ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 22 травня 2006 р.

У циліндрі $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$, де $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — необмежена область, розглянуто нелінійну параболічну варіаційну нерівність. Встановлено єдиність локально інтегровного розв'язку u цієї нерівності без додаткових умов на поведінку вихідних даних нерівності при $|x| \to +\infty$. При цьому на поведінку розв'язку u при $|x| \to +\infty$ не накладено жодних умов.

Задача Коші

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i} = f \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \qquad (*)$$

де $p \in (1, +\infty)$, $T \in (0, +\infty)$, вивчалася багатьма авторами. Відомо, що при $p = 2$ задача $(*)$ не може мати більше одного розв'язку, для якого виконується оцінка $|u(x,t)| \le Ce^{c|x|^2}$ з якими-небудь сталими $C, c > 0$. Відмінний від нуля розв'язок такої задачі при $f = 0$, $u_0 = 0$, який задовольняє оцінку $|u(x,t)| \le C \exp(c|x|^{2+\varepsilon})$, де $\varepsilon > 0$ — довільне, вперше був побудований А.М.Тихоновим у [10]. Якщо $n = 1$, $p > 2$, то у [5] встановлено єдиність розв'язку цієї задачі в класі функцій, що задовольняють оцінку $|u_x(x,t)|^{p-2} \le C(1 + |x|^2)$, $C > 0$. У праці [12] в класах локально інтегровних функцій встановлена однозначна розв'язність задачі $(*)$ за умови $|u_0(x)| \le C|x|^{p/(p-2)}$ при $|x| \to \infty$ для $n \ge 1$, $p > 2$. Аналогічний результат у випадку $p < 2$, встановлено в [13]. У [11] без

УДК 517.95, MSC 2000: 35R45

обмежень на поведінку розв'язку та вихідних даних при $|x| \to \infty$ встановлено однозначну задачі Коші для нелінійного рівняння вищого порядку з лінійною головною частиною. Параболічні варіаційні нерівності в необмежених областях вивчено в [2,3,6,8,9]. Зокрема, в [3] в класах Тихонова встановлено єдиність розв'язку загальної лінійної параболічної варіаційної нерівності. У даній статті доведено єдиність розв'язку параболічної варіаційної нерівності, яка узагальнює рівняння задачі (*), для $p \in (1,2)$. Результат отримано без додаткових припущень на поведінку розв'язку на нескінченності.

Нехай $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — необмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, яка задовольняє умову: для кожного $l \in \mathbb{N}$ множина $\Omega^l = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < l\}$ є областю, межа якої складається з двох кусково гладких гіперповерхонь Γ_1^l і Γ_2^l таких, що

$$\Gamma_1^l \subset \partial\Omega, \quad \mathrm{mes}_{n-1} \quad \Gamma_1^l > 0, \quad \mathrm{mes}_{n-1}\{\Gamma_2^l \cap \partial\Omega\} = 0.$$

Приймемо: $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$.

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ позначимо:

$$Q_{t_1,t_2}^l = \Omega^l \times (t_1, t_2), \quad \Omega_\tau^l = \{(x,t) : x \in \Omega^l, t = \tau\},$$

X^l — такий замкнений підпростір, що виконуються включення

$$\{w \in W^{1,p}(\Omega^l) : w|_{\Gamma_1^l} = 0\} \subset X^l \subset W^{1,p}(\Omega^l), \quad p \in (1,2),$$

K^l — опукла замкнена підмножина у V^l, $V^l = L^2(\Omega^l) \cap X^l$, яка містить нуль, $U(Q_{0,T}^l) = L^2(Q_{0,T}^l) \cap L^p(0,T;X^l)$.

На запроваджені простори X^s та множини K^s, $s \in \mathbb{N}$, накладемо умову: для будь-яких $l, s \in \mathbb{N}$, $l < s$, звуження на Ω^l елементів з простору X^s (відповідно, K^s) належить до X^l (відповідно, K^l).

Нехай

$$\Psi = \{\psi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mid \psi \geq 0, \quad \exists\, s \in \mathbb{N} \quad \mathrm{supp}\,\psi \subset \overline{\Omega^s}\},$$

$$L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall\, l \in \mathbb{N} \quad u \in L^2(\Omega^l)\},$$

$$L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}}) = \{u : Q_{0,T} \to \mathbb{R} \mid \forall\, l \in \mathbb{N} \quad u \in L^2(Q_{0,T}^l)\},$$

$$U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) = \{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}}) \mid \forall\, l \in \mathbb{N} \quad u \in U(Q_{0,T}^l)\},$$

$$\mathcal{K} = \{u \in U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) \mid \forall\, l \in \mathbb{N} \text{ і для майже всіх } t \in (0,T) \quad u(\cdot,t) \in K^l\}.$$

Припускатимемо, що функції $a_1, \ldots, a_n, c, f, u_0$ задовольняють умови:

(A): $0 < a_0 \le a_i(x,t) \le a^0 < \infty$, $i = \overline{1,n}$, для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(C): $0 < c_0 \le c(x,t) \le c^0 < \infty$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;
(F): $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$;
(U): $u_0 \in \mathcal{K}$.

Розглянемо параболічну варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Big[v_t(v-u)\psi + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}((v-u)\psi)_{x_i} + c(x,t)u(v-u)\psi -$$

$$- f(x,t)(v-u)\psi\Big] dxdt \ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v-u|^2\psi dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |v-u_0|^2\psi dx. \quad (1)$$

Означення. *Функцію* $u \in \mathcal{K} \cap C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ *називатимемо розв'язком параболічної варіаційної нерівності* (1), *якщо для всіх* $\tau \in (0,T]$, $\psi \in \Psi$ *і будь-яких* $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{loc}(\overline{Q_{0,T}})$ *ця функція задовольняє* (1).

Зауваження 1. Нехай u — розв'язок нерівності (1), $\psi \in \Psi$, $v \in \mathcal{K}$, $v_t \in L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{Q_{0,T}})$. Якщо $v(\cdot,0) = u_0(\cdot)$, то з (1) випливає, що

$$\int_{\Omega_\tau} |v-u|^2\psi dx \to 0, \quad \tau \to +0.$$

Тому для кожного $l \in \mathbb{N}$ маємо, що $\lim\limits_{\tau\to+0} u(\cdot,\tau) = \lim\limits_{\tau\to+0} v(\cdot,\tau)$ в просторі $L^2(\Omega^l)$. Оскільки $u, v \in C([0,T]; L^2_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, то з отриманої рівності границь та припущення на v одержимо, що виконується умова

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Якщо B — банахів простір, то через B^* позначимо простір лінійних неперервних функціоналів, визначених на B. Скалярний добуток між B^* та B позначатимемо $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$. Для спрощення замість, наприклад, $u(\cdot,t)$, будемо писати $u(t)$.

Нехай $l \in \mathbb{N}$. Для майже всіх $t \in (0,T)$ визначимо оператори $A^l(t) : V^l \to [V^l]^*$ таким чином:

$$\langle A^l(t)v^1, v^2\rangle_{V^l} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_t^l} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|v^1_{x_i}(x)|^{p-2}v^1_{x_i}(x)v^2_{x_i}(x) + c(x,t)v^1(x)v^2(x)\Big] dx,$$

де $v^1, v^2 \in V^l$. Для довільних сталих $R, \omega > 0$ та $\beta = \frac{3p-2}{2-p} + \omega$ визначимо функцію $\varphi^R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ формулою

$$\varphi^R(x) = \begin{cases} \left(\frac{R^2-|x|^2}{R}\right)^\beta, & |x| \le R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases} \tag{3}$$

Легко бачити, що для всіх r матимемо

$$\frac{|\varphi^R_{x_i}(x)|^r}{|\varphi^R(x)|^{r-1}} = \frac{|\frac{2\beta}{R^\beta} x_i (R^2 - |x|^2)^{(\beta-1)}|^r}{|\frac{1}{R^\beta}(R^2 - |x|^2)^\beta|^{r-1}} =$$
$$= \frac{(2\beta)^r}{R^\beta} \frac{|x_i|^r}{(R^2 - |x|^2)^{r-\beta}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad |x| < R.$$

Якщо $l > 0$, $2l < R$, то $R - |x| \ge R - l \ge R/2$ для $x \in \Omega^l$. Тому виконується оцінка $\varphi^R(x) = ((R-|x|)(R+|x|)/R)^\beta \ge (R/2)^\beta$, $x \in \Omega^l$. Очевидно, що звуження функції φ^R на $\overline{\Omega}$ належить до Ψ і для всіх $x \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність $\varphi^R(x) \le R^\beta$. Відзначимо, що функцію (3) використано в роботі [11] (див. також [1]).

Неважко показати, що якщо $q \in (1, 2]$, то для всіх $r, s \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$0 \le (|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r - s) \le 2^{2-q}|r - s|^q. \tag{4}$$

Нам буде потрібне таке твердження.

Лема. *Нехай $k \in \mathbb{N}$, $R, \omega > 0$, $R < k$, виконуються умови* **(A)**, **(C)**, $u, v \in U(Q^k_{0,T})$,

$$J(\varphi^R) = \int_{t_1}^{t_2} \langle A^k u - A^k v, (u - v)\varphi^R \rangle_{V^k} dt,$$

де функція φ^R визначена в (3), $0 \le t_1 < t_2 \le T$. Тоді для кожного $\kappa > 0$ існує така стала $C_1(\kappa) > 0$ (яка не залежить від t_1, t_2, u, v, R), що

$$J(\varphi^R) \ge (a_0 - \kappa) \int_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i})\varphi^R dxdt +$$
$$+ c_0 \int_{Q_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R dxdt - C_1(\kappa) R^{(n-1+\omega)\frac{2-p}{2}} \Big(\int_{Q_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R dxdt \Big)^{p/2}. \tag{5}$$

Доведення. Якщо виконуються умови леми, то

$$J(\varphi^R) \geq \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[a_0 \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}) \times$$

$$\times (u_{x_i} - v_{x_i}) + c_0|u-v|^2\Big]\varphi^R dxdt - I, \quad (6)$$

де $I = \int_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot ||u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}| \cdot |u-v| |\varphi^R_{x_i}| \; dxdt$. З нерівності (4) матимемо, що для довільних $\tau, s \in \mathbb{R}$

$$||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s|^{p'} = ||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s| \cdot ||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s|^{p'-1} \leq$$

$$\leq C_2(p)||\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s| \cdot |\tau - s| = C_2(p)(|\tau|^{p-2}\tau - |s|^{p-2}s)(\tau - s), \quad (7)$$

де $p' = p/(p-1)$. Нехай $r = \frac{2p}{2-p} = 1 + \frac{p'+2}{p'-2} > 1$ $(\frac{1}{p'} + \frac{1}{2} + \frac{1}{r} = 1)$. Тоді до I можна застосувати нерівність Гельдера для трьох функцій [7, с. 75] зі сталими $p', 2, r$. Використовуючи (7) та нерівність Юнга, одержимо

$$I = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} ||u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}|(\varphi^R)^{1/p'} \cdot |u-v|(\varphi^R)^{1/2} \frac{|a_i| \cdot |\varphi^R_{x_i}|}{\varphi^R} \times$$

$$\times (\varphi^R)^{1/r} dxdt \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} ||u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i}|^{p'} \varphi^R dxdt \Big)^{1/p'} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R dxdt \Big)^{1/2} \cdot \Big(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} \frac{|a_i|^r \cdot |\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}} dxdt \Big)^{1/r} \leq$$

$$\leq \kappa \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} - |v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i})(u_{x_i} - v_{x_i})\varphi^R dxdt +$$

$$+ C_3 \Big(\int\limits_{\Omega^R} \frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}} dx \Big)^{p/r} \cdot \Big(\int\limits_{Q^R_{t_1,t_2}} |u-v|^2 \varphi^R dxdt \Big)^{p/2}. \quad (8)$$

Запроваджуючи полярні координати в $\mathbb{R}^n$, дістаємо

$$\int\limits_{\Omega^R} \frac{|\varphi^R_{x_i}|^r}{|\varphi^R|^{r-1}} dx \leq \frac{(2\beta)^r}{R^\beta} \int\limits_{|x|<R} \frac{|x_i|^r}{(R^2 - |x|^2)^{r-\beta}} dx \leq \frac{C_4}{R^\beta} \int\limits_0^R \frac{\rho^r \rho^{n-1}}{(R^2 - \rho^2)^{r-\beta}} d\rho \leq$$

$$\le C_4 R^{\frac{2p}{2-p}+n-2-\frac{3p-2}{2-p}-\omega} \int\limits_0^R \frac{\rho}{(R^2-\rho^2)^{\frac{2p}{2-p}-\frac{3p-2}{2-p}-\omega}}\,d\rho =$$

$$= C_4 R^{n-1-\omega} \int\limits_0^R \frac{\rho}{(R^2-\rho^2)^{1-\omega}}\,d\rho = C_5 R^{n-1+\omega}.$$

З отриманої нерівності та оцінок (6), (8) дістаємо оцінку (5).

Лему доведено.

Теорема. *Нехай*

$$1 < p < 2 \quad \textit{при} \quad n = 1, 2, \qquad \frac{2n}{n+2} < p < 2 \quad \textit{при} \quad n \ge 3. \tag{9}$$

Тоді варіаційна нерівність (1) *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Нехай u^1, u^2 — два різні розв'язки нерівності (1). Нехай $w = (u^1+u^2)/2$, а функція w_m, $m \in \mathbb{N}$, є розв'язком такої задачі:

$$\frac{1}{m}\, w_{m\,t}(t) + w_m(t) = w(t), \quad t \in (0,T), \qquad w_m(0) = (u_0^1 + u_0^2)/2.$$

З результатів роботи [9, с. 59] відомо, що $w_m \in \mathcal{K}$ і існує підпослідовність $\{w_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, яка для всіх $k \in \mathbb{N}$ збігається до w слабко в $U(Q^k_{0,T})$ та сильно в $L^2(Q^k_{0,T})$. Тому з леми 1.18 [4, с. 39] випливає існування підпослідовності (позначимо її знову $\{w_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$) такої, що для майже всіх $t \in (0,T)$

$$||w_{m_j}(t) - w(t); L^2(\Omega^k)|| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Оскільки w_{m_j}, $w \in C([0,T]; L^2(\Omega^k))$, то для всіх $t \in (0,T)$ послідовність $w_{m_j}(t)$ збігається до $w(t)$ сильно в $L^2(\Omega^k)$ при $j \to \infty$.

Нехай $\psi \in \Psi$. Існує $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\psi = 0$ в $\Omega \setminus \Omega^l$. Покладаючи в нерівності (1) $v = w_{m_j}$, $j \in \mathbb{N}$ (зауважимо, що $(w_{m_j}(t) - u^r(t))\psi \in V^l$ для всіх $t \in (0,T)$, $j \in \mathbb{N}$, $r = 1,2$), отримаємо, що

$$\int\limits_0^\tau \langle A^l u^r, (w_{m_j} - u^r)\psi\rangle_{V^l} dt + \int\limits_{Q_{0,\tau}} (w_{m_j\,t} - f_r)(w_{m_j} - u^r)\psi\,dxdt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |w_{m_j} - u^r|^2 \psi\,dx, \quad r = 1, 2.$$

Додаючи ці дві нерівності та використовуючи оцінку

$$w_{m_j t}(w_{m_j} - w) = -(m_j)^{-1}|w_{m_j t}|^2 \le 0,$$

дістаємо, що

$$\int_0^\tau [\langle A^l u^1, (w_{m_j} - u^1)\psi\rangle_{V^l} + \langle A^l u^2, (w_{m_j} - u^2)\psi\rangle_{V^l}]dt +$$

$$+ \int_{Q_{0,\tau}} [-f(w_{m_j} - u^1) - f(w_{m_j} - u^2)]\psi dxdt \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} [|w_{m_j} - u^1|^2 + |w_{m_j} - u^2|^2]\psi dx.$$

Спрямовуючи $j \to \infty$, отримуємо

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |u^1 - u^2|^2 \psi dx + \int_0^\tau \langle A^l u^1 - A^l u^2, (u^1 - u^2)\psi\rangle_{V^l} dt \leq 0, \quad \tau \in [0, T]. \quad (10)$$

Покладемо в нерівності (10) $\psi = \varphi^R$, $R > 0$. Тоді (10) та оцінка (5), в якій $\kappa = a_0$, дають нерівність

$$c_0 y(\tau) - P(R) y^{p/2}(\tau) \leq 0,$$

де $P(R) = C_1(a_0) R^{(n-1+\omega)\frac{2-p}{2}}$, C_1 — стала з леми, а

$$y(\tau) = \int_{Q_{0,\tau}} |u^1 - u^2|^2 \varphi^R dxdt, \quad \tau \in (0, T].$$

Тому

$$c_0 y^{p/2}(T)\left(y^{\frac{2-p}{2}}(T) - P(R)/c_0\right) \leq 0.$$

Звідси отримуємо нерівність $y^{\frac{2-p}{2}}(T) \leq P(R)/c_0$, тобто

$$\left(\int_{Q_{0,T}} |u^1 - u^2|^2 \varphi^R dxdt\right)^{\frac{2-p}{2}} \leq C_6 R^{(n-1+\omega)\frac{2-p}{2}}, \quad (11)$$

де стала C_6 не залежить від R. Вище встановлено, що $\varphi^R(x) \geq (R/2)^\beta$, де $x \in \Omega^l$, $l \in \mathbb{N}$, $R > 2l$. Тому з (11) одержуємо оцінку

$$\int_{Q^l_{0,T}} |u^1 - u^2|^2 dxdt \leq \frac{C_7}{R^\beta} \int_{Q^R_{0,T}} |u^1 - u^2|^2 \varphi^R dxdt \leq$$

$$\leq C_8 R^{-\frac{3p-2}{2-p} + n - 1} = C_8 R^{n - \frac{2p}{2-p}}, \quad (12)$$

де стала C_8 не залежить від R. Оскільки з умови (9) випливає нерівність $n - \frac{2p}{2-p} < 0$, то спрямовуючи в нерівності (12) $R \to +\infty$, отримаємо, що

$u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q^l_{0,T}$, $l \in \mathbb{N}$. Отже, $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. Отримана суперечність доводить теорему.

Зауваження 2. Нехай $X^l = \{w \in W^{1,p}(\Omega^l) : w|_{\Gamma^l_1} = 0\}$, $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T})$. Такими ж міркуваннями, як у [8, с. 254], можна встановити, що достатньо гладкий розв'язок варіаційної нерівності (1) є узагальненим розв'язком задачі

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (a_i |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i} + cu = f \quad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{13}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{14}$$

Зауваження 3. Нехай $\mathcal{K} = U_{\mathrm{loc}}(Q_{0,T}) \cap \{v : v \geq 0 \text{ в } Q_{0,T}\}$. Тоді достатньо гладкий розв'язок u параболічної варіаційної нерівності (1) задовольняє рівняння (13) на множині $\Phi = \{(x,t) \in Q_{0,T} : u(x,t) > 0\}$, дорівнює нулю в $Q_{0,T} \setminus \Phi$ та задовольняє умови (14) (див. [8, с. 293]).

[1] *Бокало Н.М.* Задача Фурье для полулинейных параболических уравнений произвольного порядка в неограниченных областях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – Вып. 10. – С. 9–15.

[2] *Бугрій О.М.* Системи параболічних варіаційних нерівностей в необмеженій області // Вісник Львів. ун-ту. – Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 53. – С. 77–86.

[3] *Бугрій О.М.* Параболічні варіаційні нерівності без початкових умов: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2001.

[4] *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.

[5] *Калашников А.С.* О задаче Коши в классах растущих функций для некоторых квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 4. – С. 682–691.

[6] *Лавренюк С.П.* Параболические вариационные неравенства без начальных условий // Дифференц. уравнения. – 1996. – **32**, № 10. – С. 1–5.

[7] *Ладыженская О.А., Солонников В.А, Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М., 1967.

[8] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

[9] *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений. – К., 1985.

[10] *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнений теплопроводности // Мат. сб. - 1935. - **42**, № 2. - С. 199-216.

[11] *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. and Anal. - 1989. - Vol. 106, № 3. - P. 217-241.

[12] *Di Benedetto E., Herero M.A.* On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equation // Transaction of the AMS. 1989. - Vol. 314, № 1. - P. 187-224.

[13] *Di Benedetto E., Herero M.A.* Non-negative solutions of the evolution p-Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Arch. Ration. Mech. and Anal. - 1990. - Vol. 111, № 3. - P. 225-290.

ABOUT UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF SOME NONLINEAR PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITY IN UNBOUNDED DOMAIN

Oleh BUHRII

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Let $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a unbounded domain, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$. We considered some nonlinear parabolic variational inequality in $Q_{0,T}$. The uniqueness of the solution u of this inequality is proved without increasing conditions of u at $|x| \to +\infty$.