СОЛІТОННІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ІНВЕРСНОЇ МОДИФІКОВАНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

©2006 р. *Ольга МЕНЬШИКОВА, Микола ПРИТУЛА*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 18 липня 2006 р.

Для нелінійної інверсної модифікованої динамічної системи Кортевега–де Фріза побудовано солітонні розв'язки за допомогою методу tanh-функцій та техніки символьних обчислень.

Метод tanh-функції був запропонований у праці [4], а у праці [3] цей метод було поширено для знаходження точних розв'язків нелінійних рівнянь із частинними похідними і реалізовано на конкретних прикладах. У 2001 р. зусиллями багатьох авторів [2] було розроблено пакет символьних обчислень у середовищі Mathematica для знаходження точних розв'язків нелінійних рівнянь із частинними похідними та дискретних диференціальних рівнянь, які виражаються через гіперболічні та еліптичні функції. У роботі [1] встановлено гамільтонову структуру нелінійної інверсної модифікованої динамічної системи Кортевега–де Фріза (КдФ)

$$w_t = \left\{ \begin{array}{l} u_t = v \\ p_t = u_x + u^2 v \\ v_t = p \end{array} \right\} = K[u,p,v], \tag{1}$$

знайдено закони збереження, узгоджену імплектична пара нетерових операторів та зображення Лакса. У рівнянні (1) функції u, v, p залежать від x, t. Визначимо, яку форму мають розв'язки інверсного модифікованого рівняння КдФ (1), використовуючи методи знаходження точних розв'язків, згадані вище. Запишемо систему (1) у вигляді

$$u_t - v = 0, \quad v_t - p = 0, \quad p_t - u_x - u^2 v = 0,$$

УДК 547.946, 517.9; MSC 2000: 35Q51, 37K40

або в іншій формі

$$u_{1,x_2} - u_2 = 0, \quad u_{2,x_2} - u_3 = 0, \quad u_{3,x_2} - u_{1,x_1} - u_1^2 u_2 = 0, \tag{2}$$

де

$$x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad u_1(x_1, x_2) = u(x,t),$$

$$u_2(x_1, x_2) = v(x,t), \quad u_3(x_1, x_2) = p(x,t).$$

Щоб отримати явні розв'язки системи (2), здійснимо такі кроки.

Крок 1. Зведемо систему (2) до нелінійного звичайного диференціального рівняння, розв'язок якого шукаємо у рухомій системі відліку

$$\varphi = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \varphi_0, \tag{3}$$

де компоненти k_1, k_2 хвильового вектора і фаза φ_0 є сталими. Для знаходження поліноміальних розв'язків використаємо метод tanh-функції [2–4], $T = \tanh\varphi$. Неважко зауважити, що перша і, отже, усі похідні вищого порядку від функції T будуть многочленами від T. Дійсно, враховуючи тотожність $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$, дістаємо

$$\tanh'\varphi = \mathrm{sech}^2\varphi = 1 - \tanh^2\varphi, \quad \tanh''\varphi = -2\tanh\varphi + \tanh^3\varphi, \ldots\ .$$

Оскільки $T' = 1 - T^2$, то застосовуючи правило диференціювання складеної функції та рівність

$$\frac{\partial\cdot}{\partial x_j} = \frac{d\cdot}{dT}\frac{dT}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx_j} = k_j\left(1 - T^2\right)\frac{d\cdot}{dT},$$

зведемо систему (2) до системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, використовуючи при цьому підстановку

$$u_{i,x_j} = k_j\left(1 - T^2\right)U_i'.$$

У результаті отримаємо

$$\begin{aligned}
&-U_2(T) + k_2U_1'(T) - k_2T^2U_1'(T) = 0,\\
&-U_3(T) + k_2U_2'(T) - k_2T^2U_2'(T) = 0,\\
&-U_1^2U_2(T) - k_1U_1'(T) + k_1T^2U_1'(T) + k_2U_3'(T) - k_2T^2U_3'(T) = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

де $U_1(T) = u_1(x_1, x_2)$, $U_2(T) = u_2(x_1, x_2)$, $U_3(T) = u_3(x_1, x_2)$.

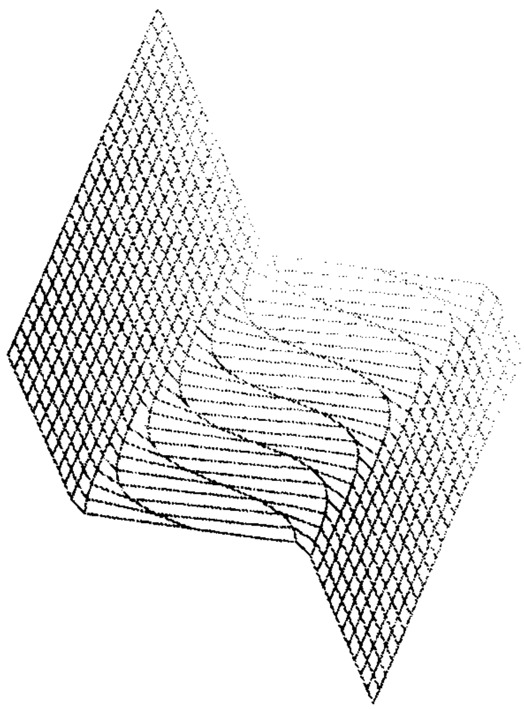

Рис. 1. Функція $u(x,t)$

Крок 2. Визначимо степінь поліноміальних розв'язків. З цією метою поліноміальні розв'язки шукаємо у формі

$$U_i(T) = \sum_{j=0}^{M_i} a_{ij} T^j \tag{5}$$

Перш ніж обчислювати коефіцієнти a_{ij}, повинні бути визначені показники степеня M_i. Щоб уникнути нульових розв'язків, приймаємо, що $M_i \geq 1$. Після підстановки виразів (5) для U_i у формули (4) коефіцієнти при кожному степені T у кожному рівнянні повинні дорівнювати нулеві. Зокрема, елементи найвищого степеня повинні перетворитися в нуль. Оскільки елементи найвищого степеня залежать у (5) тільки від T^{M_i}, то у ліві частини вихідних рівнянь (4) достатньо підставити $U_i(T) = T^{M_i}$, $i = 1, 2, 3$. У результаті отримаємо поліноміальну систему рівнянь від T. Прирівнювання кожних двох можливих найвищих показників степеня у кожному рівнянні системи (4) дає лінійну систему, яка визначає M_i, $i = 1, 2, 3$:

$$M_2 = M_1 + 1, \quad M_3 = M_2 + 1, \quad 2M_1 + M_2 = M_3 + 1.$$

Звідси отримуємо, що $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 3$. Отже,

$$\begin{aligned} &U_1(T) = a_{10} + a_{11}T, \quad U_2(T) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2, \\ &U_3(T) = a_{30} + a_{31}T + a_{32}T^2 + a_{33}T^3. \end{aligned} \tag{6}$$

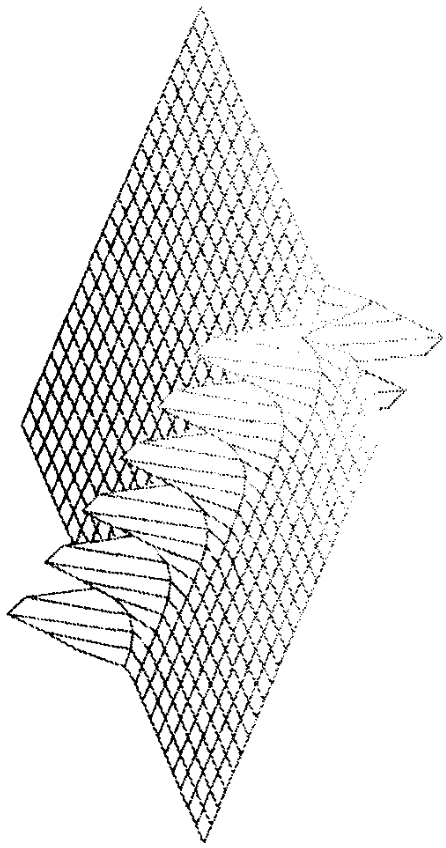

Рис. 2. Функція $v(x,t)$

Крок 3. Для визначення коефіцієнтів a_{ij} одержуємо алгебричну систему рівнянь, підставляючи вирази (6) у рівняння (4)

$$\begin{gathered}
-a_{21}=0, \quad -a_{20}+k_2a_{11}=0, \quad -a_{32}-k_2a_{21}=0, \\
-a_{30}+k_2a_{21}=0, \quad -a_{31}+2k_2a_{22}=0, \quad -a_{33}-2k_2a_{22}=0, \\
-a_{11}^2a_{22}-3k_2a_{33}=0, \quad -a_{10}^2a_{20}-k_1a_{11}+k_2a_{31}=0, \\
2k_2a_{32}-a_{10}^2a_{21}-2a_{10}a_{11}a_{20}=0, \\
-2a_{10}a_{11}a_{12}-a_{11}^2a_{21}-2k_2a_{32}=0, \\
-a_{10}^2a_{22}-2a_{10}a_{11}a_{21}-a_{11}^2a_{20}+k_1a_{11}+3k_2a_{33}-k_2a_{31}=0.
\end{gathered} \tag{7}$$

У системі (7) k_1, k_2 є параметрами.

Крок 4. Розв'язуємо нелінійну параметричну алгебричну систему (7) відповідно до таких припущень: а) коефіцієнти a_{ij}, $j=0,1,\ldots,M_i$, елементів найвищого степеня у (5) є відмінними від нуля (для сумісності з кроком 2); б) параметри k_1, k_2 є відмінними від нуля (вимога фізичного характеру розв'язків).

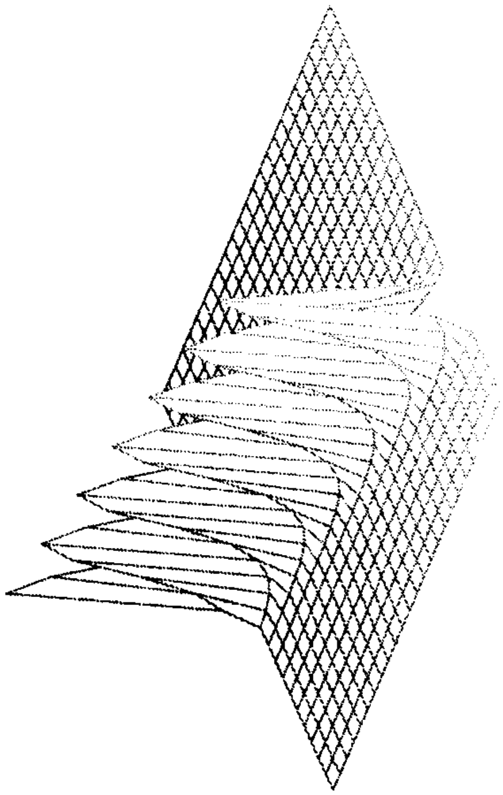

Рис. 3. Функція $p(x,t)$

Розв'язок системи (7) отримуємо у вигляді

$$\begin{aligned} &a_{10}=0, \quad a_{11}=\sqrt{6}k_2, \quad a_{20}=\sqrt{6}k_2^2, \quad a_{21}=0, \quad a_{22}=-\sqrt{6}k_2^2,\\ &a_{30}=0, \quad a_{31}=-2\sqrt{6}k_2^3, \quad a_{32}=0, \quad a_{33}=2\sqrt{6}k_2^3, \quad k_1=-2k_2^3. \end{aligned} \tag{8}$$

Крок 5. Будуємо і перевіряємо розв'язки. Для цього розв'язок (8), отриманий на кроці 4, підставляємо у (5); використовуючи процедуру, обернену до описаної у кроці 1, одержуємо явні розв'язки у початкових змінних. На завершення, перевіряємо розв'язки, підставляючи їх у вихідне рівняння (2). Використовуючи $T=\tanh(k_1x+k_2t+\varphi_0)$, отримуємо розв'язки системи у вигляді

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sqrt{6}\tanh(-2x+t+\varphi_0),\\ v(x,t)&=\sqrt{6}-\sqrt{6}\tanh^2(-2x+t+\varphi_0),\\ p(x,t)&=-2\sqrt{6}\tanh(-2x+t+\varphi_0)+2\sqrt{6}\tanh^3(-2x+t+\varphi_0). \end{aligned} \tag{9}$$

Графічні зображення розв'язків інверсної динамічної системи (1) наведено на рисунках 1, 2, 3, відповідно, при значеннях $\varphi_0=0$, $k_2=1$, $t=0:10$, $x=-10:10$.

[1] *Притула М.М.* Гамільтонова структура та перетворення Беклунда інверсного модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза // Вісн. Львів. ун-ту. – 1992. – 37. – С. 16–20.

[2] *Baldin D., Göktaş Ü., Hereman W.,Hong L., Martino R.S., Miller J.C.* Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear partial differential and differetial-difference equations. – 2001. Available at URL: // www.mines.edu/fs_home/whereman/.

[3] *Fan E.G.* Extended-function method and its applications to nonlinear equation // Phys. Lett. – 2000. – A **277**. – P. 212–218.

[4] *Malfliet W.* Solitary wave solutions of nonlinear wave equation // Am. J. Phys. – 1992, **60**. – P.650–654.

[5] *Prykarpatsky A., Mykytiuk I.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical system on manifolds: classical and quantum aspect. – Dordrecht: Kluwer, 1988. – 288 p.

SOLITON SOLUTIONS FOR THE INVERSE MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES DYNAMICAL SYSTEM

Olha MENSHYKOVA, Mykola PRYTULA

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Having developed the tanh-function method [3, 4] and maken use of the symbolic computation technique [2] we obtain solutions to the inverse modified Korteweg-de Vries dynamical system.