ОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

©2007 р. *Андрій ВУС* [1], *Мирослава МОРОЗ* [2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000
[2]Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, Рівне 33028

Редакція отримала статтю 27 вересня 2007 р.

У роботі досліджується проблема обмеженості розв'язків системи двох диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у моменти часу, які визначаються самим розв'язком системи. Отримано точні нижні оцінки для часових інтервалів між моментами реалізації імпульсів, а також обмеження на траєкторії відповідних розв'язків.

Диференціальні рівняння з імпульсною дією [5] описують процеси в системах з миттєвими збуреннями і є зручною математичною моделлю для низки задач прикладної механіки [3, 4], економіки [7] та ін. Питання про обмеженість розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у наперед задані фіксовані та нефіксовані моменти часу піднімалося, зокрема, в [5, 2, 6]. Дана робота продовжує цю тематику досліджень, у ній вивчається питання про обмеженість розв'язків системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на площині у моменти часу, які визначаються самим розв'язком системи.

На площині довільним чином задамо вектор $h = (h_1, h_2)$ та множини

$$S_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = c_1\},$$

$$S_h = \{(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \in S_0 \wedge ax_1 + bx_2 = c_2\},$$

$$S_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1+bx_2 > c_1\},\ S_- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1+bx_2 < c_1\},$$

УДК 517.9; MSC 2000: 35N10, 70H06

де a, b, c_1, c_2 — деякі сталі. Вважатимемо, що $\|n\| = 1$, де $n = (a, b)$ — вектор зовнішньої нормалі прямих S_0 та S_h,

$$c_2 > c_1 > 0\ , \tag{1}$$

$$c_2 - c_1 = ah_1 + bh_2. \tag{2}$$

Очевидно, що $\{\vec{0}\} \in S_-$, $\cos(h,\, n) > 0$. Співвідношення (1), (2) забезпечують розташування прямої S_0 між S_h та початком координат.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = Jx(t), \tag{3}$$

$$x(t+0) - x(t-0) = h, \quad \text{якщо} \quad x(t-0) \in S_0, \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^2$ для всіх $t \geq t_0 \geq 0$, J — жорданова матриця [1] розміру 2×2, до того ж $\max\{\mathrm{Re}\,\lambda\ : \lambda \in \sigma(J)\} < 0$, $\sigma(J)$ — спектр матриці J.

Динаміка системи (3)–(5) описується наступним чином: фазова точка $x = x(t)$, яка в момент часу $t = t_0$ знаходилася у стані $x_0 \in S_+$, здійснює рух по кривій $\{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : x = \eta(t, x_0, t_0)\,, t \geq t_0\}$, де $x = \eta(t, x_0, t_0)$ — розв'язок системи (3), що задовольняє початкову умову $\eta(t, x_0, t_0) = x_0$. Рух вздовж неперервної траєкторії здійснюється до моменту часу $t = t_1$, $t_1 > t_0$, коли точка досягає прямої S_0. При $t = t_1$ відбувається „миттєва" зміна положення фазової точки за законом (4), тобто точка $x(t_1{-}0)$ переходить в точку $x(t_1{+}0) = x(t_1{-}0){+}h$ прямої $S_h \subset S_+$ і продовжує вздовж кривої $\{(t, x) \in \mathbb{R}^3 : x = \eta(t, x_1, t_1), t \geq t_1\}$, де $x = \eta(t, x_1, t_1)$ — розв'язок системи (3), що задовольняє умову $\eta(t, x_1, t_0) = x_1 \in S_h$, до наступного потрапляння на пряму S_0 і т. д. У випадку, коли $x_0 \in S_0$, відразу відбувається зміна положення фазової точки за законом (4), внаслідок чого $x(t_0 + 0) \in S_+$, а далі рух здійснюється за наведеним вище алгоритмом. Таким чином, зміна положення фазової точки за законом (4) відбувається нескінченну кількість разів, тобто існує нескінченна послідовність імпульсів, моменти реалізацій яких позначатимемо $(t_0 \leq)\ t_1 < t_2 < \ldots$. До того ж, як тільки фазова точка потрапляє на S_0, надалі її рух здійснюється між прямими S_0 та S_h. Тому для аналізу заданої системи з імпульсною дією досить вивчити поведінку її розв'язків, що починаються на S_0.

Теорема. *Нехай власні значення λ_1, λ_2 матриці J знаходяться в лівій комплексній півплощині. Для того, щоб розв'язки системи* (3)–(5) *при $t_0 \leq t < \infty$ були обмеженими, досить виконання однієї з умов:*

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ *і* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;

2) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *і* $\beta a h_1 + \alpha b h_2 < 0$;

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *і* $(c_1 - c_2)\lambda + a h_2 > 0$;

4) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \omega > 0, J = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}$, $|a h_2 - b h_1| < (1 + \frac{\alpha}{\omega})(c_1 - c_2)$.

Доведення. Згідно з [2], для того, щоб розв'язок системи рівнянь (3)–(5) при $t_0 \leq t < \infty$ був обмеженим, достатньо виконання умови

$$t_{k+1} - t_k \geq \vartheta > 0. \tag{6}$$

Позначимо $T_k = t_{k+1} - t_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, і з'ясуємо умови існування величини ϑ у (6), дослідивши поведінку розв'язків системи (3)–(5) для кожного вигляду матриці J. Для визначеності вважатимемо, що $x_0 \in S_0$.

1) Нехай $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Тоді розв'язок $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ системи (3)–(5), коли $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$, можна зобразити у вигляді

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} e^{\lambda(t - t_0)} + h_1 \sum\limits_{i=0}^{k} e^{\lambda(t - t_i)}, \\ x_2(t) = x_{20} e^{\lambda(t - t_0)} + h_2 \sum\limits_{i=0}^{k} e^{\lambda(t - t_i)}. \end{cases} \tag{7}$$

Момент t_{k+1} визначаємо з рівності

$$c_1 e^{\lambda(t_{k+1} - t_0)} + (c_2 - c_1) \sum_{j=0}^{k} e^{\lambda(t_{k+1} - t_j)} = c_1.$$

Після елементарних перетворень останнього рівняння одержуємо, що

$$T_k = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{c_1}{c_2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{8}$$

Таким чином, для даного вигляду матриці J відстань між сусідніми моментами реалізації імпульсів є сталою і дорівнює $\vartheta = \dfrac{1}{\lambda} \ln \dfrac{c_1}{c_2} > 0$. Зокрема, систему (7) з урахуванням явного вигляду величини ϑ можна зобразити в такому вигляді:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10}e^{\lambda(t-t_0)} + h_1 e^{\lambda(t-t_k)} \sum\limits_{j=0}^{k} \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^j, \\ x_2(t) = x_{20}e^{\lambda(t-t_0)} + h_2 e^{\lambda(t-t_k)} \sum\limits_{j=0}^{k} \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)^j. \end{cases}$$

Оскільки права частина кожної з виписаних рівностей мажорується геометричною прогресією зі знаменником $\dfrac{c_1}{c_2} < 1$, то справедливі оцінки:

$$\begin{cases} |x_1(t)| \le e^{\lambda(t-t_0)}|x_{10}| + \left|\dfrac{h_1 c_2}{c_2 - c_1}\right|, \\ |x_2(t)| \le e^{\lambda(t-t_0)}|x_{20}| + \left|\dfrac{h_2 c_2}{c_2 - c_1}\right|, \end{cases} \qquad t_0 \le t < \infty,$$

а також виконується оцінка, яка не залежить від x_0:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |x_1(t)| \le \left|\frac{h_1 c_2}{c_2 - c_1}\right|, \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} |x_2(t)| \le \left|\frac{h_2 c_2}{c_2 - c_1}\right|.$$

2) Нехай $J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\beta < \alpha < 0$. У цьому випадку розв'язок $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (3)–(5) для $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots$, записується у вигляді

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10}e^{\alpha(t-t_0)} + h_1 \sum\limits_{j=0}^{k} e^{\alpha(t-t_j)}, \\ x_2(t) = x_{20}e^{\beta(t-t_0)} + h_2 \sum\limits_{j=0}^{k} e^{\beta(t-t_j)}, \end{cases} \tag{9}$$

а моменти імпульсної дії t_{k+1} визначаються з рівняння

$$a\left(x_{10}e^{\alpha(t_{k+1}-t_0)} + h_1 \sum_{j=0}^{k} e^{\alpha(t_{k+1}-t_j)}\right) + $$
$$+b\left(x_{20}e^{\beta(t_{k+1}-t_0)} + h_2 \sum_{j=0}^{k} e^{\beta(t_{k+1}-t_j)}\right) = c_1.$$

Використовуючи алгоритм із [3], останнє рівняння запишемо у вигляді

$$a x_{10} e^{\alpha \sum\limits_{j=0}^{k} T_j} + a h_1 \sum_{j=0}^{k} e^{\alpha \sum\limits_{r=j}^{k} T_r} + b x_{20} e^{\beta \sum\limits_{j=0}^{k} T_j} + b h_2 \sum_{j=0}^{k} e^{\beta \sum\limits_{r=j}^{k} T_r} = c_1. \tag{10}$$

Домножимо рівність (10) на $e^{-\alpha T_k}$ і від одержаної рівності віднімемо (10) зі значенням k, зменшеним на 1. Після перетворень отримаємо

$$ah_1 + bx_{20}\left(e^{(\beta-\alpha)T_k} - 1\right) e^{\beta \sum\limits_{j=0}^{k-1} T_j} + bh_2\, e^{(\beta-\alpha)T_k} +$$

$$+bh_2\left(e^{(\beta-\alpha)T_k} - 1\right)\sum_{j=0}^{k-1} e^{\beta \sum\limits_{r=j}^{k-1} T_r} = c_1\left(e^{-\alpha T_k} - 1\right). \qquad (11)$$

Другий із чотирьох доданків (що містить bx_{20}) у лівій частині рівності (11) можна зробити як завгодно малим, вибираючи k достатньо великим. З іншого боку,

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(ah_1 + bh_2 e^{(\beta-\alpha)T_k} + bh_2\left(e^{(\beta-\alpha)T_k} - 1\right)\cdot \sum_{j=0}^{k-1} e^{\beta \sum\limits_{r=j}^{k-1} T_r}\right) =$$

$$= ah_1 + bh_2\frac{\alpha}{\beta}.$$

Таким чином, справедлива нерівність $ah_1 + bh_2\dfrac{\alpha}{\beta} \le c_1\left(e^{-\alpha T_k} - 1\right)$. Враховуючи умову теореми $\beta ah_1 + \alpha bh_2 < 0$, одержуємо

$$T_k \ge \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\beta c_1}{\beta c_1 + (\beta ah_1 + \alpha bh_2)} > 0.$$

Таким чином, $\vartheta = \dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{\beta c_1}{\beta c_1 + (\beta ah_1 + \alpha bh_2)}$ і з (9) випливають наступні обмеження для траєкторій системи:

$$\begin{cases} |x_1(t)| \le |h_1|\left(1 + \dfrac{|\beta c_1|}{\beta ah_1 + \alpha bh_2}\right), \\ |x_2(t)| \le |h_2|\left(1 - \left|\dfrac{\beta c_1}{\beta(c_1 + ah_1) + \alpha bh_2}\right|^{\beta/\alpha}\right)^{-1}, \end{cases} \qquad t_0 \le t < \infty.$$

Зауваження. При знаходженні T_k не використовується співвідношення між α і β. Тому аналогічно можна отримати оцінку

$$T_k \ge \frac{1}{\beta}\ln\frac{\alpha c_1}{\alpha c_1 + (\beta ah_1 + \alpha bh_2)} > 0.$$

У випадку, коли прямі S_0 і S_h є паралельними одній із координатних осей ($a = 0$ або $b = 0$), то відстань між сусідніми моментами реалізації імпульсів є сталою для всіх $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і відповідно дорівнює а) $T_k = \dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{c_1}{c_2}$, якщо $a = 0$; б) $T_k = \dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{c_1}{c_2}$, якщо $b = 0$.

Дійсно, підставляючи $b = 0$ у (11), отримуємо значення $T_k = \dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{c_1}{c_2}$. З огляду на наведене зауваження випадок $a = 0$ досліджується аналогічно.

3) Нехай $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda < 0$. Розв'язок $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (3)–(5) для $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots$, матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = (x_{10} + (t - t_0)x_{20})e^{\lambda(t-t_0)} + \sum\limits_{j=0}^{k}(h_1 + h_2(t - t_j))e^{\lambda(t-t_j)}, \\ x_2(t) = x_{20}e^{\lambda(t-t_0)} + h_2\sum\limits_{j=0}^{k} e^{\lambda(t-t_j)}, \end{cases}$$

момент імпульсної дії t_{k+1} визначається з рівняння

$$c_2e^{\lambda(t_{k+1}-t_0)} + (c_2 - c_1)\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda(t_{k+1}-t_j)} + ax_{20}\,(t_{k+1} - t_0)\,e^{\lambda(t_{k+1}-t_0)} +$$

$$+ah_2\sum_{j=0}^{k}(t_{k+1} - t_j)\; e^{\lambda(t_{k+1}-t_j)} = c_1. \tag{12}$$

Перепишемо (12) у вигляді

$$c_2e^{\lambda\sum\limits_{j=0}^{k}T_j} + (c_2 - c_1)\sum_{j=1}^{k} e^{\lambda\sum\limits_{r=j}^{k}T_r} + ax_{20}e^{\lambda\sum\limits_{j=0}^{k}T_j}\sum_{j=0}^{k}T_j +$$

$$+ah_2\sum_{j=0}^{k} e^{\lambda\sum\limits_{r=j}^{k}T_r}\sum_{r=j}^{k}T_r = c_1. \tag{13}$$

Домножимо рівність (13) на $e^{-\lambda T_k}$ і від одержаної рівності віднімемо (13), але зі значенням k, зменшеним на 1. Після спрощень одержимо

$$c_2 - c_1 + ax_{20}T_ke^{\lambda\sum\limits_{j=0}^{k-1}T_j} + ah_2T_k\left(\sum_{j=0}^{k-1} e^{\lambda\sum\limits_{r=j}^{k-1}T_r} + 1\right) = c_1(e^{\lambda T_k} - 1). \tag{14}$$

Другий із чотирьох доданків (що містить ax_{20}) у лівій частині рівності (14) можна зробити як завгодно малим, вибираючи k досить великим. З іншого боку,

$$\lim_{k\to\infty}\inf_{k}\left(c_2-c_1+ah_2T_k\left(\sum_{j=0}^{k-1}e^{\lambda\sum\limits_{r=j}^{k-1}T_r}+1\right)\right)=c_2-c_1-\frac{ah_2}{\lambda}.$$

Таким чином, виконується нерівність $c_2-c_1-ah_2/\lambda \le c_1(e^{-\lambda T_k}-1)$, звідки випливає, що

$$T_k\ge\frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda c_1}{\lambda c_2-ah_2}=\vartheta>0,$$

оскільки за умовою $c_1-c_2-ah_2/\lambda<0$. Для знайденого значення ϑ знайдемо оцінки для розв'язку системи (3)–(5). Оскільки для довільних y виконується нерівність $ye^{\lambda y/2}\le -2/(e\lambda)$, то

$$\sum_{j=0}^{k}|t-t_j|\,e^{\lambda(t-t_j)}=\sum_{j=0}^{k}|t-t_j|\,e^{\lambda(t-t_j)/2}e^{\lambda(t-t_j)/2}\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{k}\frac{2}{-e\lambda}\,e^{\lambda(t-t_j)/2}\le\frac{2}{-e\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}e^{\lambda(t-t_j)/2}\le\frac{2}{-e\lambda}\cdot\frac{1}{1-e^{\lambda\vartheta/2}}.$$

Таким чином, незалежно від початкового положення виконуються такі оцінки для траєкторій системи:

$$\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,|x_1(t)|\le|h_1|(1-e^{\lambda\vartheta})^{-1}+\dfrac{2|h_2|}{-\lambda e}(1-e^{\lambda\vartheta/2})^{-1},\\ \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,|x_2(t)|\le|h_2|(1-e^{\lambda\vartheta})^{-1}.\end{cases}$$

Зазначимо, що якщо в умові (2) $a=0$, то рівняння (12) співпадає з рівнянням (8). При цьому відстань між сусідніми моментами реалізації імпульсів дорівнює $T_k=\dfrac{1}{\lambda}\ln\dfrac{c_1}{c_2}$ для всіх $k=0,1,2,\dots$, і

$$\begin{cases}\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,|x_1(t)|\le\dfrac{c_2}{c_2-c_1}\left(|h_1|+\left|\dfrac{h_2}{\lambda}\right|\ln\dfrac{c_1}{c_2}\right),\\ \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,|x_2(t)|\le\dfrac{c_2}{b}.\end{cases}$$

4) Нехай $J=\begin{pmatrix}\alpha & -\omega\\ \omega & \alpha\end{pmatrix}$, $\alpha<0$. У цьому випадку розв'язок $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$ системи рівнянь з імпульсною дією (3)–(5) для $t\in(t_k,t_{k+1}]$,

$k = 0, 1, \ldots$, матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha(t-t_0)}\left(x_{10}\cos\omega(t-t_0) - x_{20}\sin\omega(t-t_0)\right) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=0}^{k} e^{\alpha(t-t_j)}\left(h_1\cos\omega(t-t_j) - h_2\sin\omega(t-t_j)\right), \\ x_2(t) = e^{\alpha(t-t_0)}\left(x_{10}\sin\omega(t-t_0) + x_{20}\cos\omega(t-t_0)\right) + \\ \qquad + \sum\limits_{j=0}^{k} e^{\alpha(t-t_i)}\left(h_1\sin\omega(t-t_j) + h_2\cos\omega(t-t_j)\right), \end{cases}$$

момент t_{k+1} визначається з рівняння

$$c_2 e^{\alpha(t_{k+1}-t_0)}\cos\omega(t_{k+1}-t_0) + (c_2-c_1)\sum_{j=1}^{k} e^{\alpha(t_{k+1}-t_j)}\cos\omega(t_{k+1}-t_j) +$$

$$+ (bx_{10} - ax_{20})\, e^{\alpha(t_{k+1}-t_0)}\sin\omega(t_{k+1}-t_0) +$$

$$+ (bh_1 - ah_2)\sum_{j=0}^{k} e^{\alpha(t_{k+1}-t_i)}\sin\omega(t_{k+1}-t_j) = c_1.$$

Отриману рівність запишемо у термінах $T_k = t_{k+1} - t_k$:

$$c_2 e^{\alpha\sum\limits_{j=0}^{k}T_j}\cos\left(\omega\sum_{j=0}^{k}T_j\right) + (c_2-c_1)\sum_{j=1}^{k} e^{\alpha\sum\limits_{r=j}^{k}T_r}\cos\left(\omega\sum_{r=j}^{k}T_r\right) +$$

$$+ (bx_{10} - ax_{20})\, e^{\alpha\sum\limits_{j=0}^{k}T_j}\sin\left(\omega\sum_{j=0}^{k}T_j\right) +$$

$$+ (bh_1 - ah_2)\sum_{j=0}^{k} e^{\alpha\sum\limits_{r=j}^{k}T_r}\sin\left(\omega\sum_{r=j}^{k}T_r\right) = c_1. \tag{15}$$

Домножимо рівність (15) на $e^{-\alpha T_k}$ і від одержаної рівності віднімемо (15), але зі значенням k, зменшеним на 1. Після відповідних перетворень одержимо співвідношення

$$-2\sin\frac{\omega T_k}{2}\left[c_2 e^{\alpha\sum\limits_{j=0}^{k-1}T_j}\sin\phi_0 + (c_2-c_1)\sum_{j=1}^{k-1} e^{\alpha\sum\limits_{r=j}^{k-1}T_r}\sin\phi_j + \right.$$

$$+(ax_{20}-bx_{10})e^{\alpha\sum\limits_{j=0}^{k-1}T_j}\cos\phi_0+(ah_2-bh_1)\sum_{j=0}^{k-1}e^{\alpha\sum\limits_{r=j}^{k-1}T_r}\cos\phi_j+$$

$$\left.+(ah_2-bh_1)\cos(\omega T_k/2)\right]=(c_1-c_2)\cos(\omega T_k)+c_1(e^{-\alpha T_k}-1),$$

де використано позначення $\phi_j=\dfrac{\omega T_k}{2}+\omega\sum\limits_{r=j}^{k-1}T_r$. Оцінюючи ліву частину отриманої рівності, одержимо

$$\omega T_k\left[(c_2+|ax_{20}-bx_{10}|+|ah_2-bh_1|)\exp\left(\alpha\sum_{j=0}^{k-1}T_j\right)+\right.$$

$$\left.+\,(c_2-c_1+|ah_2-bh_1|)\left(1+\sum_{j=1}^{k-1}e^{\alpha\sum\limits_{r=j}^{k-1}T_r}\right)\right]\geq\left|c_1e^{-\alpha T_k}-c_2\right|. \qquad (16)$$

Припустимо від супротивного, що $\varliminf\limits_{k\to\infty}T_k=0$. Тоді існує підпослідовність $\{k_n\}\subset\mathbb{N}$ таких, що $T_{k_n}<\min\{T_1,\ldots,T_{k_n-1}\}$. Позначимо $\tau_n=T_{k_n}$. Зрозуміло, послідовність τ_n монотонно прямує до нуля. З нерівності (16) матимемо:

$$c_2+|ax_{20}-bx_{10}|+|ah_2-bh_1|+\frac{c_2-c_1+|ah_2-bh_1|}{1-e^{\alpha\tau_n}}\geq\frac{c_2-c_1e^{-\alpha\tau_n}}{\omega\tau_n}.$$

Враховуючи, що $\tau_n=o(1)$, $n\to+\infty$, одержимо

$$(c_2+|ax_{20}-bx_{10}|+|ah_2-bh_1|)-\frac{(c_2-c_1+|ah_2-bh_1|)}{\alpha\tau_n}\times$$

$$\times\,(1+o(1))\geq\frac{c_2-c_1+o(1)}{\omega\tau_n}.$$

Звідси випливає, що $o(1)-\dfrac{1}{\alpha}\,(c_2-c_1+|ah_2-bh_1|)\geq\dfrac{c_2-c_1}{\omega}$. Таким чином, якщо виконується умова $|ah_2-bh_1|<\left(1+\dfrac{\alpha}{\omega}\right)(c_1-c_2)$, то припущення $\varliminf\limits_{k\to\infty}T_k=0$ є хибним. Це забезпечує існування відповідного значення $\vartheta>0$, для якого розв'язки задачі (3)–(5) будуть обмеженими.

Теорему доведено.

[1] *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 319 с.

[2] *Мильман В.Д., Мышкис А.Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн., 1960. – **1**, № 2. – С. 233–237.

[3] *Мышкис А.Д.* Процесс теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Автоматика и телемеханика, 1995. – № 2. – С. 35–43.

[4] *Мышкис А.Д.* Авторегулируемый импульсный точечный подогрев конечной среды // Мат. заметки. – 2006, **79**. – № 1. – С. 102–106.

[5] *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным возействием. – К.: Наук.думка, 1987. – 216 с.

[6] *Самойленко В.Г., Елгондиев К.К.* Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в $\mathbb{R}^2$ // К.: Ин-т математики, Препринт 89.59, 1989. – 31 с.

[7] *Чуйко С.М., Чуйко А.С.* Финансовая интерпретация импульсной задачи // Укр. матем. конгрес, 2001. – Міжнародна конференція „Диференціальні рівняння і нелінійні коливання" (Чернівці, 27–29 серпня 2001 р.). – Тези доп. – К.: Ін-т математики НАН України, 2001. – С. 166.

BOUNDNESS OF SOLUTIONS FOR THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE ACTION

Andriy VUS [1], *Myroslava MOROZ* [2]

[1]Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine,
[2]National University of water management and nature resources use,
11 Soborna Str., Rivne 33028, Ukraine

We investigate the problem of boundness of solutions for the system of differential equations with impulse action. The exact lower estimation for time intervals between impulses are obtained as well as bounds of trajectories for the corresponding solutions.