з імовірністю } q_k \ (k = 1,\, 2, \dots),$$

де $q_k = P(A_k) = P\{\,(k-1)T \le T_\beta < kT\}$ $(k = 1,\, 2, \dots)$. Визначимо умовні щільності розподілу T_0 за умови, що $T_\beta \in [(k-1)T,\, kT)$, припускаючи, що випадкова величина T_β неперервна, а її щільність розподілу $p_\beta(t)$ відмінна від нуля для всіх $t \in (0, \infty)$. Функції розподілу випадкових величин $Y_k = kT - T_\beta$ визначаються рівностями

$$F_{Y_k}(t) = 1 - F_\beta(kT - t), \quad 0 \le t \le kT \quad (k = 1,\, 2, \dots),$$

а їхні щільності розподілу — формулами

$$p_{Y_k}(t) = p_\beta(kT - t), \quad 0 < t < kT \quad (k = 1,\, 2, \dots).$$

Тоді умовні щільності розподілу випадкової величини T_0 за умови, що $T_\beta \in [(k-1)T, kT)$, можна визначити у вигляді

$$p_{0k}(t) = \frac{p_{Y_k}(t)}{N_k} = \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k}, \quad 0 < t < T \quad (k = 1,\, 2, \dots),$$

де $N_k = \int_0^T p_\beta(kT - t)\,dt$. За формулою повної імовірності

$$F_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{0k}(t) q_k, \quad 0 \le t \le T,$$

де $F_{0k}(t) = \int_0^t p_{0k}(\tau)\,d\tau$, а $F_0(t)$ — функція розподілу випадкової величини T_0. Звідси отримаємо формулу для визначення щільності розподілу випадкової величини T_0

$$p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{0k}(t) q_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_\beta(kT - t)}{N_k} q_k, \quad 0 < t < T. \tag{11}$$

В інтегралі, що визначає нормувальну сталу N_k, перейдемо до змінної інтегрування $\tau = kT - t$. У результаті одержимо, що

$$N_k = \int_0^T p_\beta(kT - t)\, dt = \int_{(k-1)T}^{kT} p_\beta(\tau)\, d\tau = q_k.$$

Отже, з (11) матимемо

$$p_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_\beta(kT - t), \quad 0 < t < T. \tag{12}$$

Якщо $p_\beta(t) \neq 0$ тільки для $t \in (a, \infty)$, де $a > 0$, але відношення $p_\beta(kT - t)/N_k$ не залежить від k, то з (11) одержимо

$$p_0(t) = p_\beta(kT - t)/N_k, \quad 0 < t < T. \tag{13}$$

Наприклад, якщо щільність розподілу випадкової величини T_β має вигляд $p_\beta(t) = \beta e^{-\beta(t-a)},\ \ t > a \geq 0,$ то

$$N_k = \int_0^T \beta e^{-\beta(kT-t-a)}\, dt = e^{-\beta((k-1)T-a)} - e^{-\beta(kT-a)},$$

і за допомогою (13) отримаємо $p_0(t) = \dfrac{\beta e^{-\beta(T-t)}}{1 - e^{-\beta T}}$, $0 < t < T$. Той же результат дістаємо, якщо випадкова величина T_β розподілена за показниковим законом з параметром β.

Формулу (12) зручно використовувати, зокрема, якщо випадкова величина T_β розподілена за узагальненим законом Ерланга довільного порядку, наприклад, у випадку узагальненого закону Ерланга другого порядку з параметрами β_1 і β_2

$$p_0(t) = \frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \left(\frac{e^{-\beta_1(T-t)}}{1 - e^{-\beta_1 T}} - \frac{e^{-\beta_2(T-t)}}{1 - e^{-\beta_2 T}} \right), \qquad 0 < t < T.$$

3. ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ

Використовуючи співвідношення (6), запишемо формули для математичних сподівань випадкових величин $T_{0\mu}$ і $T_{0\nu}$:

$$m_{0\mu} = m_\lambda S_{q\mu} - m_{\mu\nu}, \qquad m_{0\nu} = m_\lambda S_{q\nu} - (m_{\mu\nu} + m_\gamma), \tag{14}$$

де

$$S_{q\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} kq_{\mu k},\ S_{q\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} kq_{\nu k},\ q_{\mu k} = P\{T_\lambda^{(k-1)} \le T_{\mu\nu} < T_\lambda^{(k)}\},$$
$$q_{\nu k} = P\{T_\lambda^{(k-1)} \le T_{\mu\nu} + T_\gamma < T_\lambda^{(k)}\}. \qquad (15)$$

З урахуванням співвідношень (14), формули (3), (4) для стаціонарних характеристик системи набувають вигляду

$$P_{\text{обс}} = \frac{1 - P_{\text{пер}}}{M_q}; \quad p_0 = \frac{(1 - P_{\text{пер}})m_{0\mu} + P_{\text{пер}} m_{0\nu}}{m_\lambda M_q};$$
$$p_1 = \frac{m_{\mu\nu}}{m_\lambda M_q}; \quad p_2 = 1 - p_0 - p_1, \qquad (16)$$

де $M_q = (1 - P_{\text{пер}})S_{q\mu} + P_{\text{пер}} S_{q\nu}$.

Наведемо результати підрахунку сум рядів (15) та інших величин, що входять у формули (16) для деяких типових розподілів випадкових величин T_λ, T_μ, T_ν і T_γ.

Приклад 1. Вхідний потік — регулярний ($T_\lambda = T = const$), випадкові величини T_μ, T_ν і T_γ розподілені за показниковими законами з параметрами μ, ν і γ відповідно:

$$m_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu + \nu}, \quad P_{\text{пер}} = \frac{\nu}{\mu + \nu}, \quad m_\lambda = T, \quad m_\gamma = \frac{1}{\gamma},$$
$$S_{q\nu} = 1 + \frac{1}{\gamma - (\mu + \nu)} \left(\frac{\gamma e^{-(\mu+\nu)T}}{1 - e^{-(\mu+\nu)T}} - \frac{(\mu + \nu)e^{-\gamma T}}{1 - e^{-\gamma T}} \right),$$
$$S_{q\mu} = \frac{1}{1 - e^{-(\mu+\nu)T}}, \quad m_{0\mu} = TS_{q\mu} - m_{\mu\nu}, \quad m_{0\nu} = TS_{q\nu} - m_{\mu\nu} - m_\gamma.$$

Приклад 2. Вхідний потік — рекурентний, випадкова величина T_λ розподілена за законом Ерланга другого порядку з параметром λ; випадкові величини T_μ, T_ν і T_γ розподілені за показниковими законами з параметрами μ, ν і γ відповідно:

$$m_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu + \nu}, \quad P_{\text{пер}} = \frac{\nu}{\mu + \nu}, \quad m_\lambda = \frac{2}{\lambda}, \quad m_\gamma = \frac{1}{\gamma},$$
$$S_{q\nu} = \frac{(\lambda^2 + \alpha\gamma)\big(2\lambda(\alpha + \gamma) + \alpha\gamma\big) + \lambda^2(\alpha^2 + \gamma^2 + 4\alpha\gamma)}{\alpha\gamma(2\lambda + \alpha)(2\lambda + \gamma)},$$
$$S_{q\mu} = \frac{(\alpha + \lambda)^2}{\alpha(\alpha + 2\lambda)^2}, \quad \alpha = \mu + \nu;$$
$$m_{0\mu} = \frac{2}{\lambda} S_{q\mu} - m_{\mu\nu}, \qquad m_{0\nu} = \frac{2}{\lambda} S_{q\nu} - m_{\mu\nu} - m_\gamma.$$

Приклад 3. Вхідний потік — найпростіший, тобто випадкова величина T_λ розподілена за показниковим законом з параметром λ. Випадкові величини T_μ, T_ν і T_γ рівномірно розподілені на проміжках $(0,\, a_\mu)$, $(0,\, a_\nu)$ і $(a_\gamma,\, b_\gamma)$ відповідно, де $a_\mu < a_\nu$. Стаціонарні характеристики визначаються за формулами (5), де

$$m_{\mu\nu} = \frac{a_\mu(3a_\nu - a_\mu)}{6a_\nu}\,, \quad P_{\text{пер}} = \frac{a_\mu}{2a_\nu}\,, \quad m_\lambda = \frac{1}{\lambda}\,,$$
$$m_\gamma = \frac{1}{2}\,(a_\gamma + b_\gamma), \quad m_{0\mu} = m_{0\nu} = \frac{1}{\lambda}\,.$$

[1] *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983. – 416 с.

[2] *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.

[3] *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.

[4] *Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.М., Турбин А.Ф.* Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинев: Штиинца, 1991. – 276 с.

[5] *Севастьянов Б.А.* Эргодическая теорема для марковских процессов и ее применение к телефонным системам с отказами // Теория вероятн. и ее применения. – 1957. – **2**, № 2. – С. 106–116.

STATIONARY CHARACTERISTICS OF THE SINGLE-SERVER QUEUEING LOSS SYSTEM WITH FALLING OUT POSSIBILITY OF THE WORKING SERVER

Yaroslav YELEIKO, Yuriy ZHERNOVYI

Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

The statistical-equilibrium state probabilities distribution and distribution of time of stay in a free state for the G/G/1/0 queueing system with falling out possibility of the working server are obtained.