

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ СЛОШИНГУ У ВИПАДКУ ОБЛАСТІ З ПЕРЕГОРОДКАМИ

©2007 р. Галина ДАЦІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 5 липня 2007 р.

Розглянуто чисельне розв'язування лінійної задачі слошингу в області з перегородками. Цю задачу зведено до еволюційної задачі другого порядку з операторним коефіцієнтом на вільній поверхні. За допомогою перетворення Лагерра отримано послідовність операторних рівнянь на поверхні. У результаті застосування методу граничних інтегральних рівнянь отримано систему інтегральних рівнянь другого роду. Повну дискретизацію послідовності систем виконано з використанням методу Нистрьома. Наведено результати чисельних експериментів.

1. Постановка задачі. Задачі слошингу полягають у відшуканні основних характеристик руху рідини, яка знаходиться в контейнері з вільною поверхнею і піддається впливу зовнішніх сил. При розв'язуванні задач лінійного слошингу існує практика зведення проблеми до еволюційної задачі з операторним коефіцієнтом на вільній поверхні [2, 6], для розв'язування яких застосовуються різні методи. У [3] для чисельного розв'язування абстрактної еволюційної задачі другого порядку з операторним коефіцієнтом на гладкій замкненій кривій використовується комбінація перетворення Лагерра і методу інтегральних рівнянь. Аналогічний підхід застосовано в [2] для розв'язування лінійної задачі слошингу у нескінченному каналі. Перетворення Келлі та метод інтегральних рівнянь для розв'язування цієї ж задачі описані у [6].

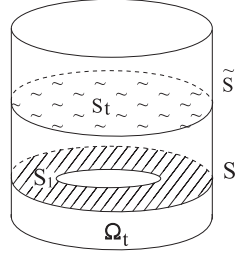


Рис. 1. Область Ω_t , $m_\ell = 1$

Нехай $S \cup \tilde{S}$ — фіксована поверхня контейнера, причому S — замочена частина поверхні, а \tilde{S} — суха; S_i — фіксовані ребра (перегородки) всередині контейнера, які не перетинаються між собою, $i = \overline{1, m_\ell}$. Через S_t позначимо вільну поверхню рідини (див. Рис. 1). Таким чином, Ω_t — область, заповнена рідиною з $\partial\Omega_t = S \cup S_t$.

Розглянемо лінійну модель безвихрового руху нестисливої нев'язкої рідини під дією зовнішніх сил, що знаходиться у контейнері з перегородками і має вільну поверхню. Ця модель полягає у розв'язуванні такої задачі відносно потенціалу швидкості φ (див. детальніше [11]):

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_i \times (0, \infty), \quad i = 2, \dots, n_\ell, \quad (3)$$

$$\varphi(\cdot, 0) = \omega_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\cdot, 0) = \omega_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \quad (4)$$

Тут f — функція, що описує силове поле, яке діє на рідину; ν — одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі; $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D\}$, Γ_i , $i \neq 1$, — перегородки S_i та частини поверхні S , відокремлені двома сусідніми перегородками; Ω — область з границею $\bigcup \Gamma_i$, $i = 1, \dots, n_\ell$, $n_\ell = 2m_\ell + 2$.

Розглянемо задачу (1)–(4) з дещо іншої точки зору, а саме, запишемо її як лінійну еволюційну задачу з операторним коефіцієнтом на поверхні Γ_1 . Отже, потрібно знайти функцію $u : \Gamma_1 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє таку еволюційну задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times [0, \infty), \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = \omega_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \omega_1 \quad \text{на } \Gamma_1, \quad (6)$$

де ω_0, ω_1, f — задані функції. Дію оператора A визначимо так: $Au = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}$ на Γ_1 , де Ψ — розв'язок наступної мішаної задачі Діріхле–Неймана:

$$\Delta \Psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Psi = u \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_i, \quad i = \overline{2, n_\ell}. \quad (7)$$

2. Дискретизація за часом та метод граничних інтегральних рівнянь. Для дискретизації задачі (5), (6) за часовою змінною використовуємо перетворення Лагерра [10], тобто розв'язок будемо шукати у вигляді ряду Фур'є–Лагерра

$$u(x, t) = \kappa \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) L_n(\kappa t), \quad (8)$$

де L_n — поліноми Лагерра, κ — фіксований параметр і

$$u_n(x) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-\kappa t} L_n(\kappa t) dt, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Теорема 1. *Нехай u — обмежена і двічі неперервно-диференційовна функція (з обмеженими першою і другою похідними). Розвинення (8) є розв'язком задачі (5), (6) тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти u_n задовольняють послідовність операторних рівнянь*

$$(\kappa^2 I + \alpha A) u_n = F_n - \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} u_m \quad \text{на } \Gamma_1 \quad (10)$$

для $n = 0, 1, \dots$. Тут $F_n = f_n + \omega_1 + \kappa(n+1)\omega_0$ і $\beta_n = \kappa^2(n+1)$, f_n — коефіцієнти Фур'є–Лагерра для функції f .

Доведення. Згідно з [9], правильними є такі співвідношення:

$$L'_n = \sum_{m=0}^{n-1} L_m, \quad L''_n = \sum_{m=0}^{n-2} (n-m) L_m, \quad n = 2, 3, \dots$$

Враховуючи означення коефіцієнтів (9) та використовуючи інтегрування частинами, отримуємо наступне зображення для \tilde{u}_n ($n = 0, 1, \dots$) — коефіцієнтів Фур'є–Лагерра для $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$:

$$\tilde{u}_n = -\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) - \kappa(n+1)u(x, 0) + \kappa^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1)u_m(x), \quad (11)$$

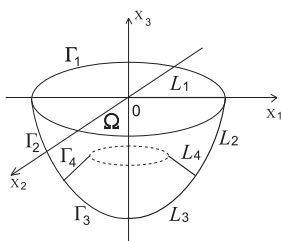


Рис. 2. Вигляд області Ω

Підставляючи функцію (8) у рівняння (5) і використовуючи (11) та початкові умови (6), отримуємо послідовність рівнянь (10). Доведення достатності проводиться аналогічно.

Знайдемо інтегральне зображення для оператора A . Відомо [7], що розв'язок задачі (7) можна подати у вигляді потенціалу простого шару

$$\Psi(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

де μ — невідома густина, $\Phi(x, y) = (4\pi)^{-1}|x - y|^{-1}$ — фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа в (7). Із властивостей потенціалу простого шару [7] випливає таке інтегральне зображення для оператора A :

$$(Av)(x) = \frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(x)} ds(y), \quad x \in \partial\Omega \setminus \Gamma,$$

де $\Gamma = \bigcup (\Gamma_i \cap \Gamma_j)$, $i, j = \overline{1, n_\ell}$. Це дає можливість отримати послідовність систем інтегральних рівнянь відносно μ_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\mu_n(x) + \int_{\partial\Omega} \mu_n(y) \left[\kappa^2\Phi(x, y) + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(x)} \right] ds(y) = F_n(x) - \\ \quad - \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} \int_{\partial\Omega} \mu_m(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma, \\ \frac{1}{2}\mu_n(x) + \int_{\partial\Omega} \mu_n(y) \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(x)} ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma_i \setminus \Gamma, \quad i = \overline{2, n_\ell}, \end{array} \right. \quad (13)$$

де $n = 0, 1, \dots$. Припустимо, що поверхня $\partial\Omega$ утворена внаслідок обертання кривої $L = \bigcup L_k$, $k = \overline{1, n_\ell}$, навколо осі $0x_3$ (див. Рис. 2), причому L допускає параметричне зображення.

Перейдемо до циліндричної системи координат (r, z, φ) .

Нехай $L_k := \{x_k(\xi) = (r_k(\xi), z_k(\xi)), \xi \in \widehat{I}_k\}$, $r_k \geq 0$ і $|x'_k(\xi)| > 0$ для всіх $\xi \in \widehat{I}_k$, $k = \overline{1, n_\ell}$, де $\widehat{I}_k := [(k-1)w_\ell, kw_\ell]$, $w_\ell = 2\pi/n_\ell$. Припустимо також, що функції F_n не залежать від φ . Враховуючи осьову симетрію та зображення ядер інтегральних рівнянь через еліптичні інтеграли K і E (див. [9]), аналогічно до [1], систему (13) можна записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\bar{\mu}_{1,n}(\xi) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n_\ell} \int_{(j-1)w_\ell}^{jw_\ell} \bar{\mu}_{j,n}(\tau) \{K_{1j}(\xi, \tau)H_{1j}^{11}(\xi, \tau) + E_{1j}(\xi, \tau) \times \\ \times H_{1j}^{21}(\xi, \tau)\} d\tau = \bar{F}_n(\xi) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} \sum_{j=1}^{n_\ell} \times \\ \times \int_{(j-1)w_\ell}^{jw_\ell} \bar{\mu}_{j,m}(\tau) B_j(\xi, \tau) K_{1j}(\xi, \tau) d\tau, \quad \xi \in I_1, \\ \\ \frac{1}{2}\bar{\mu}_{i,n}(\xi) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n_\ell} \int_{(j-1)w_\ell}^{jw_\ell} \bar{\mu}_{j,n}(\tau) \{K_{ij}(\xi, \tau)H_{ij}^{1i}(\xi, \tau) + \\ + E_{ij}(\xi, \tau)H_{ij}^{2i}(\xi, \tau)\} d\tau = 0, \quad \xi \in I_i, \quad i = \overline{2, n_\ell}. \end{array} \right.$$

Тут

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{i,n}(\xi) &= \bar{\mu}_n(\xi), \quad \xi \in I_i, \quad i = \overline{1, n_\ell}, \\ K_{ij}(\xi, \tau) &= K(k_{ij}(\xi, \tau)), \quad E_{ij}(\xi, \tau) = E(k_{ij}(\xi, \tau)), \quad i, j = \overline{1, n_\ell}, \\ k_{ij}^2(\xi, \tau) &= k^2(\xi, \tau), \quad \xi \in I_i, \quad \tau \in I_j, \quad i, j = \overline{1, n_\ell}, \\ k^2(\xi, \tau) &= \frac{2r(\xi)r(\tau)}{p(\xi, \tau)}, \quad p(\xi, \tau) = (r(\xi) + r(\tau))^2 + (z(\xi) - z(\tau))^2, \\ H_{ij}^{11}(\xi, \tau) &= \frac{Q_j(\tau)}{p_{ij}^{1/2}(\xi, \tau)} \left(\kappa^2 - \frac{2r_j(\tau)}{k_{ij}^2(\xi, \tau)p_{ij}(\xi, \tau)} \frac{z'_i(\xi)}{|x'_i(\xi)|} \right), \\ H_{ij}^{21}(\xi, \tau) &= \frac{Q_j(\tau)}{p_{ij}^{3/2}(\xi, \tau)} \left(\frac{2r_j(\tau)}{k_{ij}^2(\xi, \tau)} \frac{z'_i(\xi)}{|x'_i(\xi)|} + \frac{\langle \nu(\xi), x_j(\xi) - x_i(\xi) \rangle}{1 - k_{ij}^2(\xi, \tau)} \right), \quad i \neq j, \xi \neq \tau, \\ H_{ii}^{21}(\xi, \xi) &= Q_i(\xi) \left(\frac{2r_i(\xi)}{k_{ii}^2(\xi, \xi)p_{ii}^{3/2}(\xi, \xi)} \frac{z'_i(\xi)}{|x'_i(\xi)|} + \frac{r''_i(\xi)z'_i(\xi) - r'_i(\xi)z''_i(\xi)}{4r_i(\xi)|x_i(\xi)|^3} \right), \\ H_{ij}^{1i}(\xi, \tau) &= -\frac{Q_j(\tau)}{p_{ij}^{3/2}(\xi, \tau)} \frac{2r_j(\tau)}{k_{ij}^2(\xi, \tau)} \frac{z'_i(\xi)}{|x'_i(\xi)|}, \quad H_{ij}^{2i}(\xi, \tau) = H_{ij}^{21}(\xi, \tau), \end{aligned}$$

$$B_j(\xi, \tau) = \frac{Q_j(\tau)}{p_{1j}^{1/2}(\xi, \tau)}, \quad Q_i(\xi) = Q(\xi), \quad \xi \in I_i,$$

$$p_{ij}(\xi, \tau) = p(\xi, \tau), \quad \xi \in I_i, \quad \tau \in I_j, \quad i, j = \overline{1, n_\ell}.$$

З огляду на зображення повних еліптичних інтегралів [9], запишемо систему у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\mu}_{i,n}(\xi) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n_\ell} \int_{(j-1)w_\ell}^{jw_\ell} \bar{\mu}_{j,n}(\tau) \{N_{ij}^1(\xi, \tau) \ln \frac{1}{1 - k_{ij}^2(\xi, \tau)} + N_{ij}^2(\xi, \tau)\} d\tau = \\ = G_{in}(\xi), \quad \xi \in I_i, \quad i = \overline{1, n_\ell}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{1n}(\xi) = \bar{F}_n(\xi) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} \sum_{j=1}^{n_\ell} \int_{(j-1)w_\ell}^{jw_\ell} \bar{\mu}_{j,m}(\tau) \{M_j^1(\xi, \tau) \times \\ \times \ln \frac{1}{1 - k_{1j}^2(\xi, \tau)} + M_j^2(\xi, \tau)\} d\tau \quad \text{та} \quad G_{in}(\xi) = 0 \quad \text{для} \quad i = \overline{2, n_\ell}. \end{aligned}$$

Тут

$$N_{ij}^{\ell k}(\xi, \tau) = K^\ell(\eta_{ij}(\xi, \tau)) H_{ij}^{1k}(\xi, \tau) + E^\ell(\eta_{ij}(\xi, \tau)) H_{ij}^{2k}(\xi, \tau),$$

$$M_j^\ell(\xi, \tau) = K^\ell(\eta_{1j}(\xi, \tau)) B_j(\xi, \tau), \quad i, j, k, \ell = \overline{1, n_\ell},$$

де E^ℓ, K^ℓ — функції, зображені у вигляді степеневих рядів [9].

3. Послаблення особливостей. Відомо [4], що густина μ в (12) має особливість при підході до кінців кривих $L_i, i = \overline{1, n_\ell}$. Для її послаблення, аналогічно до [5, 8], здійснимо спеціальну заміну змінних. Для цього запровадимо кубічний поліном

$$v(s) = \left(\frac{1}{q} - \frac{\pi}{n_\ell}\right) \left(\frac{\pi - n_\ell s}{\pi}\right)^3 - \frac{1}{q} \left(\frac{\pi - n_\ell s}{\pi}\right) + \frac{\pi}{n_\ell},$$

де $0 \leq s \leq w_\ell$ і $q \geq 2$. З його допомогою визначимо функцію

$$d(s) = w_\ell \frac{[v(s)]^q}{[v(s)]^q + [v(w_\ell - s)]^q}, \quad 0 \leq s \leq w_\ell,$$

і прийmemo $\gamma(s) = \gamma_i(s) = (i-1)w_\ell + d(s - (i-1)w_\ell), s \in \widehat{I}_i, i = \overline{1, n_\ell}$. Очевидно, що $\gamma \in C^{q-1}[0, 2\pi], \gamma^{(\ell)}(iw_\ell) = 0, \ell = \overline{1, q-1}, i = \overline{0, n_\ell}/$ На основі функцій γ_i визначимо заміну змінних:

$$\begin{cases} \xi = \gamma_i(s), & s \in I_i \quad \text{для} \quad t \in I_i, \\ \tau = \gamma_i(\sigma), & \sigma \in I_i \quad \text{для} \quad \tau \in I_i. \end{cases}$$

Доозначимо функції γ_i на відрізки I_j за правилом:

$$\begin{cases} \gamma_i(s) = \gamma_i(s - 2mw_\ell), & \text{якщо } j = 2m + i, \\ \gamma_i(s) = \gamma_i(jw_\ell - s), & \text{якщо } j = 2m + 1 + i, \end{cases}$$

де $m \in \mathbb{N}$. Покладемо також, що $\gamma_i(s + w_\ell\pi) = \gamma_i(s)$, $i = \overline{1, n_\ell}$.

Функції γ_i — парні та $w_\ell\pi$ -періодичні, що дає можливість записати систему у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{n_\ell}{4} \varphi_{1,n}(s) + \frac{\gamma'_1(s)}{2\pi} \sum_{j=1}^{n_\ell} \int_0^{2\pi} \varphi_{j,n}(\sigma) \{ \overline{N}_{1j}^{11}(s, \sigma) \ln \frac{1}{1 - \overline{k}_{1j}^2(s, \sigma)} + \\ & + \overline{N}_{1j}^{21}(s, \sigma) \} d\sigma = \frac{n_\ell}{2} g_n(s) - \frac{\gamma'_1(s)}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} \sum_{j=1}^{n_\ell} \int_0^{2\pi} \varphi_{j,m}(\sigma) \times \\ & \times \{ \overline{M}_j^1(s, \sigma) \ln \frac{1}{1 - \overline{k}_{1j}^2(s, \sigma)} + \overline{M}_j^2(s, \sigma) \} d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi], \\ & \frac{n_\ell}{4} \varphi_{i,n}(s) + \frac{\gamma'_i(s)}{2\pi} \sum_{j=1}^{n_\ell} \int_0^{2\pi} \varphi_{j,n}(\sigma) \{ \overline{N}_{ij}^{1i}(s, \sigma) \ln \frac{1}{1 - \overline{k}_{2j}^2(s, \sigma)} + \\ & + \overline{N}_{ij}^{2i}(s, \sigma) \} d\sigma = 0, \quad s \in [0, 2\pi], \quad i = \overline{2, n_\ell}, \end{aligned} \right. \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} g_n(s) &= F_n(\gamma_1(s))\gamma'_1(s), \quad \varphi_{i,n}(s) = \overline{\mu}_{i,n}(\gamma_i(s))\gamma'_i(s), \\ \overline{N}_{ij}^{\ell k}(s, \sigma) &= N_{ij}^{\ell k}(\gamma_i(s), \gamma_j(\sigma)), \quad \overline{M}_j^k(s, \sigma) = M_j^k(\gamma_1(s), \gamma_j(\sigma)), \\ \overline{k}_{ij}^2(s, \sigma) &= k_{ij}^2(\gamma_i(s), \gamma_j(\sigma)), \quad i, j, \ell, k = \overline{1, n_\ell}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що після виконаних перетворень $\varphi_{i,n} \in C^{q-1}[0, 2\pi]$.

Ядра інтегральних рівнянь системи (12) містять логарифмічну особливість, яка виникає при $i = j$ та $s = \sigma$. Для виділення цієї особливості здійснимо перетворення у ядрі, аналогічні до [1], після чого система (14) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{n_\ell}{4} \varphi_{i,n}(s) + \frac{\gamma'_i(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{i,n}(\sigma) \left\{ L_{ii}^{1i}(s, \sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + L_{ii}^{2i}(s, \sigma) \right\} d\sigma + \\ & + \frac{\gamma'_i(s)}{2\pi} \sum_{j=1; j \neq i}^{n_\ell} \int_0^{2\pi} \varphi_{j,n}(\sigma) L_{ij}^{3i}(s, \sigma) d\sigma = G_{in}(s), \quad s \in [0, 2\pi], \quad i = \overline{1, n_\ell}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$G_{1n}(s) = \frac{n_\ell}{2} g_n(s) - \frac{\gamma'_1(s)}{2\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} \left[\int_0^{2\pi} \varphi_{1,n}(\sigma) \{ A_{11}^{11}(s, \sigma) \times \right. \\ \left. \times \ln \left(4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) + A_{11}^{21}(s, \sigma) \} d\sigma + \sum_{j=2}^{n_\ell} \int_0^{2\pi} \varphi_{j,n}(\sigma) A_{1j}^{31}(s, \sigma) d\sigma \right];$$

$G_{in}(s) = 0$, $i = \overline{2, n_\ell}$. Тут

$$L_{ii}^{1i}(s, \sigma) = -2\overline{N}_{ii}^{1i}(s, \sigma), \quad L_{ii}^{2i}(s, \sigma) = \overline{N}_{ii}^{1i}(s, \sigma) b_i(s, \sigma) + \overline{N}_{ii}^{2i}(s, \sigma), \\ L_{ij}^{3i}(s, \sigma) = \overline{N}_{ij}^{1i}(s, \sigma) \ln \frac{1}{1 - \overline{k}_{ij}^2(s, \sigma)} + \overline{N}_{ij}^{2i}(s, \sigma), \\ A_{11}^{11}(s, \sigma) = -2\overline{M}_1^1(s, \sigma), \quad A_{11}^{21}(s, \sigma) = \overline{M}_1^1(s, \sigma) b_1(s, \sigma) + \overline{M}_1^2(s, \sigma), \\ A_{1j}^{31}(s, \sigma) = \overline{M}_j^1(s, \sigma) \ln \frac{1}{1 - \overline{k}_{1j}^2(s, \sigma)} + \overline{M}_j^2(s, \sigma).$$

Теорема 2. Нехай $q \geq 3$. Для довільних правих частин $\omega_\ell, f_n \in H_e^0[0, 2\pi]$ існують єдині розв'язки $\varphi_{i,n} \in H_e^0[0, 2\pi]$, $i = \overline{1, n_\ell}$, системи інтегральних рівнянь (15), які неперервно залежать від правих частин.

Доведення. Система (15) має тривіальний розв'язок для $g_n = 0$. Для доведення цього твердження використаємо методом індукції. Розглянемо першу систему послідовності (15):

$$\frac{n_\ell}{4} \varphi_{i,n}(s) + \frac{\gamma'_i(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_{i,0}(\sigma) \left\{ L_{ii}^{1i}(s, \sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) + L_{ii}^{2i}(s, \sigma) \right\} d\sigma + \\ + \frac{\gamma'_i(s)}{2\pi} \sum_{j=1; j \neq i}^{n_\ell} \int_0^{2\pi} \varphi_{j,0}(\sigma) L_{ij}^{3i}(s, \sigma) d\sigma = 0, \quad s \in [0, 2\pi], \quad i = \overline{1, n_\ell}.$$

Очевидно, що ця система відповідає наступній мішаній задачі для рівняння Лапласа

$$\Delta U = 0 \text{ в } \Omega, \quad U + \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_i, \quad i = \overline{2, n_\ell}. \quad (16)$$

Беручи до уваги, що $\partial\Omega$ — неперервна, за допомогою формул Гріна (див. [7]) легко показати, що гранична задача (16) має тільки тривіальний розв'язок, тобто $\varphi_{i,0} = 0$, $i = \overline{1, n_\ell}$. Далі, за індукцією отримуємо, що системи (15) мають тільки тривіальні розв'язки для $g_n = 0$, $n > 0$.

Задамо наступні оператори:

$$(S_i\psi)(s) := -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{N}_{ii}^{1i}(s, \sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(B_i\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{N}_{ii}^{1i}(s, \sigma) b_i(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(C_{ij}\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{ij}^{3i}(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma, \quad (D_i\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{N}_{ii}^{2i}(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(\overline{S}\psi)(s) := -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}_1^1(s, \sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(\overline{B}\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}_1^1(s, \sigma) b_1(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma,$$

$$(\overline{C}_j\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{1j}^{31}(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma, \quad (\overline{D}\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}_1^2(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma$$

для $s \in [0, 2\pi]$. Тоді система (15) може бути записана в операторному вигляді

$$\left(\frac{n_\ell}{4} \mathbf{I} + \mathbf{L} \right) \vec{\varphi}_n = \vec{g}_n - \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{n-m} \mathbf{K} \vec{\varphi}_m,$$

де \mathbf{I} — одинична матриця розміру $n_\ell \times n_\ell$, $\vec{\varphi}_n := (\varphi_{1,n}, \dots, \varphi_{n_\ell,n})^T$, $\vec{g}_n := (g_n, 0, \dots, 0)^T$ — вектор довжини n_ℓ ,

$$\mathbf{L} := \begin{pmatrix} \gamma'_1(S_1 + B_1 + D_1) & \gamma'_1 C_{12} & \dots & \gamma'_1 C_{1n_\ell} \\ \gamma'_2 C_{21} & \gamma'_2(S_2 + B_2 + D_2) & \dots & \gamma'_2 C_{2n_\ell} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma'_{n_\ell} C_{n_\ell 1} & \gamma'_{n_\ell} C_{n_\ell n_\ell} & \dots & \gamma'_{n_\ell}(S_{n_\ell} + B_{n_\ell} + D_{n_\ell}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} \gamma'_1(\overline{S} + \overline{B} + \overline{D}) & \gamma'_1 \overline{C}_2 & \dots & \gamma'_1 \overline{C}_{n_\ell} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператори \overline{D} , \overline{C}_j , D_i , C_{ij} , $i, j = \overline{1, n_\ell}$ є компактними у $H_e^0[0, 2\pi]$, оскільки мають неперервні ядра. Аналогічно до [5], на основі техніки перетворення Меліна можна показати, що оператори $S_i + B_i$, $i = \overline{1, n_\ell}$, і $\overline{S} + \overline{B}$ є обмеженими з $H_e^0[0, 2\pi]$ у $H_e^1[0, 2\pi]$, що забезпечує їхню компактність у $H_e^0[0, 2\pi]$.

Таким чином, \mathbf{L} — компактний у $H_e^0[0, 2\pi] \times H_e^0[0, 2\pi] \times \dots \times H_e^0[0, 2\pi]$. Далі, використовуючи індукцію та теорію Рісса–Шаудера [7], отримуємо твердження теореми.

4. Повна дискретизація методом Нистрьома. Для чисельного розв'язування послідовності систем (15) використовується метод Нистрьома [7], який полягає у застосуванні наступних квадратур на рівномірному розбитті $s_k^p = kh^p$, $h^p = \frac{\pi}{M_p}$, $k = 0, \dots, 2M_p - 1$, $M_p \in \mathbb{N}$, $p = 1, \dots, n_\ell$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) ds \approx \frac{1}{2M_p} \sum_{j=0}^{2M_p-1} f(s_j^p),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \left(4 \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2M_p-1} R_j^p(s) f(s_j^p),$$

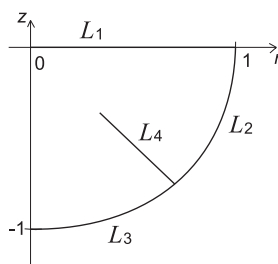
де $R_j^p(s) = -\frac{1}{M_p} \left[\sum_{m=1}^{M_p-1} \frac{1}{m} \cos(s - s_j^p) + \frac{1}{M_p} \cos M_p(s - s_j^p) \right]$. Після застосування квадратур і колокації у вузлах квадратурних формул отримуємо послідовність систем лінійних алгебричних рівнянь відносно φ_{ik}^n , де $\varphi_{ik}^n \approx \varphi_{i,n}(s_k^i)$.

Наближене значення функції u_n обчислюємо за формулою

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(x_1(s)) = & \sum_{p=1}^{2M_1/n_\ell-1} \varphi_{1p}^n \left[L_{11}^{11}(s, s_p^1) \sum_{j=0}^{n_\ell-1} \left\{ R_p^1(jw_\ell + s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + R_p^1((j+1)w_\ell - s) \right\} + \frac{n_\ell}{2M_1} L_{11}^{21}(s, s_p^1) \right] + \sum_{j=2}^{n_\ell} \frac{n_\ell}{2M_j} \sum_{p=1}^{2M_j/n_\ell-1} \varphi_{jp}^n L_{1j}^{31}(s, s_p^j). \end{aligned}$$

Аналіз збіжності та оцінка похибки даного методу проводиться, як і в [8]. Узагальнюючи результати з [8], отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай найменший кут граничної кривої L дорівнює $(1 - |\rho|)\pi$, де $0 < |\rho| < 1$, і нехай $f_n, \omega_\ell \in H^{p+5/2}(L_1)$ для $p \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$. Тоді для*

Рис. 3. Вигляд області Ω

$q > (p + 1/2)(1 + |\rho|)$ виконується оцінка похибки

$$\|\varphi_\ell^n - \tilde{\varphi}_\ell^n\|_{H_\ell^q[0,2\pi]} \leq C_n M^{-p},$$

де φ_ℓ^n — точний розв'язок, а $\tilde{\varphi}_\ell^n$ — наближений, отриманий методом Нистрьома, $M = \min\{M_1, \dots, M_{n_\ell}\}$, $C_n > 0$ і $\ell = 1, \dots, n_\ell$.

Згідно з (8), для обчислення наближеного розв'язку еволюційної задачі (5), (6) дістаємо таку формулу:

$$u_N^M(x_1(s), t) = \kappa \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n(x_1(s)) L_n(\kappa t).$$

5. Чисельні експерименти.

Приклад 1. Мішана задача Робіна–Неймана для рівняння Лапласа.

Розглянемо область Ω з однією перегородкою. Нехай вона утворена обертанням кривих L_i , $i = \overline{1,4}$, зображених на рис. 3. Перевіримо правильність розробленого алгоритму на першій системі, яка відповідає наступній мішаній задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta U = 0 \text{ в } \Omega, \quad U + \frac{\partial U}{\partial \nu} = 1 \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma_i, \quad i = 2, 3, 4.$$

Тут гранична функція f_0 вибрана такою, що $f_0 = 1$. Очевидно, що точний розв'язок $U_{ex} = 1$. У таблиці 1 наведено значення H^0 -похибки між точним та наближеним розв'язками і порядок збіжності ord_M описаного вище методу. Тут $M_1 = M_2 = \dots = M_{n_\ell} = M$.

Табл. 1. ε_M -похибка і порядок збіжності для прикладу 1

M	$q = 3$		$q = 4$		$q = 5$	
	ε_M	ord_M	ε_M	ord_M	ε_M	ord_M
64	6.5×10^{-4}	2.0	1.1×10^{-3}	2.7	1.0×10^{-3}	3.3
128	1.6×10^{-4}	2.0	1.7×10^{-4}	2.7	1.0×10^{-4}	3.2
256	4.0×10^{-5}		2.7×10^{-5}		1.1×10^{-5}	

Отримані результати демонструють покращення порядку збіжності при збільшенні параметра q . Зауважимо, що згідно з теоремою 3 очікуваний порядок становить 1.5, 2.2, 2.8 для $q = 3, 4, 5$ відповідно.

Приклад 2. Еволюційна задача на вільній поверхні.

Розглянемо нестационарну задачу (5), (6). Нехай область буде такою ж, як у попередньому прикладі. Виберемо $f(x, t) = e^{-t}$, а граничні функції $w_0 = 1$ і $w_1 = -1$. Для таких вхідних даних відомий точний розв'язок задачі: $u_{ex}(x, t) = e^{-t}$.

Таблиця 2 містить значення H^0 -похибки між точним та наближеним розв'язками, обчислених при $q = 5$ для всіх випадків.

Табл. 2. ε_{NM} -похибка для прикладу 2

M	$N = 30$	$N = 40$	$N = 50$
16	2.59×10^{-2}	2.62×10^{-2}	2.60×10^{-2}
32	5.30×10^{-3}	5.33×10^{-3}	5.32×10^{-3}
64	6.23×10^{-4}	6.22×10^{-4}	6.25×10^{-4}

Отримані результати підтверджують збіжність методу Нистрьома, очікувану відповідно до теореми 3, і швидку збіжність перетворення Лагерра.

- [1] Дацив Г., Халко Р. Про чисельне розв'язування однієї мішаної осесиметричної граничної задачі для рівняння Лапласа // Вісник Львів. ун-ту. – Серія прикл. матем. та інф. – 2006. – 11. – С. 43–53.
- [2] Chapko R. An integral equation method for numerical analysis of gravity waves in a channel with free boundary // Appl. Math. and Comput. – 2004. – 159. – P. 247–266.
- [3] Chapko R. The numerical solution of an evolution problem of second order in time on a closed smooth boundary // J. Comput. Appl. Math. – 2002. – 145. – P. 493–503.

- [4] *Costabel M., Stephan E.P.* Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation. *Mathematical Models in Mechanics*. – Banach Center Publications, PWN–Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1985.
- [5] *Elshner J., Graham I.G.* Quadrature methods for Symm’s integral equation on polygons // *IMA J. Numer. Anal.* – 1997. – **17**. – P. 643–664.
- [6] *Gavrilyuk I., Kulyk A., Makarov V.* Integral equations of the linear sloshing in an infinite chute and their discretization // *Comput. Methods Appl. Math.* – 2001. – **1**. – P. 39–61.
- [7] *Kress R.* *Linear Integral Equations*, second ed. – Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [8] *Kress R., Tran T.* Inverse scattering for a locally perturbed half-plane // *Inverse Problems*. – 2000. – **16**. – P. 1541–1559.
- [9] *Lebedev N.N.* *Special Functions and their Applications*. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [10] *Tricomi F.G.* *Vorlesungen über Orthogonalreihen*. – Springer–Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1955.
- [11] *Whitham G.B.* *Linear and Nonlinear Waves*. – John Wiley and Sons, New York, 1974.

NUMERICAL SOLUTION OF THE LINEAR EXISYMMETRIC SLOSHING PROBLEM IN DOMAIN WITH BAFFLES

Halyna DATSIV

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

The numerical solution of a linear sloshing problem in axisymmetric domains with baffles is considered. This problem is rewritten as a linear evolution problem on a free surface with an operator coefficient. By use of Laguerre transformation with respect to time a sequence of operator equations is obtained. Using potential theory, we reduce the operator equations to the sequence of integral equations of the second kind systems. Full discretization is realized by use of the Nyström method and numerical examples are presented.