ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПОХІДНИХ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ ФУНКЦІЙ

 Оксана БОДНАР, Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 12 вересня 2007 р.

Знайдено достатні умови, при виконанні яких похідні еквівалентних опуклих функцій є еквівалентними функціями. Одержаний результат для випадку повільно зростаючих функцій доповнює одне твердження А.А.Гольдберга.

Нехай (a_n) — послідовність таких комплексних чисел, що $a_n \to \infty$ при $n \to +\infty$ і $0 < |a_1| \le |a_2| \le \ldots |a_n| \le \ldots$. Величини

$$n(r) = \sum_{|a_n| \le r} 1, \quad N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t} dt$$

будемо називати відповідно лічильною та усередненою (неванліннівською) лічильною функцією цієї послідовності.

Неперервну додатну на $[0, +\infty)$ функцію l називають повільно змінною функцією, якщо для довільного $\lambda > 0$

$$l(\lambda x) \sim l(x), \quad x \to +\infty. \tag{1}$$

У випадку, коли l є зростаючою функцією, то l називають повільно зростаючою і тоді умова (1) еквівалентна наступній

$$l(2x) \sim l(x), \quad x \to +\infty. \tag{2}$$

УДК 517.53; MSC 2000: 30E99

Основними характеристиками зростання цілої трансцендентної функції f є її максимум модуля $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, неванліннівська характеристична функція

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$$

та порядок $\rho = \rho[f]$, який визначається рівністю

$$\rho = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M(r, f)}{\ln r}.$$

Цілі та мероморфні функції f, для яких величини $n(r) = n(r, a, f)$, $N(r) = N(r, a, f)$, $\ln M(r, f)$, $T(r, f)$ є повільно зростаючими функціями, володіють цікавими і специфічними властивостями і часто є екстремальними у багатьох задачах теорії розподілу значень (тут $n(r, a, f)$, $N(r, a, f)$ — лічильна та неванліннівська лічильна функції a-точок для f). Дослідженню цих функцій присвячено багато робіт (вкажемо тут тільки на статті [2,4–7]). Так, у [2] знайдено асимптотику логарифму цілої функції f нульового порядку з від'ємними нулями, лічильна функція $n(r, 0, f)$ яких є повільно зростаючою:

$$\ln f(re^{i\theta}) = N(r, 0, f) + i\,\theta\, n(r, 0, f) + o(n(r, 0, f)),\ r \to +\infty\ (-\pi < \theta < \pi).$$

У роботі [4] показано: *якщо f — ціла функція, $T(2r, f) \sim T(r, f)$, $r \to +\infty$, то для довільного $a \in \mathbb{C}$ виконується співвідношення $N(r, a, f) \sim T(r, f), r \to +\infty$, тобто f не має скінченних валіронівських виняткових значень.* Нагадаємо, що число $a \in \mathbb{C}$ називається винятковим значенням в розумінні Валірона або валіронівським винятковим значенням, якщо $\Delta(a) > 0$, де

$$\Delta(a) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}, \quad m(r, a, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a|}\, d\varphi.$$

У [3] доведено, що величини $N(r, 0, f), \ln M(r, f), T(r, f)$ у випадку цілої функції f нульового порядку є повільно зростаючими одночасно. Очевидно, що $N(r)$ — повільно зростаюча функція, якщо функція $n(r)$ є повільно зростаючою. Наступний приклад показує, що обернене твердження є неправильним.

Приклад. Нехай $r_0 = 1$, $r_k = \exp\{1 + 2 + \ldots + (k-1)\}$, $k \in \mathbb{N}$, а послідовність (λ_n) є такою, що $\lambda_0 = 1, \lambda_{2^{k-1}} = \lambda_{2^{k-1}+1} = \ldots = \lambda_{2^k-1} = r_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді $n(t) = 0$, якщо $0 \le t < 1$ і $n(t) = 2^k$, якщо $r_k \le t < r_{k+1}$.

Оскільки $n(r_k) = 2n(r_k - 0)$ для $k \geq 2$, то $n(t)$ не є повільно зростаючою функцією.

Нехай $r_k \leq r < r_{k+1}$. Тоді

$$N(r) = \int_1^r \frac{n(t)}{t}dt = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{n(t)}{t}dt + \int_{r_k}^r \frac{n(t)}{t}dt = \sum_{j=1}^{k-1} n(r_j) \ln \frac{r_{j+1}}{r_j} +$$

$$+n(r_k) \ln \frac{r}{r_k} = \sum_{j=1}^{k-1} j\ 2^j + 2^k \ln \frac{r}{r_k} \sim 2^k \left(k + \ln \frac{r}{r_k}\right), \quad k \to +\infty.$$

Тому, якщо $r_k \leq r < 2r < r_{k+1}$, то

$$\frac{N(2r)}{N(r)} \sim \frac{k + \ln \frac{r}{r_k} + \ln 2}{k + \ln \frac{r}{r_k}} \sim 1, \quad k \to +\infty.$$

Якщо ж $r_k < r < r_{k+1}$ і $r_{k+1} \leq 2r$, то $2r < r_{k+2}$ і

$$1 \leq \frac{N(2r)}{N(r)} \sim \frac{2^{k+1}\left(k + \ln \frac{2r}{r_{k+1}}\right)}{2^k\left(k + \ln \frac{r}{r_k}\right)}, \quad k \to +\infty.$$

Але

$$2\frac{k + \ln \frac{2r}{r_{k+1}}}{k + \ln \frac{r}{r_k}} = 2\frac{\ln \frac{r_{k+1}}{r_k} + \ln \frac{2r}{r_{k+1}}}{k + \ln \frac{r}{r_k}} = 2\frac{\ln \frac{r}{r_k} + \ln 2}{\ln \frac{r}{r_k} + k} <$$

$$< 2\frac{\ln \frac{r_{k+1}}{r_k} + \ln 2}{\ln \frac{r_{k+1}}{r_k} + k} = \frac{2(k + \ln 2)}{2k} \sim 1, \quad k \to +\infty.$$

Тому і в цьому випадку $N(2r) \sim N(r), r \to +\infty$, тобто $N(r)$ є повільно зростаючою функцією.

Позначимо через L_ρ множину коливних уточнених порядків $\eta(r)$, тобто множину неперервно диференційовних на $[0, +\infty)$ функцій, що задовольняють такі умови:

1) $\eta'(r) r \ln r \to 0, \quad r \to +\infty$;
2) $V(r) = r^{\eta(r)} \to +\infty, \quad r \to +\infty$;
3) $\overline{\lim\limits_{r \to +\infty}} \eta(r) = \rho$.

Якщо умову 2) змінено на сильнішу умову

$$4) \ \varliminf_{r\to+\infty} \eta(r) > 0,$$

то будемо говорити, що $\eta(r) \in L_\rho^+ \subset L_\rho$. Якщо в умові 3) існує границя, то $\eta(r)$ називають уточненим порядком і позначають через $\rho(r)$.

У [1] вищенаведений результат роботи [4] перенесено на цілі функції f порядку $\rho \le 1/2$, а саме доведено такий результат: *якщо для цілої функції f порядку $\rho \le 1/2$ виконується співвідношення $T(r, f) \sim V(r)$, $r \to +\infty$, для деякого коливного порядку $\eta(r) \in L_\rho$, то для довільного $a \in \mathbb{C}$ виконується також співвідношення $N(r, a, f) \sim V(r)$, $r \to +\infty$, тобто f не має скінченних валіронівських виняткових значень.* Для випадку, коли $\eta(r) \in L_\rho^+$, у праці [1] також показано, що співвідношення

$$N(r, a) \sim V(r), \quad r \to +\infty, \quad a \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

виконується тоді й тільки тоді, коли

$$n(r, a) \sim \eta(r)V(r), \quad r \to +\infty, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

У цьому твердженні умову $\eta(r) \in L_\rho^+$, взагалі кажучи, не можна замінити на умову $\eta(r) \in L_\rho$, тобто у випадку нульового уточненого порядку $\rho(r)$ умови (3) та (4) не є еквівалентними. Обмежимось таким прикладом. Нехай $n(r, 0) \sim 2\ln r$, $r \to +\infty$. Тоді $N(r, 0) \sim \ln^2 r = r^{\rho(r)}$, $r \to +\infty$, де $\rho(r) = 2\ln\ln r/\ln r$. Звідси одержуємо, що $n(r, 0) = o(\rho(r)\ln^2 r)$, $r \to +\infty$.

Зауважимо, що якщо $\rho(r)$ — нульовий уточнений порядок, то функція $V(r) = r^{\rho(r)}$ є повільно змінною. Навпаки, якщо l — повільно змінна і неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція, то $\rho(r) = \frac{\ln^+ l(r)}{\ln r}$ є нульовим уточненим порядком, а, отже, $l(r) = r^{\rho(r)}$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\rho(r)$ — такий нульовий уточнений порядок, що функція $rV'(r)$ є повільно зростаючою і*

$$N(r) = V(r) + o(rV'(r)), \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Тоді

$$n(r) \sim rV'(r), \quad r \to +\infty. \tag{6}$$

Зауваження 1. Нехай $\varepsilon(r) = rV'(r)/V(r) = \rho(r) + \rho'(r)r\ln r$. У випадку, коли $\rho(r) \in L_\rho^+$, маємо $\varepsilon(r) \sim \rho(r)$, $rV'(r) \sim \rho(r)V(r)$, $r \to +\infty$, а, отже, умови (4) та (6) є еквівалентними.

Зауваження 2. Якщо $rV'(r)$ є повільно змінною, то $V(r)$ також повільно змінна функція, причому $rV'(r) = o(V(r))$, $r \to +\infty$. Тому з теореми 1 випливає достатня умова еквівалентності похідних опуклих відносно логарифму повільно змінних функцій.

Теорема 1 випливає із загальнішої теореми.

Теорема 2. *Нехай g — функція, опукла відносно логарифму, l — диференційовна функція, $l'(r + o(r)) \sim l'(r)$, $r \to +\infty$, і*

$$g(r) = l(r) + o(rl'(r)), \quad r \to +\infty. \tag{7}$$

Тоді

$$g'(r) \sim l'(r), \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

Доведення. Нехай функція $\delta = \delta(r)$ є такою, що $0 < \delta < 1$ і $\delta \to 0$ при $r \to +\infty$. Враховуючи, що функція $rg'(r)$ зростає, отримуємо

$$\frac{g(r) - g(r - \delta r)}{-\delta\, r\, \ln(1 - \delta)} \le \frac{g'(r)}{\delta} \le \frac{g(r + \delta r) - g(r)}{\delta\, r\, \ln(1 + \delta)}. \tag{9}$$

Враховуючи умову (7), отримуємо

$$\frac{g(r + \delta r) - g(r)}{\delta\, r} = \frac{l(r + \delta\, r) - l(r)}{\delta\, r} + \frac{o(rl'(r))}{\delta\, r} =$$
$$= \frac{(1 + \theta\delta)\, r\, l'(r + \theta\delta r) \ln(1 + \delta)}{\delta\, r} + \frac{o(l'(r))}{\delta} =$$
$$= (1 + o(1))l'(r) + o(l'(r))/\delta, \quad r \to +\infty.$$

де $\theta \in (0; 1)$. Зрозуміло, що функцію $\delta = \delta(r)$ можна вибрати так, що

$$\frac{g(r + \delta r) - g(r)}{\delta\, r} = (1 + o(1))l'(r), \quad r \to +\infty.$$

Аналогічно показуємо, що

$$\frac{g(r) - g(r - \delta r)}{\delta\, r} = (1 + o(1))l'(r), \quad r \to +\infty,$$

і тоді умова (8) випливає з умови (9). Теорему 2 доведено.

Доведення теореми 1. Функція $N(r)$ опукла відносно логарифму, а функція $rV'(r)$ повільно зростає, а, отже, виконується умова $V'(r + o(r)) \sim V(r)$, $r \to +\infty$. Тому твердження теореми 1 випливає з теореми 2, якщо у цій теоремі покласти $g(r) = N(r)$, $l(r) = V(r)$.

Теорема 3. *Існують опукла відносно логарифму функція g та неперервно диференційовна функція l, $l'(r+o(r)) \sim l'(r)$, $r \to +\infty$, такі, що $g(r) \sim l(r)$, $r \to +\infty$, і функції $g'(r)$ та $l'(r)$ не є еквівалентними при $r \to +\infty$.*

Доведення. Покладемо $g(r) = \ln r$, $l(r) = \ln r + \sin(\ln r)$, $r \geq r_0$. Тоді $rg'(r) = 1$, $rl'(r) = 1 + \cos(\ln r)$, $l'(r+o(r)) = (1+o(1))l'(r)$, $r \to +\infty$, а, отже, функція $g'(r)$ не є еквівалентною функції $l'(r)$ при $r \to +\infty$.

[1] *Гольдберг А.А.* О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 15. – С. 244–254.

[2] *Заболоцкий Н.В.* Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, № 2. – С. 196–208.

[3] *Заболоцкий Н.В., Шеремета М.Н.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65, № 2. – С. 206–214.

[4] *Anderson J.M.* Asymptotic values of meromorphic functions of smooth growth // Glasgow Math. J. – 1979. – V. 20, № 2. – P. 155–162.

[5] *Anderson J.M., Chunie J.* Slowly growing meromorphic functions // Comment. Math. Helv. – 1966. – V. 40. – P. 267–280.

[6] *Hayman W.K.* Slowly growing integral and subharmonic function // Comment. Math. Helv. – 1960. – V. 34, № 1. – P. 75–84.

[7] *Valiron G.* Sur les valeurs déficientes des fonctions méromorphes d'ordre nul // C. R. Acad. Sci. Paris., Ser. 1. Math. – 1950. – V. 230. – P. 40–42.

FUNCTIONS OF SLOW VARYING EQUIVALENCY

Oksana BODNAR, Mykola ZABOLOTSKYY

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

There are established sufficient conditions for derivatives of equivalent convex functions to be equivalent. In the case of functions of slow grow the obtained result complement some A.Goldberg proposition.