ПРО КОРЕКТНІСТЬ ОДНІЄЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЛАБКОВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

©2007 р. Надія ГРИНЦІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 11 вересня 2007 р.

В області з вільними межами досліджено обернену задачу визначення залежного від часу старшого коефіцієнта в повному параболічному рівнянні зі слабким степеневим виродженням. За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку встановлено умови існування локального за часом класичного розв'язку цієї задачі. Отримано також умови єдиності розв'язку для всіх $t \in [0,T]$.

Обернена задача визначення залежного від часу старшого коефіцієнта в повному параболічному рівнянні в області з вільними межами досліджена в [1]. Подібні задачі в області з відомими межами вивчались у [3, 5] у випадках сильного та слабкого степеневого виродження. Поєднанню цих задач, а саме визначенню старшого коефіцієнта в слабковиродженому параболічному рівнянні в області з вільною межею, присвячена робота [2]. Дана праця є продовженням досліджень у вказаному напрямку. Її мета — знаходження невідомого коефіцієнта та розв'язку параболічного рівняння зі слабким степеневим виродженням в області з двома невідомими межами.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) \colon h_1(t) < x < h_2(t), 0 < t < T\}$ з невідомими межами $x = h_1(t)$ та $x = h_2(t)$ розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, в рівнянні

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \qquad (1)$$

УДК 517.95; MSC 2000: 30R35

з початковою умовою

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad h_1(0)\le x\le h_2(0), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(h_1(t),t)=\mu_1(t),\quad u(h_2(t),t)=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{3}$$

та умовами перевизначення вигляду

$$a(t)t^{\beta}u_x(h_1(t),t)=\mu_3(t),\quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx=\mu_4(t),\quad 0\le t\le T, \tag{5}$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} xu(x,t)dx=\mu_5(t),\quad 0\le t\le T, \tag{6}$$

де $h_1(0)=h_{10}$ та $0<\beta<1$ — задані числа.

Заміною змінних $y=\dfrac{x-h_1(t)}{h_2(t)-h_1(t)}$, $t=t$, задачу (1)–(6) зведемо до оберненої відносно невідомих $(a(t),h_1(t),h_3(t)=h_2(t)-h_1(t),v(y,t)=u(yh_3(t)+h_1(t),t))$ в області $Q_T=\{(y,t):0<y<1,0<t<T\}$:

$$\begin{gathered}v_t=\frac{a(t)t^{\beta}}{h_3^2(t)}v_{yy}+\frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)+h_1'(t)+yh_3'(t)}{h_3(t)}v_y+\\+c(yh_3(t)+h_1(t),t)v+f(yh_3(t)+h_1(t),t),\quad (y,t)\in Q_T,\end{gathered} \tag{7}$$

$$v(y,0)=\varphi(yh_3(0)+h_1(0)),\quad 0\le y\le 1, \tag{8}$$

$$v(0,t)=\mu_1(t),\ v(1,t)=\mu_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{9}$$

$$\frac{a(t)t^{\beta}}{h_3(t)}v_y(0,t)=\mu_3(t),\quad 0\le t\le T, \tag{10}$$

$$h_3(t)\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_4(t),\quad 0\le t\le T, \tag{11}$$

$$h_1(t)\mu_4(t)+h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy=\mu_5(t),\quad 0\le t\le T. \tag{12}$$

Означення. *Під розв'язком задачі* (7)–(12) *будемо розуміти набір функцій* $(a, h_1, h_3, v) \in C[0,T] \times (C^1[0,T])^2 \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0$, $h_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$, *що задовольняє умови* (7)–(12).

2. Існування розв'язку задачі (7)–(12).

Теорема 1. *При виконанні умов:*

*A*1) $\varphi \in C^1[h_{10}, +\infty)$, $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [h_{10}, +\infty)$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,4,5$, $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2,4$, $b, c, f \in C^{1,0}([h_{10}, +\infty) \times [0,T])$, $f(x,t) \geq 0$, $c(x,t) \leq 0$, $(x,t) \in [h_{10}, +\infty) \times [0,T]$;

*A*2) $\mu_3 \in C[0,T]$, $\mu_3(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\exists \lim\limits_{t \to +0} \mu_3(t) t^{-\beta} = M_0 > 0$;

*A*3) $\varphi(h_{10}) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_2(0)) = \mu_2(0)$;

можна вказати таке число $T_0 \in (0,T]$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі* (7)–(12) *існує при* $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t \leq T_0$.

Доведення. Визначимо початкове значення функції $x = h_2(t)$, яка задає невідому частину межі. Згідно з умовами (2), (5) та припущеннями теореми існує єдине значення $h_2(0) > h_{10}$, яке є розв'язком рівняння

$$\int\limits_{h_{10}}^{h_2(0)} \varphi(x) dx = \mu_4(0).$$

Позначимо через h_{30} різницю $h_2(0) - h_{10}$. Застосовуючи принцип максимуму [4, с. 25] для розв'язку задачі (7)–(9), отримуємо оцінку функції $v(y,t)$ знизу сталою, яка залежить від вихідних даних:

$$v(y,t) \geq M_1 > 0, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T. \tag{13}$$

Тоді, згідно з умовами (11), (12), матимемо

$$h_3(t) \leq \frac{1}{M_1} \max_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_1 < \infty, \quad t \in [0,T], \tag{14}$$

$$|\, h_1(t)| \leq \frac{\mu_5(t)}{\mu_4(t)} + \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t) dy} \equiv H_2, \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Використовуючи знову принцип максимуму для розв'язку задачі (7)–(9), одержуємо

$$v(y,t) \leq M_2 < +\infty, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{16}$$

а згідно з (11),

$$h_3(t) \geq \frac{1}{M_2} \min_{[0,T]} \mu_4(t) \equiv H_0 > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Позначимо: $q(t) = \dfrac{a(t)}{h_3^2(t)}$, $p(t) = h_1'(t)$, $r(t) = h_3'(t)$, $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. Задачу (7)–(12) зведемо до системи рівнянь. Припустивши тимчасово, що функції $a(t)$, $h_1(t)$, $h_3(t)$ є відомими, пряму задачу (7)–(9) замінимо еквівалентною системою інтегральних рівнянь:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau)\Big(c(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau) +$$
$$+\frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) + p(\tau) + \eta r(\tau)}{h_3(\tau)}\omega(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \quad (18)$$

$$\omega(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Big(c(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau) +$$
$$+\frac{b(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau) + p(\tau) + \eta r(\tau)}{h_3(\tau)}\omega(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau, \quad (y,t) \in \overline{Q}_T, \quad (19)$$

де $G_k(y,t,\eta,\tau)$, $k = 1,2$, — функції Гріна відповідно першої та другої крайових задач для рівняння

$$v_t = q(t)t^\beta v_{yy} + f(yh_3(t) + h_1(t),t). \quad (20)$$

Ці функції визначаються формулою

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) +\right.$$
$$\left.+(-1)^k \exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \quad k = 1,2, \quad \text{де } \theta(t) = \int_0^t q(\tau)\tau^\beta d\tau. \quad (21)$$

Розв'язок рівняння (20) з умовами (8), (9) позначимо через $v_0(y,t)$. Цей розв'язок має вигляд

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_{30} + h_{10})d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\tau^\beta q(\tau) \times$$
$$\times \mu_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\,\tau^\beta q(\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \times$$
$$\times f(\eta h_3(\tau) + h_1(\tau),\tau)d\eta d\tau. \quad (22)$$

Диференціюючи $v_0(y,t)$ за змінною y отримуємо $\omega_0(y,t)$:

$$\omega_0(y,t) = h_{30}\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{30}+h_{10})d\eta - \int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\times$$

$$\times\mu_1'(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times f(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau. \quad (23)$$

З умов (10)–(12) знаходимо, що

$$q(t)t^\beta\omega(0,t) = \frac{\mu_3(t)}{h_3(t)}, \quad t\in[0,T], \quad (24)$$

$$h_3(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int\limits_0^1 v(y,t)dy}, \quad t\in[0,T], \quad (25)$$

$$h_1(t)\mu_4(t) = \mu_5(t) - h_3^2(t)\int\limits_0^1 yv(y,t)dy, \quad t\in[0,T]. \quad (26)$$

Продиференціюємо рівності (11), (12). Враховуючи рівняння (7), умови (8), (9) та використовуючи інтегрування частинами, приходимо до системи:

$$p(t)\mu_1(t) = \frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)} - \mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)}+1\right) - b(h_1(t),t)\mu_1(t) - h_3(t)q(t)t^\beta\times$$

$$\times(\omega(0,t)+\mu_1(t)-\mu_2(t)) + \int\limits_0^1 b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)dy - h_3(t)\times$$

$$\times\int\limits_0^1 (1-y)\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t) - c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t) -$$

$$-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy, \quad t\in[0,T], \quad (27)$$

$$p(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)) + r(t)\mu_2(t) = \mu_4'(t) - h_3(t)q(t)t^\beta(\omega(1,t)-\omega(0,t)) +$$

$$+b(h_1(t),t)\mu_1(t) - b(h_3(t)+h_1(t),t)\mu_2(t) + h_3(t)\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t) - c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t) -$$

$$-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy, \quad t\in[0,T]. \quad (28)$$

Таким чином, задачу (7)–(12) зведено до системи рівнянь (18), (19), (24)–(28) з невідомими $(q(t), h_1(t), h_3(t), p(t), r(t), v(y,t), \omega(y,t))$. Задача (7)–(12) та згадана система еквівалентні в такому сенсі: якщо $(a(t), h_1(t), h_3(t), v(y,t))$ — розв'язок задачі (7)–(12), то $q(t) = \dfrac{a(t)}{h_3^2(t)}, h_1(t), h_3(t), p(t) = h_1'(t), r(t) = h_3'(t), v(y,t), \omega(y,t) = v_y(y,t)) \in (C[0,T])^5 \times (C(\overline{Q}_T))^2$ — розв'язок системи (18), (19), (24)–(28). Покажемо, що правильним є і обернене твердження: якщо $(q(t), h_1(t), h_3(t), p(t), r(t), v(y,t), \omega(y,t))$ — неперервний розв'язок системи (18), (19), (24)–(28), то $a \in C[0,T], h_1, h_3 \in C^1[0,T], v \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (7)–(12).

Розглянемо рівняння (18). Припущення теореми дозволяють продиференціювати це рівняння за змінною y. Порівнюючи праві частини отриманої рівності та рівності (19), отримуємо, що $\omega(y,t) = v_y(y,t)$. Підставляючи замість $\omega(y,t)$ функцію $v(y,t)$ в (18), матимемо, що $v(y,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і ця функція задовольняє рівняння

$$v_t = q(t)t^\beta v_{yy} + \frac{b(yh_3(t)+h_1(t),t)+p(t)+yr(t)}{h_3(t)}v_y + \\ +c(yh_3(t)+h_1(t),t)v + f(yh_3(t)+h_1(t),t) \tag{29}$$

та умови (8), (9).

Враховуючи гладкість функцій $\mu_4(t), \mu_5(t), v(y,t)$, з рівностей (25), (26) одержуємо, що $h_1, h_3 \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо ці рівності, використовуючи рівняння (29) та умови (8), (9):

$$\frac{h_1'(t)\mu_4(t)}{h_3(t)} - h_3'(t)\left(\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)} - 2\int_0^1 yv(y,t)dy\right) + p(t)\left(\mu_1(t) - \frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}\right) + \\ +r(t)\left(\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)} - 2\int_0^1 yv(y,t)dy\right) = \frac{\mu_5'(t)}{h_3(t)} - \mu_4'(t)\left(\frac{h_1(t)}{h_3(t)}+1\right) - \\ -b(h_1(t),t)\mu_1(t) - h_3(t)q(t)t^\beta(\omega(0,t)+\mu_1(t)-\mu_2(t)) + \\ +\int_0^1 b(yh_3(t)+h_1(t),t)v(y,t)dy - h_3(t)\int_0^1 \Big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t) - \\ -c(yh_3(t)+h_1(t),t))(1-y)v(y,t) - f(yh_3(t)+h_1(t),t)\Big), \quad t \in [0,T], \tag{30}$$

$$\frac{h_3'(t)\mu_4(t)}{h_3(t)} + p(t)(\mu_2(t)-\mu_1(t)) + r(t)\left(\mu_2(t) - \frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}\right) = \mu_4'(t) -$$

$$-h_3(t)q(t)t^{\beta}(\omega(1,t)-\omega(0,t))+b(h_1(t),t)\mu_1(t)-b(h_3(t)+h_1(t),t)\times$$
$$\times\mu_2(t)+h_3(t)\int\limits_0^1\big((b_x(yh_3(t)+h_1(t),t)-c(yh_3(t)+h_1(t),t))v(y,t)-$$
$$-f(yh_3(t)+h_1(t),t)\big)dy,\quad t\in[0,T]. \tag{31}$$

Від рівності (31) віднімемо рівність (28), беручи до уваги, що $\omega(y,t)=v(y,t)$. Отримаємо

$$\frac{\mu_4(t)}{h_3(t)}(r(t)-h_3'(t))=0,$$

звідки, враховуючи умови теореми, маємо $r(t)=h_3'(t)$. Віднімаючи тепер від рівності (30) рівність (27), аналогічно знаходимо, що $p(t)=h_1'(t)$. Підставляючи у формулу (29) замість $r(t)$, $p(t)$ знайдені значення, а замість $q(t)$ — дріб $\dfrac{a(t)}{h_3^2(t)}$, приходимо до рівняння (7). Після цього умови (24), (25), (26) є еквівалентними відповідно до умов (10), (11), (12), що й завершує доведення еквівалентності.

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (18), (19), (24)–(28) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи.

Розглянемо рівняння (19). Оскільки $\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta=1$, то, згідно з умовою (A1) теореми, матимемо додатність першого інтеграла з (23), всі інші доданки у (19) та (23) при $t\to 0$ прямують до нуля. Отже, існує таке число t_1, $0<t_1\le T$, що виконується нерівність

$$\frac{h_{30}}{2}\int\limits_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_{30}+h_{10})d\eta\ge\int\limits_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\bigg(\frac{b(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)+p(\tau)+\eta r(\tau)}{h_3(\tau)}\omega(\eta,\tau)+$$
$$+c(\eta h_3(\tau)+h_1(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\bigg)d\eta d\tau,\quad t\in[0,t_1].$$

У результаті з (19) отримуємо

$$\omega(y,t) \geq \frac{1}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_{30}+h_{10}) \equiv M_3 > 0, \quad (y,t)\in[0,1]\times[0,t_1]. \tag{32}$$

Враховуючи умови теореми, з нерівності (32) та рівності (24) знаходимо оцінку для $q(t)$ зверху:

$$q(t) \leq \frac{\mu_3(t)}{H_0 M_3 t^\beta} \leq A_1 < +\infty, \quad t\in[0,t_1]. \tag{33}$$

Введемо позначення $W(t) = \max_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|$. З рівнянь (27), (28) отримуємо

$$|p(t)| \leq C_1 + C_2 q(t)t^\beta W(t), \;\; |r(t)| \leq C_3 + C_4 q(t) t^\beta W(t), \quad t\in[0,t_1], \tag{34}$$

Беручи до уваги відомі оцінки функції Гріна [6, с. 12]

$$\begin{gathered} G_2(y,t,\eta,\tau) \leq C_5\left(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right), \\ \int\limits_0^1 |G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta \leq \frac{C_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \end{gathered} \tag{35}$$

нерівність (34), з формул (19), (23) знаходимо, що

$$\begin{gathered} W(t) \leq C_7 + C_8\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_9\int\limits_0^t \frac{W(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau + \\ +C_{10}\int\limits_0^t \frac{q(\tau)\tau^\beta W^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau. \end{gathered} \tag{36}$$

Із рівності (24) випливає нерівність $\dfrac{1}{q(t)} \leq \dfrac{h_3(t)t^\beta W(t)}{\mu_3(t)}$. Застосовуючи цю нерівність до першого та другого інтегралів у формулі (36), одержимо

$$\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leq H_1\int\limits_0^t \frac{q(\tau)\tau^\beta W(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

$$\int\limits_0^t \frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leq H_1\int\limits_0^t \frac{q(\tau)\tau^\beta W^2(\tau)d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Підставляючи дві останні нерівності у формулу (36) та враховуючи позначення $W_1(t) = W(t) + 1$, приходимо до нерівності

$$W_1(t) \leq C_{11} + C_{12} \int\limits_0^t \frac{q(\tau)\tau^{\beta} W_1^2(\tau) d\tau}{\mu_3(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}. \tag{37}$$

Розв'язок нерівності (37) існує при $t \in [0, t_2]$, де число $t_2, 0 < t_2 \leq T$, визначається сталими C_{11}, C_{12} (див. [2]). Отже,

$$|\omega(y,t)| \leq M_4, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0, t_2]. \tag{38}$$

Остання нерівність дає змогу оцінити $q(t)$ знизу, виходячи з (24):

$$q(t) \geq \frac{\mu_3(t)}{H_1 M_4 t^{\beta}} \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, t_2]. \tag{39}$$

Використовуючи (33), (38), з (34), знаходимо оцінки функцій $p(t), q(t)$:

$$|\, p(t)| \leq M_5, \quad |\, r(t)| \leq M_6, \quad t \in [0, t_2]. \tag{40}$$

Таким чином, оцінки розв'язків системи (18), (19), (24)–(28) встановлено. Подамо згадану систему у вигляді операторного рівняння $w = Pw$, де $w = (q(t), h_1(t), h_3(t), p(t), r(t), v(y,t), \omega(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (18), (19), (24)–(28). Через N позначимо множину $N = \{(q, h_1, h_3, p, r, v, \omega) \in (C[0, T_0])^5 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : A_0 \leq q(t) \leq A_1, |\, h_1(t)| \leq H_2, H_0 \leq h_3(t) \leq H_1, |p(t)| \leq M_5, |r(t)| \leq M_6, M_1 \leq v(y,t) \leq \leq M_2, M_3 \leq \omega(y,t) \leq M_4\}$, де $T_0 = \min\{t_1, t_2\}$. Визначені оцінки дають право стверджувати, що множина N задовольняє умовам теореми Шаудера, а оператор P переводить її в себе. Те, що оператор P є цілком неперервним, доводиться аналогічно, як у [5] і [6]. Тоді, згідно з теоремою Шаудера, існує розв'язок системи рівнянь (18), (19), (24)–(28), а, отже, і розв'язок задачі (7)–(12) в області Q_{T_0}.

3. Єдиність розв'язку задачі (7)–(12).

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються наступні умови:*

$B1)$ $b, c, f \in C^{1,0}([h_{10}, +\infty) \times [0, T])$, $\varphi \in C^2[h_{10}, +\infty)$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2, 4, 5$;

$B2)$ $\varphi(x) \geq \varphi_0 > 0$, $x \in [h_{10}, +\infty)$, $\mu_4(t) > 0$, $t \in [0, T]$;

$B3)$ $\mu_i(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$, $i = 1, 2$, $\dfrac{\mu_3(t)}{t^{\beta}} \neq 0$, $t \in [0, T]$.

Тоді розв'язок задачі (7)–(12) *є єдиним.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_i(t), h_{1i}(t), h_{3i}(t), v_i(y,t))$, $i=1,2$, задачі (7)–(12). Позначимо:

$$q_i(t)=\frac{a_i(t)}{h_{3i}^2(t)},\quad p_i(t)=\frac{h'_{1i}(t)}{h_{3i}(t)},\quad r_i(t)=\frac{h'_{3i}(t)}{h_{3i}(t)},\quad i=1,2. \tag{41}$$

Різниці $q(t)=q_1(t)-q_2(t)$, $p(t)=p_1(t)-p_2(t)$, $r(t)=r_1(t)-r_2(t)$, $v(y,t)= = v_1(y,t)-v_2(y,t)$ задовольняють рівняння

$$v_t=q_1(t)t^\beta v_{yy}+\left(\frac{b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)}{h_{31}(t)}+p_1(t)+yr_1(t)\right)v_y+$$

$$+c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v+q(t)t^\beta v_{2yy}+\left(p(t)+yq(t)+\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)+\frac{b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)}{h_{32}(t)}\right)v_{2y}+$$

$$+(c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_2+f(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-$$

$$-f(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t),\quad (y,t)\in Q_T, \tag{42}$$

та умови

$$v(y,0)=0,\quad y\in[0,1],\quad v(0,t)=v(1,t)=0,\quad t\in[0,T], \tag{43}$$

$$q_1(t)t^\beta v_y(0,t)+q(t)t^\beta v_{2y}(0,t)=\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right),\quad t\in[0,T], \tag{44}$$

$$\int\limits_0^1 v(y,t)dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\frac{1}{h_{32}(t)}\right),\quad t\in[0,T], \tag{45}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 yv(y,t)dy=\mu_5(t)\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\right)-\mu_4(t)h_{11}(t)\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)}-\right.\\ \left.-\frac{1}{h_{32}^2(t)}\right)-\frac{\mu_4(t)}{h_{32}^2(t)}(h_{11}(t)-h_{12}(t)),\quad t\in[0,T].\end{gathered} \tag{46}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t=q_1(t)t^\beta v_{yy}+\left(\frac{b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)}{h_{31}(t)}+p_1(t)+yr_1(t)\right)v_y+$$

$$+c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v$$

розв'язок задачі (42)–(43) подамо у вигляді

$$v(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(q(\tau)\tau^\beta v_{2\eta\eta}+\Bigg(b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{h_{31}(\tau)}-\frac{1}{h_{32}(\tau)}\right)+\frac{b(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)}+$$

$$+p(\tau)+\eta r(\tau)\Bigg)v_{2\eta}+(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))v_2+$$

$$+f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\Bigg)d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (47)$$

Виразимо $h_{1i}(t)$, $h_{3i}(t)$, $i=1,2$, через $p_i(t)$, $r_i(t)$, $i=1,2$. Згідно з умовою (B2) теореми $h_{31}(0)=h_{32}(0)=h_{30}$. Тоді з (41) отримаємо

$$h_{3i}(t)=h_{30}\exp\left(\int\limits_0^t r_i(\tau)d\tau\right),\quad i=1,2, \quad (48)$$

$$h_{1i}(t)=h_{10}+h_{30}\int\limits_0^t p_i(\tau)\exp\left(\int\limits_0^\tau r_i(\sigma)d\sigma\right)d\tau,\quad i=1,2. \quad (49)$$

Використовуючи рівність $e^x-e^y=(x-y)\int\limits_0^1 e^{y+\tau(x-y)}d\tau$, знаходимо

$$\frac{1}{h_{31}^k(t)}-\frac{1}{h_{32}^k(t)}=-\frac{k}{h_{30}^k}\int\limits_0^t r(\tau)d\tau\times$$

$$\times\int\limits_0^1\exp\Bigg(-k\int\limits_0^\tau(\sigma r(\eta)+r_2(\eta))d\eta\Bigg)d\sigma,\quad k=1,2, \quad (50)$$

$$h_{31}(t)-h_{32}(t)=h_{30}\int\limits_0^t r(\tau)d\tau\int\limits_0^1\exp\Bigg(\int\limits_0^\tau(\sigma r(\eta)+r_2(\eta))d\eta\Bigg)d\sigma, \quad (51)$$

$$h_{11}(t)-h_{12}(t)=h_{30}\int\limits_0^t p(\tau)\exp\Bigg(\int\limits_0^\tau r_2(\eta)d\eta\Bigg)d\tau+h_{30}\int\limits_0^t p_1(\tau)\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^\tau r(\eta)d\eta\int\limits_0^1\exp\left(\int\limits_0^\eta(\sigma r(\rho)+r_2(\rho))d\rho\right)d\sigma\right)d\tau. \qquad (52)$$

Припущення (В1) теореми забезпечує правильність рівності

$$b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t)=(y(h_{31}(t)-h_{32}(t))+$$
$$+h_{11}(t)-h_{12}(t)))\int\limits_0^1 b_x(y(h_{32}(t)+\sigma(h_{31}(t)-h_{32}(t))+h_{12}(t)+$$
$$+\sigma(h_{11}(t)-h_{12}(t))),t)\,d\sigma, \qquad (53)$$

яка виконується також для функцій $c(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t),t)$ та $f(yh_{3i}(t)+h_{1i}(t),t)$, $i=1,2$.

Знайдемо оцінку для функції $v_{2yy}(y,t)$. Через $G_k^{(2)}(y,t,\eta,\tau)$, $k=1,2$, позначимо функції Гріна для рівняння

$$v_{2t}=q_2(t)t^\beta v_{2yy}$$

з крайовими умовами відповідно першого та другого роду. Диференціюючи розв'язок $v_2(y,t)$ задачі (7)–(9), який визначається формулою (22), двічі за змінною y, одержимо

$$v_{2yy}(y,t)=h_{30}^2\int\limits_0^1 G_1^{(2)}(y,t,\eta,0)\,\varphi''(\eta h_{30}+h_{10})d\eta+\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(2)}(y,t,0,\tau)\,\Big(\mu_1'(\tau)-$$
$$-f(h_{12}(\tau),\tau)-\left(\frac{b(h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)}+p_2(\tau)\right)v_{2\eta}(0,\tau)-c(h_{12}(\tau),\tau)\mu_1(\tau)\Big)d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(2)}(y,t,1,\tau)\,\Big(\mu_2'(\tau)-f(h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)-\Big(\frac{b(h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)}+$$
$$+p_2(\tau)+r_2(\tau)\Big)v_{2\eta}(1,\tau)-c(h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\mu_2(\tau)\Big)d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\Big(h_{32}(\tau)f_x(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)+\big(r_2(\tau)+$$
$$+b_x(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)+c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\big)v_{2\eta}(\eta,\tau)+h_{32}(\tau)\times$$

$$\times c_x(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)v_2(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\Big(p_2(\tau)+\eta r_2(\tau)+$$

$$+\frac{b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)}\Big)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau=\sum_{i=1}^4 I_i-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Big(p_2(\tau)+\eta r_2(\tau)+\frac{b(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)}\Big)v_{2\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau,\ (y,t)\in Q_T. \quad (54)$$

Оцінимо доданки, які входять до інтегрального рівняння (54). Оскільки $G_1^{(2)}(y,t,\eta,0)<G_2^{(2)}(y,t,\eta,0)$, то для I_1 отримуємо

$$|I_1|\le h_{30}^2\max_{y\in[0,1]}|\varphi''(yh_{30}+h_{10})|\int\limits_0^1 G_2^{(2)}(y,t,\eta,0)d\eta\le C_{13}.$$

Щоб оцінити I_2, використаємо явний вигляд функції $G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)$:

$$|I_2|\le C_{14}\int\limits_0^t|G_{1\eta}^{(2)}(y,t,0,\tau)|d\tau\le C_{15}\int\limits_0^t\frac{1}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y+2n|\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{(y+2n)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big)d\tau,\quad \text{де}\quad \theta_2(t)=\int\limits_0^t q_2(\tau)\tau^\beta d\tau.$$

Після заміни змінних $z=\dfrac{\tau}{t}$, використовуючи нерівність

$$1\le\frac{1-z^{\beta+1}}{1-z}\le 1+\beta,\quad z\in(0,1),\quad \beta\in(0,1),$$

одержуємо

$$|I_2|\le C_{16}t^{-\frac{3\beta+1}{2}}\int\limits_0^1(1-z)^{-\frac{3}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y+2n|\exp\Big(-\frac{C_{17}(y+2n)^2}{t^{1+\beta}(1-z)}\Big)dz.$$

Покладемо: $\sigma=\sqrt{\dfrac{C_{17}}{t^{1+\beta}z}}(y+2n)$. Тоді

$$|I_2|\le\frac{C_{18}}{t^\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\le\frac{C_{19}}{t^\beta}.$$

Аналогічно, $|I_3| \le \dfrac{C_{20}}{t^\beta}$. Для I_4, беручи до уваги (35), матимемо

$$|I_4| \le C_{21} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 |G_{1\eta}^{(2)}(y,t,\eta,\tau)| d\eta d\tau \le C_{22} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \le$$

$$\le C_{23} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \le C_{24} t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^4 |I_i| \le \frac{C_{25}}{t^\beta}.$$

З оцінки для I_4 випливає, що ядро інтегрального рівняння (54) має інтегровну особливість. Звідси отримуємо таку оцінку для функції $v_{2yy}(y,t)$:

$$|v_{2yy}(y,t)| \le \frac{C_{26}}{t^\beta}. \tag{55}$$

Рівності

$$p_i(t)\mu_1(t) = \frac{\mu_5'(t)}{h_{3i}^2(t)} - \mu_4'(t)\left(\frac{h_{1i}(t)}{h_{3i}^2(t)} + \frac{1}{h_{3i}(t)}\right) - q_i(t)t^\beta(v_{iy}(0,t) - \mu_2(t) + \mu_1(t)) +$$

$$+ \frac{1}{h_{3i}(t)} \int\limits_0^1 (1-y) b(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t) v_{iy}(y,t) dy + \int\limits_0^1 (1-y)(c(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t)) \times$$

$$\times v_i(y,t) + f(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)) dy, \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2, \tag{56}$$

$$r_i(t)\mu_2(t) + p_i(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = \frac{\mu_4'(t)}{h_{3i}(t)} - q_i(t)t^\beta(v_{iy}(1,t) - v_{iy}(0,t)) -$$

$$- \frac{1}{h_{3i}(t)} \int\limits_0^1 b(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t) v_{iy}(y,t) dy - \int\limits_0^1 (c(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t) \times$$

$$\times v_i(y,t) + f(yh_{3i}(t) + h_{1i}(t), t)) dy, \quad t \in [0,T], \quad i = 1,2. \tag{57}$$

дістаємо подібно до того, як і рівності (27), (28). Віднявши їх, отримаємо, що $p(t), r(t)$ задовольняють систему

$$p(t)\mu_1(t) = \mu_5'(t)\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \frac{1}{h_{32}^2(t)}\right) - \left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)} + h_{11}(t)\left(\frac{1}{h_{31}^2(t)} - \right.\right.$$

$$\left.\frac{1}{h_{32}^2(t)}\right) + \frac{1}{h_{32}^2(t)}(h_{11}(t) - h_{12}(t))\Big)\mu_4'(t) - q(t)t^\beta(v_{2y}(0,t) + \mu_1(t) - \mu_2(t)) -$$

$$-q_1(t)t^\beta v_y(0,t) + \frac{1}{h_{31}(t)}\int\limits_0^1 (1-y)\big((b(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) -$$

$$-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_{2y}(y,t)+b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_y(y,t)\big)dy+\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)\int\limits_0^1 (1-y)b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)v_{2y}(y,t)dy + \int\limits_0^1 (1-y)\times$$

$$\times\big((c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)-c(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_2(y,t)+c(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)\times$$

$$\times v(y,t) + f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)\big)dy, \qquad (58)$$

$$r(t)\mu_2(t) + p(t)(\mu_2(t) - \mu_1(t)) = \mu_4'(t)\left(\frac{1}{h_{31}(t)} - \frac{1}{h_{32}(t)}\right) - q_1(t)t^\beta(v_y(1,t) -$$

$$-v_y(0,t)) - q(t)t^\beta(v_{2y}(1,t) - v_{2y}(0,t)) - \frac{1}{h_{31}(t)}\int\limits_0^1 \big((b(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) -$$

$$-b(yh_{32}(t)+h_{12}(t),t))v_{2y}(y,t)+b(yh_{31}(t)+h_{11}(t),t)v_y(y,t)\big)dy+\left(\frac{1}{h_{31}(t)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{h_{32}(t)}\right)\int\limits_0^1 b(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t)v_{2y}(y,t)dy - \int\limits_0^1 \big((c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) -$$

$$-c(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t))v_2(y,t) + c(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t)v(y,t) +$$

$$+f(yh_{31}(t) + h_{11}(t),t) - f(yh_{32}(t) + h_{12}(t),t). \qquad (59)$$

Щоб обчислити $v_y(y,t)$, продиференціюємо рівність (47) за y:

$$v_y(y,t) = \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\bigg(q(\tau)\tau^\beta v_{2\eta\eta} + \bigg(b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{h_{31}(\tau)} - \frac{1}{h_{32}(\tau)}\right) + \frac{b(\eta h_{31}(\tau) + h_{11}(\tau),\tau) - b(\eta h_{32}(\tau) + h_{12}(\tau),\tau)}{h_{32}(\tau)} +$$

$$+p(\tau)+\eta r(\tau)\Big)v_{2\eta}+(c(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-c(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau))v_2+$$

$$+f(\eta h_{31}(\tau)+h_{11}(\tau),\tau)-f(\eta h_{32}(\tau)+h_{12}(\tau),\tau)\Big)d\eta d\tau,\quad (y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (60)$$

Підставивши (47), (50)–(53), (60) в (44), (58), (59), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтери другого роду відносно невідомих $q(t), p(t), r(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З єдиності розв'язку таких систем одержуємо, що

$$q(t)\equiv 0,\quad p(t)\equiv 0,\quad r(t)\equiv 0,\quad t\in[0,T],$$

або, згідно з (41), (48), (49),

$$a_1(t)\equiv a_2(t),\quad h_{11}(t)\equiv h_{12}(t),\quad h_{31}(t)\equiv h_{32}(t),\quad t\in[0,T].$$

Використовуючи це в задачі (42)–(43), знаходимо

$$v_1(y,t)\equiv v_2(y,t),\quad (y,t)\in\overline{Q}_T,$$

що й завершує доведення теореми.

[1] *Баранська І.* Визначення старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні в області з невідомими межами // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 20–38.

[2] *Гринців Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням в області з вільною межею // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 45–59.

[3] *Іванчов М.І., Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 11. – С. 1487–1500.

[4] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.

[5] *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Вип. 49, №3. – С. 7–17.

[6] *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publishers, 2003.

AN INVERSE PROBLEM FOR A WEAKLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATION IN THE DOMAIN WITH FREE BOUNDARIES

Nadiya HRYNTSIV

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

In a domain with free boundaries it is investigated the inverse problem of identification the time-dependent coefficient at the higher-order derivative in a general parabolic equation with a weak power degeneration. With the aid of Schauder's fixed point theorem there are established conditions of existence of the local with respect to time classical solution to this problem. Separately there are obtained the conditions of uniqueness of the solution for all $t \in [0, T]$.