ПРИНЦИП ВІДПОВІДНОСТІ ТА ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

©2007 р. *Наталія ГОЄНКО*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 14 червня 2007 р.

На підставі принципу відповідності послідовності аналітичних функцій багатьох змінних до деякого формального кратного степеневого ряду встановлено критерій рівномірної збіжності послідовності цих функцій.

Відповідність послідовностей мероморфних функцій однієї змінної до формальних степеневих рядів відіграє важливу роль у теорії неперервних дробів та апроксимацій Паде. Зображення аналітичних функцій у вигляді неперервних дробів грунтується на принципі відповідності. Формальне неперервно-дробове розвинення одержується при виконанні умови, що розвинення в ряд Лорана n-го підхідного дробу збігається із заданим рядом Лорана L від z до степеня ν_n включно, де ν_n прямує до нескінченності при зростанні n. Кажуть, що неперервні дроби, визначені таким чином, відповідають рядові L (або функції $f(z)$, для якої L є розвиненням в ряд Лорана). Хоча основні ідеї відповідності належать К.Гаусу, загальна теорія відповідності розроблялась у роботах У.Джоунса, В.Трона, О.Перрона та інших авторів [4, 9]. Загальну теорію відповідності побудовано для послідовностей функцій $\{R_n(z)\}$, мероморфних у початку координат. У частковому випадку $R_n(z)$ може бути підхідним дробом неперервного дробу. Як наслідок, з властивості відповідності $\{R_n(z)\}$ до L (при певних обмеженнях) рівномірна збіжність

УДК 517.526; MSC 2000: 11A95, 11J70, 30B70, 65G30
Дослідження частково підтримані грантом Президії НАН України для молодих вчених (номер держреєстрації 0107U007278)

послідовності $\{R_n(z)\}$ еквівалентна рівномірній обмеженості. У випадку, якщо послідовність $\{R_n(z)\}$ збігається рівномірно, то її границя $f(z)$ є функцією, для якої L є рядом Лорана (див. теорему 5.11 у [4]).

Побудова розвинень функцій багатьох змінних у багатовимірні узагальнення неперервних дробів також грунтується на принципі відповідності. Зокрема, у роботах [5,7,10,11] розглянуто різні конструкції відповідних двовимірних неперервних дробів для подвійних степеневих рядів, а в роботі [2] — відповідні регулярні C-дроби до N-кратних степеневих рядів. Важливим моментом при дослідженні побудованих розвинень є встановлення рівномірної збіжності послідовності n-их апроксимант гіллястого ланцюгового дробу (ГЛД) до функції, яка розвивається в ГЛД.

У даній роботі для послідовності аналітичних функцій, відповідних деякому кратному степеневому ряду P, встановлено критерій еквівалентності рівномірної збіжності і рівномірної обмеженості, а у випадку рівномірної збіжності послідовності показано, що її границя є функцією, для якої P є рядом Тейлора. Цей результат можна застосувати до дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів, у які розвиваються відношення гіпергеометричних функцій багатьох змінних [3].

Порівнюючи встановлений критерій з принципом компактності [8], який стверджує, що з рівномірно обмеженої послідовності аналітичних функцій можна виділити рівномірну збіжну підпослідовність, на послідовність аналітичних функцій накладено умови, при яких рівномірна збіжність та рівномірна обмеженість є еквівалентними.

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх формальних кратних степеневих рядів (ФКСР) вигляду

$$P(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(z),$$

де c_k — комплексні числа, $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $k = (k_1, \ldots k_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, $|k| = k_1 + \ldots + k_N$, $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_N^{k_N}$, $Q_\nu(z)$ — однорідні поліноми степеня ν. Множина $\mathcal{P}$ утворює кільце з одиницею відносно операцій додавання і множення рядів. Визначимо відображення $\lambda : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

$$\lambda(P) = \infty, \quad \text{якщо} \quad P \equiv 0, \quad \lambda(P) = m, \quad \text{якщо} \quad P \not\equiv 0,$$

де m — найменший степінь однорідного полінома, для якого $c_k \neq 0$.

Нехай $\{R_n(z)\}$ — послідовність функцій, голоморфних в початку координат. Функція $R_n(z)$ називається *відповідною* до деякого ФКСР $P(z)$ з порядком відповідності ν_n, якщо розвинення $R_n(z)$ у формальний кратний степеневий ряд збігається з $P(z)$ для всіх однорідних поліномів до степеня $(\nu_n - 1)$ включно. Порядок відповідності $R_n(z)$ визначається так: $\nu_n = \lambda(P - L(R_n))$, де $L(R_n)$ — розвинення функції $R_n(z)$ в ряд Тейлора в точці $z = (0, \dots, 0)$.

Послідовність голоморфних в початку координат функцій $\{R_n(z)\}$ є *відповідною* до деякого ФКСР $P(z)$ в точці $z = (0, \dots, 0)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(P - L(R_n)) = \infty.$$

Легко перевірити, що відображення λ володіє наступними властивостями: для довільних $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ виконуються співвідношення

$$
\begin{aligned}
&1)\ \lambda(P_1P_2) = \lambda(P_1) + \lambda(P_2),\\
&2)\ \lambda(P_1 \pm P_2) \geq \min\{\lambda(P_1), \lambda(P_2)\},\\
&3)\ \lambda(P_1 \pm P_2) = \min\{\lambda(P_1), \lambda(P_2)\}, \quad \text{якщо} \quad \lambda(P_1) \neq \lambda(P_2).
\end{aligned}
$$

Теорема 1. *Нехай $\{R_n(z)\}$ — послідовність функцій, голоморфних в області $D \subset \mathbb{C}^N$, $0 \in D$, і нехай послідовність $\{R_n(z)\}$ є відповідною ФКСР*

$$P(z) = \sum_{|k|=m}^{\infty} c_k z^k, \quad m \geq 0.$$

Тоді
(А) послідовність $\{R_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині з D тоді і тільки тоді, коли $\{R_n(z)\}$ рівномірно обмежена на кожній такій підмножині;
(Б) якщо $\{R_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині з D, то функція $f(z) = \lim_{n\to\infty} R_n(z)$ є голоморфною в D, а $P = L(f)$ є рядом Тейлора для функції $f(z)$ в початку координат.

Доведення. (А)($\Rightarrow$) Очевидно, що з рівномірної збіжності послідовності $\{R_n(z)\}$ випливає її рівномірна обмеженість на компактних підмножинах області D.

($\Leftarrow$) Нехай послідовність $\{R_n(z)\}$ — рівномірно обмежена на кожній компактній множині. Нехай K — довільний компакт області D. Виберемо $\eta > 0$ так, щоб полікруг $A = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_i| \leq 4\eta, i = \overline{1, N}\}$ містився в D.

Нехай K_0 — відкрита зв'язна множина, компактно вкладена в D, яка містить K і полікруг A, тобто

$$A \cup K \subset K_0 \Subset D.$$

З рівномірної обмеженості послідовності $\{R_n(z)\}$ випливає, що існує така стала M, яка залежить від K_0, що

$$\sup_{z\in\overline{K}_0} |R_n(z)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Оскільки $R_n(z)$ — голоморфні в D, то функції $R_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, розвиваються в ряд Тейлора

$$L(R_n) = \sum_{|k|=m_n}^{\infty} \gamma_k^{(n)} z^k, \quad m_n = \lambda(L(R_n)), \quad z \in A, \tag{2}$$

де

$$\gamma_k^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{R_n(\zeta)d\zeta}{\zeta^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^N, \quad |k| \geq m_n,$$

$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_i| = 4\eta, i = \overline{1, N}\}$. З нерівностей Коші для коефіцієнтів ряду Тейлора [6] та оцінки (1) випливає, що

$$|\gamma_k^{(n)}| \leq \frac{M}{(4\eta)^{|k|}}, \quad |k| \geq m_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

З властивості 2) для відображення λ отримуємо

$$\lambda(L(R_{n+j}) - L(R_n)) = \lambda(L(R_{n+j}) - P + P - L(R_n)) \geq$$

$$\geq \min\{\lambda(L(R_{n+j}) - P), \lambda(P - L(R_n))\}, \ \ n \geq 1, \ \ j \geq 0.$$

Оскільки $\lambda(P - L(R_n)) \to \infty$ при $n \to \infty$, то для довільного заданого N_1 існує $n_1 \in \mathbb{N}$ таке, що для $n \geq n_1$ і $j \geq 0$

$$\lambda(L(R_{n+j}) - L(R_n)) \geq N_1. \tag{4}$$

Враховуючи формули (2)–(4), для $n \geq n_1$ і $j \geq 0$ маємо

$$\sup_{|z_i|<2\eta} |R_{n+j}(z) - R_n(z)| \leq \sup_{|z_i|<2\eta} \sum_{|k|=N_1}^{\infty} \left|(\gamma_k^{(n+j)} - \gamma_k^{(n)})z^k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=N_1}^{\infty} \frac{2M(r+1)^N}{(4\eta)^r} (2\eta)^r = 2M \sum_{r=N_1}^{\infty} \frac{(r+1)^N}{2^r}.$$

Із збіжності ряду $\sum\limits_{r=0}^{\infty}(r+1)^N 2^{-r}$ випливає, що послідовність $\{R_n(z)\}$ рівномірно збіжна в $\{z \in \mathbb{C}^N : |z_i| < 2\eta, i = \overline{1, N}\}$. Застосовуючи багатовимірний аналог теореми Стілтьєса–Віталі (теорема 6.1.16 у [8], див.

також теорему 2.17 у [1]), одержимо рівномірну збіжність послідовності $\{R_n(z)\}$ на $\overline{K}_0$ і, отже, на компакті K, тобто всередині області D.

(Б) Нехай послідовність $\{R_n(z)\}$ рівномірно збігається на всіх компактних підмножинах області D. Позначимо:

$$L_n(z) = \sum_{|k|=m_n}^{m_n+n} c_k z^k, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Тоді

$$\lambda(L_n - L(R_n)) = \lambda(L_n - P + P - L(R_n)) \geq \min\{m_n + n + 1, \lambda(L(R_n) - P)\}.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(L_n - L(R_n)) = \infty$$

і для кожного k, $|k| \geq m_n$, існує таке натуральне число l_k, що

$$c_k = \gamma_k^{(l)} \quad \text{для всіх} \quad l \geq l_k.$$

Нехай $\eta^* > 0$ — таке, що полікруг $K_1 = \{z : |z_i| \leq \eta^*, i = \overline{1, N}\} \Subset D$. Із твердження (А) теореми випливає, що послідовність $\{R_n(z)\}$ рівномірно обмежена на K_1, тобто існує така стала $M_1 = M_1(K_1)$, що

$$\sup_{z\in\overline{K}_1} |R_n(z)| \leq M_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $\Gamma_1 = \{|z_i| = \eta^*, i = \overline{1, N}\}$. Тоді коефіцієнти $\gamma_k^{(n)}$ у розвиненні

$$L(R_n(z)) = \sum_{|k|=m_n}^{\infty} \gamma_k^{(n)} z^k, \quad m_n \geq 0,$$

записуємо у вигляді

$$\gamma_k^{(n)} = \frac{1}{(2\pi i)^{|k|}} \int_{\Gamma_1} \frac{R_n(\zeta) d\zeta}{\zeta^{k+1}}, \quad |k| \geq m_n. \tag{6}$$

З наведених вище оцінок випливає, що

$$|c_k| = |\gamma_k^{(l)}| = \frac{1}{(2\pi)^{|k|}} \left| \int_{\Gamma_1} \frac{R_l(\zeta) d\zeta}{\zeta^{k+1}} \right| \leq \frac{M_1}{(\eta^*)^{|k|}}, \tag{7}$$

для $l \geq \max\{l_k : m_n \leq |k| \leq m_n + n\}$. Таким чином, для всіх $z \in K_2 = \{z : |z_i| \leq \eta^*/2, i = \overline{1,N}\}$ маємо

$$|L_n(z)| = \sum_{|k|=m_n}^{m_n+n} |c_k z^k| = \sum_{|k|=m_n}^{m_n+n} |\gamma_k^{(l)} z^k| \leq$$

$$\leq M_1 \sum_{|k|=m_n}^{m_n+n} \left|\frac{z}{\eta^*}\right|^k \leq M_1 \sum_{r=m_n}^{m_n+n} \frac{(r+1)^N}{2^r}.$$

Із збіжності ряду $\sum\limits_{r=m_n}^{\infty} (r+1)^N 2^{-r}$ випливає що, послідовність $\{L_n(z)\}$ є рівномірно обмеженою на K_2. Оскільки $L_n(z)$ — голоморфні в K_1, а $\lambda(P - L_n(z)) = m_n + n + 1 \to \infty$ при $n \to \infty$, то за твердженням (A) теореми послідовність $\{L_n(z)\}$ рівномірно збігається на K_2 до функції $f(z)$, голоморфної в $\operatorname{Int} K_2$, для якої $P \equiv L(f)$.

Тепер, покладаючи $\tau_n = \lambda(L_n - L(R_n))$ і враховуючи (6), (7), для коефіцієнтів c_k та $\gamma_k^{(n)}$ при $z \in K_2$ маємо

$$|L_n(z) - R_n(z)| \leq \sum_{|k|=\tau_n}^{\infty} \left|\left(c_k - \gamma_k^{(n)}\right) z^k\right| \leq 2M_1 \sum_{r=\tau_n}^{\infty} (r+1)^N 2^{-r}.$$

Оскільки $\tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то послідовність $\{L_n(z) - R_n(z)\}$ рівномірно збігається до 0 на K_2. Оскільки

$$|f(z) - R_n(z)| \leq |f(z) - L_n(z)| + |L_n(z) - R_n(z)|,$$

то послідовність $\{R_n(z)\}$ рівномірно збігається до $f(z)$ на $\operatorname{Int} K_2$. Із багатовимірного аналогу теореми Стілтьєса–Віталі випливає рівномірна збіжність послідовності $\{R_n(z)\}$ всередині області D.

Теорему доведено.

[1] *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.

[2] *Боднар Д.І.* Багатовимірні C-дроби // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 39–46.

[3] *Боднар Д.І., Гоєнко Н.П.* Наближення відношення функцій Лаурічеллі гіллястим ланцюговим дробом // Матем. студії. – 2003. – **20**, № 2. – С. 210–214.

[4] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби: Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

[5] *Кучминская Х.Й.* Соответствующая и присоединённая ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–617.

[6] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ (т. II). М.: Наука, 1976. – 400 с.

[7] *Cuyt A., Verdonk B.* A review of branched continued fractions for the constraction of multivariate rational approximant // Applied Numerical Mathematics. – 1988. – **4**. – P. 263 – 271.

[8] *Graham I., Kohr J.* Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions. – Marcel Dekker Inc., New Jork, 2003. – 528 p.

[9] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: Noth Holland, 1992. – 606 p.

[10] *Murphy J., O'Donohoe M.* A two-variable generalizations of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – **4**, № 3. – P. 181–190.

[11] *Siemaszko W.* Branched continued fractions for double power series // J. Comp. and Appl. Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121–125.

CORRESPONDENCE PRINCIPLE AND CONVERGENCE OF SEQUENCES OF ANALYTIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Nataliya HOYENKO

Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

Using the correspondence principle of sequences of analytic functions of several variables to some formal power series a criterion of uniform convergence is established.