ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІГУРНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

©*2007 р. Тамара АНТОНОВА*[1], *Ольга СУСЬ*[2]

[1]Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С.Бандери, 12, Львів 79013
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 12 липня 2007 р.

Для послідовностей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами встановлено достатні умови їх монотонності, обмеженості та збіжності. Наведено приклад розбіжного двовимірного неперервного дробу.

Вивченню властивостей наближень як неперервних дробів, так і їхніх багатовимірних узагальнень — гіллястих ланцюгових дробів, двовимірних неперервних дробів присвячено чимало робіт [7,8]. Зокрема, встановлено, що звичайні наближення гіллястих ланцюгових дробів та двовимірних неперервних дробів з додатними елементами мають властивість „вилки“ [4, 6]. Для фігурних наближень ця властивість не виконується.

У роботі [3] вивчались властивості як звичайних, так і фігурних наближень двовимірних неперервних дробів з недодатними частинними чисельниками та частинними знаменниками, що дорівнюють 1. Встановлено достатні умови, за яких для звичайних f_m, $m = 1, 2, \dots$, та фігурних $\tilde{f}_m$, $m = 1, 2, \dots$, наближень виконуються нерівності

$$f_{2m} \le \tilde{f}_{4m} \le f_{4m+2}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

УДК 517.526; MSC 2000: 11A95, 11J70, 30B70, 65G30

У цій роботі на основі запропонованої у [2] методики вивчаються властивості двовимірних неперервних дробів (ДНД) спеціального вигляду

$$\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i}, \quad \Phi_i = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1} a_{i,i+j}}{1}, \qquad (1)$$

$i = 0, 1, 2, \ldots,$ частинні чисельники якого задовольняють умови

$$a_{i+j,i} \geq 0, \quad a_{i,i+j} \geq 0, \quad a_{j,j} \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

та n-і наближення вибираються як підхідні дроби вигляду

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{[n/2]} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(n-2i)}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

$$\Phi_i^{(0)} = 0, \ \ \Phi_i^{(k)} = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1} a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1} a_{i,i+j}}{1}, \qquad (4)$$

де $i = \overline{0, [n/2]}$, $k = 1, 2, \ldots$, $[s]$ — ціла частина числа s, $s = 1, 2, \ldots$.

Наближення ДНД (1), які задаються виразами (3), (4), у [7] названі фігурними наближеннями або фігурними підхідними дробами ДНД (1). Вирази

$$Q_{i+j,i}^{(p+1)} = 1 + \frac{(-1)^j a_{i+j+1,i}}{Q_{i+j+1,i}^{(p)}}, \quad Q_{i,i+j}^{(p+1)} = 1 + \frac{(-1)^j a_{i,i+j+1}}{Q_{i,i+j+1}^{(p)}}, \qquad (5)$$

$$Q_{i+j,i}^{(0)} = 1, \quad Q_{i,i+j}^{(0)} = 1,$$

$$Q_j^{(0)} = 1, \ \ Q_j^{(1)} = 1 + \Phi_j^{(1)}, \ \ Q_j^{(p+2)} = 1 + \Phi_j^{(p+2)} + \frac{a_{j+1,j+1}}{Q_{j+1}^{(p)}}, \qquad (6)$$

$$i = 0, 1, \ldots, \ \ j = 1, 2, \ldots, \ \ p = 0, 1, \ldots,$$

називаються залишками скінченного двовимірного неперервного дробу вигляду (1). Для вивчення властивостей ДНД (1) використовується формула різниці між двома підхідними дробами ДНД (1) порядків n та m, яка при $n > m$, $n, m = 1, 2, \ldots,$ має вигляд [4]

$$f_n - f_m = \Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(m)} + \sum_{i=1}^{[m/2]} (-1)^i \prod_{j=1}^{i} \frac{a_{jj}(\Phi_i^{(n-2i)} - \Phi_i^{(m-2i)})}{Q_j^{(n-2j)} Q_j^{(m-2j)}} +$$

$$+(-1)^{[m/2]}\frac{\prod\limits_{j=1}^{[m/2]+1} a_{jj}}{\prod\limits_{j=1}^{[m/2]+1} Q_j^{(n-2j)} \prod\limits_{j=1}^{[m/2]} Q_j^{(m-2j)}} \cdot \gamma_{n,m}, \tag{7}$$

де $\gamma_{n,m} = 0$, якщо $n = 2r+1$, $m = 2r$, $r = 0, 1, \ldots$, і $\gamma_{n,m} = 1$ у інших випадках.

Теорема 1. *Якщо елементи ДНД* (1) *задовольняють умови* (2) *і*

$$\frac{a_{i+2k,i}}{1+a_{i+2k+1,i}} < 1, \quad \frac{a_{i,i+2k}}{1+a_{i,i+2k+1}} < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

то для підхідних дробів ДНД (1) *непарного порядку справджуються нерівності*

$$f_{4p-3} \le f_{4p+1} \le f_{4q+3} \le f_{4q-1}, \tag{9}$$

де $p, q = 1, 2, \ldots$, *а послідовності* $\{f_{4p+1}\}$, $\{f_{4q+3}\}$ *є збіжними.*

Доведення. Покажемо, що при виконанні умов (2) та (8) для залишків (5), (6) ДНД (1) непарного порядку правильними є нерівності

$$\begin{gathered} 1 - \frac{a_{i+2k,i}}{1+a_{i+2k+1,i}} \le Q^{(2s)}_{i+2k-1,i} \le 1, \quad Q^{(2s+1)}_{i+2k,i} \ge 1 + a_{i+2k+1,i}, \\ 1 - \frac{a_{i,i+2k}}{1+a_{i,i+2k+1}} \le Q^{(2s)}_{i,i+2k-1} \le 1, \quad Q^{(2s+1)}_{i,i+2k} \ge 1 + a_{i,i+2k+1}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$Q_k^{(s)} \ge 1, \quad i = 0, 1, 2 \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots. \tag{11}$$

Дійсно, з формул (5) маємо

$$Q^{(0)}_{i+2k-1,i} = 1, \;\; Q^{(0)}_{i,i+2k-1} = 1, \;\; i = 0, 1, \ldots, \;\; k = 1, 2, \ldots,$$

$$Q^{(1)}_{i+2k-2,i} = 1 + a_{i+2k-1,i}, \;\; Q^{(1)}_{i,i+2k-2} = 1 + a_{i,i+2k-1},$$
$$i = 0, 1, \ldots, \;\; k = 2, 3, \ldots,$$

тобто нерівності (10) виконуються для $s = 0$, $i = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$.

Припустимо, що ці нерівності виконуються для деякого значення $s = p$, $p \ge 0$, і довільних значень $i = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$. З умов (2), (8) і зроблених припущень випливає, що

$$1 \ge Q^{(2p+2)}_{i+2k-1,i} = 1 - \frac{a_{i+2k,i}}{Q^{(2p+1)}_{i+2k,i}} \ge 1 - \frac{a_{i+2k,i}}{1+a_{i+2k+1,i}} > 0,$$

$$1 \geq Q^{(2p+2)}_{i,i+2k-1} = 1 - \frac{a_{i,i+2k,i}}{Q^{(2p+1)}_{i,i+2k}} \geq 1 - \frac{a_{i,i+2k}}{1 + a_{i,i+2k+1}} > 0,$$

$i = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots,$

$$Q^{(2p+3)}_{i+2k-2,i} = 1 + \frac{a_{i+2k-1,i}}{Q^{(2p+2)}_{i+2k-1,i}} \geq 1 + a_{i+2k-1,i},$$

$$Q^{(2p+3)}_{i,i+2k-2} = 1 + \frac{a_{i,i+2k-1}}{Q^{(2p+2)}_{i,i+2k-1}} \geq 1 + a_{i,i+2k-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

таким чином, нерівності (10) справджуються і для $s = p + 1$, а, отже, і для довільних $s = 0, 1, \ldots,$ $i = 0, 1, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots$. Із формул (4), (5), нерівностей (10) та умови (2) для $k = 0, 1, \ldots,$ $s = 1, 2, \ldots,$ одержимо

$$\Phi^{(s)}_k = \frac{a_{k+1,k}}{Q^{(s-1)}_{k+1,k}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q^{(s-1)}_{k,k+1}} \geq a_{k+1,k} + a_{k,k+1} \geq 0. \tag{12}$$

Перевіримо правильність нерівностей (11) для залишків $Q^{(s)}_k$, що визначаються із співвідношень (6). Застосуємо метод математичної індукції щодо s — кількості поверхів ДНД (1).

Для $s = 0$ та $s = 1$ виконання нерівностей (11) безпосередньо випливає з формул (6) та (12). Нехай нерівності (11) виконуються для деякого $s = p$. Використовуючи формули (6), умови (2), оцінку (12), отримаємо

$$Q^{(p+2)}_k \geq 1 + a_{k+1,k} + a_{k,k+1} + \frac{a_{k+1,k+1}}{Q^{(p-1)}_{k+1}} \geq 1 + a_{k+1,k} + a_{k,k+1} \geq 1.$$

Отже, нерівність (11) справджується для всіх $p = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots$.

Покажемо, що за умов теореми виконуються нерівності (9). Для цього розглянемо формулу різниці (7) для $n = 4p + 1 + 2k$ і $m = 4p + 1$, $p = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots,$ та подамо її у вигляді

$$f_{4p+1+2k} - f_{4p+1} = \Phi^{(4p+1+2k)}_0 - \Phi^{(4p+1)}_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^{2i-1} \prod_{j=1}^{2i-1} \frac{a_{jj}(\Phi^{(4(p-i)+3+2k)}_{2i-1} - \Phi^{(4(p-i)+3)}_{2i-1})}{Q^{(4p+1+2k-2j)}_j Q^{(4p+1-2j)}_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^{2i} \prod_{j=1}^{2i} \frac{a_{jj}(\Phi^{(4(p-i)+1+2k)}_{2i} - \Phi^{(4(p-i)+1)}_{2i})}{Q^{(4p+1+2k-2j)}_j Q^{(4p+1-2j)}_j} +$$

$$+(-1)^{2p}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}a_{jj}}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}Q_j^{(4p+1+2k-2j)}\prod\limits_{j=1}^{2p}Q_j^{(4p+1-2j)}}.$$

Оскільки для $p>m$, $p,m=1,2,\ldots$, $i=0,1,\ldots$,
$\Phi_i^{(p)}-\Phi_i^{(m)}=$

$$=(-1)^{m+[\frac{m+1}{2}]}\left\{\frac{\prod\limits_{l=1}^{m+1}a_{i+l,i}}{\prod\limits_{l=1}^{m+1}Q_{i+l,i}^{(p-l)}\prod\limits_{l=1}^{m}Q_{i+l,i}^{(m-l)}}+\frac{\prod\limits_{l=1}^{m+1}a_{i,i+l}}{\prod\limits_{l=1}^{m+1}Q_{i,i+l}^{(p-l)}\prod\limits_{l=1}^{m}Q_{i,i+l}^{(m-l)}}\right\},\qquad(13)$$

то, враховуючи додатність усіх залишків $Q_{i+l,i}^{(p)}$, $Q_{i,i+l}^{(p)}$, $i=0,1,\ldots,l=1,2,\ldots,p=0,1,\ldots$, що випливає з оцінок (10), дістаємо

$$\Phi_i^{(4(p-i)+1+2k)}-\Phi_i^{(4(p-i)+1)}\geq 0,\quad \Phi_i^{(4(p-i)+3+2k)}-\Phi_i^{(4(p-i)+3)}\leq 0,$$

де $p=0,1,2,\ldots,k=1,2,\ldots,i=0,1,\ldots$. Отже, $f_{4p+1+2k}-f_{4p+1}\geq 0$ і

$$f_1\leq f_5\leq\ldots\leq f_{4p-3}\leq f_{4p+1}.$$

Таким чином, послідовність $\{f_{4p+1}\}$ є неспадною.

Аналогічно встановимо, що послідовність $\{f_{4p+3}\}$ є незростаючою. Розглянемо формулу різниці (7) для $n=4p+3+2k$, $m=4p+3$, $p=0,1,2,\ldots,k=1,2,\ldots$, та подамо її у вигляді

$$f_{4p+3+2k}-f_{4p+3}=\Phi_0^{(4p+3+2k)}-\Phi_0^{(4p+3)}+$$
$$+\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{2i-1}\prod_{j=1}^{i}\frac{a_{jj}(\Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+5+2k)}-\Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+5)})}{Q_j^{(4p+3+2k-2j)}Q_j^{(4p+3-2j)}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{2i}\prod_{j=1}^{i}\frac{a_{jj}(\Phi_{2i}^{(4(p-i)+3+2k)}-\Phi_{2i}^{(4(p-i)+3)})}{Q_j^{(4p+3+2k-2j)}Q_j^{(4p+3-2j)}}+$$
$$+(-1)^{2p+1}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+2}a_{jj}}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}Q_j^{(4p+3+2k-2j)}\prod\limits_{j=1}^{2p}Q_j^{(4p+3-2j)}}.$$

З формули (13) одержуємо, що $f_{4p+3+2k}\leq f_{4p+3}$, а, отже,

$$f_3\geq f_7\geq\ldots\geq f_{4p-1}\geq f_{4p+3}\geq\ldots,$$

що доводить монотонність послідовності $\{f_{4p+3}\}$. Крім того,

$$f_{4p+1} \geq f_1 = a_{1,0} + a_{0,1}, \quad f_{4p+3} \leq f_3 \leq \Phi_0^{(3)} + a_{1,1},$$

тому послідовності $\{f_{4p+1}\}$, $\{f_{4p+3}\}$ є обмеженими, що забезпечує їхню збіжність. Із того, що $f_{4q+3} - f_{4p+1} \geq 0$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$, випливає властивість „вилки" вигляду (9) для послідовності підхідних дробів непарного порядку ДНД (1). Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо для елементів ДНД* (1) *виконуються умови* (2) *і оцінки*

$$a_{k+2i,k} < 1, \quad a_{k,k+2i} < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

то для фігурних підхідних дробів вигляду (3) *ДНД* (1) *справджуються нерівності*

$$f_{4p} \leq f_{4p+1} \leq f_{4p+4} \leq f_{4p+5} \leq f_{4q+7} \leq f_{4q+6} \leq f_{4q+3} \leq f_{4q+2}, \tag{15}$$

$p, q = 0, 1, \ldots,$ *а послідовності* $\{f_p\}, p = 0, 1, 4, 5, \ldots, 4l, 4l+1, \ldots, l = 0, 1, \ldots$ *та* $\{f_q\}, q = 2, 3, 6, 7, \ldots, 4l+2, 4l+3, \ldots, l = 0, 1, \ldots$ *є збіжними.*

Доведення. Для залишків $Q_{i+k,i}^{(p)}$, $Q_{i,i+k}^{(p)}$, $i, p = 0, 1, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, підхідних дробів непарного порядку ДНД (1) виконуються оцінки (10), бо з умов (14) випливають умови (8).

Для залишків $Q_{i+k,i}^{(p)}$, $Q_{i,i+k}^{(p)}$, $i, p = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots$, підхідних дробів парного порядку ДНД (1) справджуються нерівності

$$\begin{gathered} 1 - a_{k+2i,k} \leq Q_{k+2i-1,k}^{(2s+1)} \leq 1, \quad 1 - a_{k,k+2i} \leq Q_{k,k+2i-1}^{(2s+1)} \leq 1, \\ 1 + a_{k+2i+1,k} \leq Q_{k+2i,k}^{(2s)} \leq 1 + \frac{a_{k+2i+1,k}}{1 - a_{k+2i+2,k}}, \\ 1 + a_{k,k+2i+1} \leq Q_{k,k+2i}^{(2s)} \leq 1 + \frac{a_{k,k+2i+1}}{1 - a_{k,k+2i+2}}, \end{gathered} \tag{16}$$

та нерівності

$$Q_i^{(2s)} \geq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

які встановлюються за допомогою методу математичної індукції аналогічно, як у теоремі 1 для залишків підхідних дробів непарного порядку ДНД (1).

Покажемо, що за умов теореми виконуються нерівності (15). Для цього оцінимо такі різниці між підхідними дробами ДНД (1):

$$f_{4p+k} - f_{4p}, \quad f_{4p+1+k} - f_{4p+1}, \quad f_{4p+2+k} - f_{4p+2}, \quad f_{4p+3+k} - f_{4p+3},$$

де $k = 0, 1, \ldots, p = 1, 2, \ldots$. Формулу різниці (7) подамо у вигляді
$f_{4p+k} - f_{4p} = \Phi_0^{(4p+k)} - \Phi_0^{(4p)} +$

$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{2i-1}\prod_{j=1}^{2i-1}\frac{a_{jj}(\Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+2+k)} - \Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+2)})}{Q_j^{(4p+k-2j)}Q_j^{(4p-2j)}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{2i}\prod_{j=1}^{2i}\frac{a_{jj}(\Phi_{2i}^{(4(p-i)+k)} - \Phi_{2i}^{(4(p-i))})}{Q_j^{(4p+k-2j)}Q_j^{(4p-2j)}}+$$

$$+(-1)^{2p}\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1} a_{jj}}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1} Q_j^{(4p+k-2j)} \prod\limits_{j=1}^{2p} Q_j^{(4p-2j)}} \cdot \gamma_k,$$

де $\gamma_k = 0$, якщо $k = 1$, $\gamma_k = 1$, якщо $k > 1$.

Аналізуючи формулу (13) та використовуючи оцінки для залишків (10), (11), (16), (17), одержимо, що

$$\Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+2+k)} - \Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+2)} \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi_{2i}^{(4(p-i)+k)} - \Phi_{2i}^{(4(p-i))} \geq 0, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

$k = 1, 2, 3, \;\; p = 0, 1, 2, \ldots$. Отже, $f_{4p+k} - f_{4p} \geq 0$ для $k = 1, 2, 3$.

Аналогічно встановлюємо такі нерівності

$$f_{4p+1+k} - f_{4p+1} \geq 0, \quad f_{4p+2+k} - f_{4p+2} \leq 0, \quad f_{4p+3+k} - f_{4p+3} \leq 0,$$

де $p = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, 3$. З проведених досліджень випливають нерівності (15).

Зі збіжності послідовностей $\{f_{4p+1}\}$, $\{f_{4q+3}\}$, $p, q = 0, 1, \ldots$, та властивості „вилки“ (9), випливає збіжність послідовностей підхідних дробів $\{f_k\}$, де $k = 0, 1, 4, 5, \ldots, 4p, 4p+1, \ldots$, та $\{f_m\}$, $m = 2, 3, 6, 7, \ldots, 4q+2, 4q+3, \ldots$. Теорему доведено.

Теорема 3. *Якщо елементи ДНД* (1) *задовольняють умови* (2) *та оцінки*

$$a_{i+2k,i} > 1 + a_{i+2k-1,i},\; a_{i,i+2k} > 1 + a_{i,i+2k-1},\; i = 0, 1, \ldots,\; k = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$$1+\Phi_i^{(2)}=1-\frac{a_{i+1,i}}{a_{i+2,i}-1}-\frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i+2}-1}>0,\quad i=1,2,\dots, \tag{19}$$

$$\Phi_{i-1}^{(2)}+a_{i,i}\le 0, \Phi_{i-1}^{(4)}\left(1+\Phi_i^{(2)}+a_{i+1,i+1}\right)+a_{i,i}\le 0,\quad i=2,3,\dots, \tag{20}$$

то для підхідних дробів парного порядку ДНД (1) *справджуються нерівності*

$$f_{4p-2}\le f_{4p+2}\le f_{4q+4}\le f_{4q}, \tag{21}$$

де $p,q=1,2,\dots$, *а послідовності* $\{f_{4p-2}\},\{f_{4p}\}$ *є збіжними.*

Доведення. Покажемо спочатку, що

$$\begin{gathered}Q^{(2s+1)}_{i+2k-1,i}\le 1-a_{i+2k,i},\quad Q^{(2s+1)}_{i,i+2k-1}\le 1-a_{i,i+2k},\\ 0<Q^{(2s)}_{i+2k,i}\le 1,\quad 0<Q^{(2s)}_{i,i+2k}\le 1,\end{gathered} \tag{22}$$

де $i=0,1,\dots$, $k=1,2,\dots$, $s=0,1,\dots$. Оскільки $Q^{(0)}_{i+2k,i}=Q^{(0)}_{i,i+2k}=1$,

$$Q^{(1)}_{i+2k-1,i}=1-a_{i+2k,i}<0,\quad Q^{(1)}_{i,i+2k-1}=1-a_{i,i+2k}<0,$$

то оцінки (22) правильні для $s=0,k=1,2,\dots$. Припустимо, що нерівності (22) виконуються для деякого $s=p\ge 0$. Тоді враховуючи умови (18), отримаємо

$$Q^{(2p+1)}_{i+2k-1,i}=1-\frac{a_{i+2k,i}}{Q^{(2p)}_{i+2k,i}}\le 1-a_{i+2k,i}<0,$$

$$1\ge Q^{(2p)}_{i+2k-2,i}=1+\frac{a_{i+2k-1,i}}{Q^{(2p+1)}_{i+2k-1,i}}=1-\frac{a_{i+2k-1,i}}{|Q^{(2p+1)}_{i+2k-1,i}|}\ge 1-\frac{a_{i+2k-1,i}}{a_{i+2k,i}-1}>0.$$

Аналогічно,

$$Q^{(2p+1)}_{i,i+2k-1}\le 1-a_{i,i+2k}<0,\quad 1\ge Q^{(2p)}_{i,i+2k-2}\ge 1-\frac{a_{i,i+2k-1}}{a_{i,i+2k}-1}>0.$$

Отже, оцінки (22) правильні і для $s=p+1$. Використовуючи формулу (13) та нерівності (22), дістаємо, що

$$\Phi_i^{(4p+2n)}-\Phi_i^{(4p)}\le 0,\quad \Phi_i^{(4p+2+2n)}-\Phi_i^{(4p+2)}\ge 0, \tag{23}$$

де $i=0,1,\dots$, $p=0,1,\dots$, $n=1,2,\dots$. Оцінимо тепер залишки $Q_i^{(2p)}$, $i=1,2,\dots$, $p=0,1,\dots$. Враховуючи умови (19) та нерівності (23), дістаємо

$$1\ge Q_i^{(2)}=1+\Phi_i^{(2)}+a_{i+1,i+1}>0,\quad i=1,2,\dots. \tag{24}$$

Переконаємось у правильності нерівностей

$$Q_i^{(2p)} > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots . \tag{25}$$

Як було встановлено вище, оцінка (25) справджується для $p = 0, 1$. Припустимо, що вона виконується для деякого значення p. Тоді

$$Q_i^{(2p+2)} = 1 + \Phi_i^{(2p+2)} + \frac{a_{i+1,i+1}}{Q_i^{(2p)}} \geq 1 + \Phi_i^{(2p+2)} > 1 + \Phi_i^{(2)} > 0,$$

отже, оцінка (25) справджується і для $p + 1$. Розглянемо різницю

$$f_{4p+4} - f_{4p} = \Phi_0^{(4p+4)} - \Phi_0^{(4p)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^{2i-1} \prod_{j=1}^{2i-1} \frac{a_{j,j}}{Q_j^{(4p+4-2j)} Q_j^{(4p-2j)}} \left(\Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+6)} - \Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+2)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{2i} \prod_{j=1}^{2i} \frac{a_{j,j}}{Q_j^{(4p+4-2j)} Q_j^{(4p-2j)}} \left(\Phi_{2i}^{(4(p-i)+4)} - \Phi_{2i}^{4(p-i)} \right) +$$

$$+ (-1)^{2p} \prod_{j=1}^{2p} \frac{a_{j,j}}{Q_j^{(4p+4-2j)} Q_j^{(4p-2j)}} \left(\Phi_{2p}^{(4)} + \frac{a_{2p+1,2p+1}}{Q_{2p+1}^{(2)}} \right), \ \ p = 1, 2, \ldots .$$

Враховуючи умову (20) та оцінки (24), (25), одержимо

$$\Phi_{2p}^{(4)} + \frac{a_{2p+1,2p+1}}{Q_{2p+1}^{(2)}} = \Phi_{2p}^{(4)} + \frac{a_{2p+1,2p+1}}{1 + \Phi_{2p+1}^{(2)} + a_{2p+2,2p+2}} \leq 0.$$

Крім того,

$$\Phi_0^{(4p+4)} - \Phi_0^{(4p)} \leq 0, \ \ p = 1, 2, \ldots ,$$

$$\Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+6)} - \Phi_{2i-1}^{(4(p-i)+2)} \geq 0, \ \ \Phi_{2i}^{(4(p-i)+4)} - \Phi_{2i}^{4(p-i)} \leq 0,$$

де $i = 1, 2, \ldots$, $p = 1, 2, \ldots$. Тому

$$f_{4p+4} - f_{4p} \leq 0, \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Зауважимо, що у випадку виконання умови (20) для $i = 1$, матимемо

$$f_4 = \Phi_0^{(4)} + \frac{a_{1,1}}{1 + \Phi_1^{(2)} + a_{2,2}} \leq 0. \tag{27}$$

Міркуючи аналогічно, дістаємо, що

$$f_{4p+2} - f_{4p} \leq 0, f_{4p+4} - f_{4p+2} \geq 0, f_{4p+6} - f_{4p+2} \geq 0, \quad p = 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

З нерівностей (28) випливає, що

$$f_2 \le f_6 \le \ldots \le f_{4p+2} \le \ldots \le f_{4q} \le f_8 \le f_4, \quad p = 0, 1, \ldots, q = 1, 2, \ldots,$$

а, отже, послідовності $\{f_{4q-2}\}$, $\{f_{4q}\}$, $q = 1, 2, \ldots$, є збіжними.

Теорему доведено.

Теорема 4. *Якщо елементи ДНД* (1) *задовольняють умови* (2), (8), (18), (19), (20), *причому умови* (20) *виконуються і для* $i = 1$, $a_{1,0}+a_{0,1} \neq 0$, *то ДНД* (1) *розбігається.*

Ця теорема є наслідком теорем 1 і 3. Дійсно, за теоремою 1,

$$a_{1,0} + a_{0,1} = f_1 \le f_{4q+1} \le f_3, \quad q = 1, 2, \ldots ,$$

$$\lim_{q\to\infty} f_{4q+1} \ge f_1 = a_{1,0} + a_{0,1} > 0,$$

а за теоремою 3,

$$f_{4q} \le f_0 = 0, \quad \lim_{q\to\infty} f_{4q} \le 0.$$

Отже, $\lim\limits_{q\to\infty} f_{4q} \neq \lim\limits_{q\to\infty} f_{4q+1}$, $q = 1, 2, \ldots$.

Приклад. Нехай елементи ДНД (1) є такими:

$$a_{i+2k+1,i} = a_{i,i+2k+1} = 2k + 1, \quad k = 0, 1, \ldots , i = 0, 1, \ldots ,$$

$$a_{i+2k,i} = 2k + \alpha_{1,i}, \quad a_{i,i+2k} = 2k + \alpha_{2,i}, \quad k = 1, 2, \ldots , i = 0, 1, \ldots ,$$

де всі числа $\alpha_{p,i}$, $p = 1, 2$, $i = 0, 1, \ldots$, задовольняють умови

$$\alpha_{p,i} \in [1,5; 2), \quad p = 1, 2, \quad i = 0, 1, \ldots , \quad a_{i,i} = 0,05, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Перевіримо виконання умов теореми 4. Маємо

$$\frac{a_{i+2k,i}}{1 + a_{i+2k+1,i}} = \frac{2k + \alpha_{1,i}}{2k + 2} < 1, \quad \frac{a_{i,i+2k}}{1 + a_{i,i+2k+1}} = \frac{2k + \alpha_{2,i}}{2k + 2} < 1,$$

$$a_{i+2k,i} - 1 - a_{i+2k-1,i} = 2k + \alpha_{1,i} - 1 - 2k + 1 = \alpha_{1,i} > 0,$$

$$a_{i,i+2k} - 1 - a_{i,i+2k-1} = \alpha_{2,i} > 0,$$

$$1 + \Phi_i^{(2)} = 1 - \frac{a_{i+1,i}}{a_{i+2,i} - 1} - \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i+2} - 1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \alpha_{1,i}} - \frac{1}{1 + \alpha_{2,i}} \ge 1 - \frac{2}{2,5} = \frac{1}{5} > 0,$$

тобто умови (8), (18), (19) виконуються для всіх $i = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots$. Далі обчислимо

$$\Phi_i^{(4)} = \frac{\alpha_{1,i}}{-\alpha_{1,i}^2 - 4\alpha_{1,i} - 6} + \frac{\alpha_{2,i}}{-\alpha_{2,i}^2 - 4\alpha_{2,i} - 6} < 0\,.$$

Оскільки функція $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4x + 6}$ монотонно зростає на проміжку $[1,5; 2)$, бо $F'(x) = \dfrac{6 - x^2}{(x^2 + 4x + 6)^2} > 0$, $x \in [1,5; 2)$, то

$$|\Phi_i^{(4)}| \geq 2 \cdot \frac{1,5}{2,25 + 12} = \frac{12}{57}\,.$$

Умови (20) можна записати у вигляді

$$a_{i,i} \leq |\Phi_{i-1}^{(2)}|, \quad a_{i,i} \leq |\Phi_{i-1}^{(4)}| \cdot \left(1 + \Phi_i^{(2)} + a_{i+1,i+1}\right).$$

Оскільки

$$|\Phi_{i-1}^{(2)}| = \left|\frac{1}{1 + \alpha_{1,i}} + \frac{1}{1 + \alpha_{2,i}}\right| > \frac{2}{3} > \frac{1}{20} = a_{i,i},$$

то

$$|\Phi_{i-1}^{(4)}| \cdot \left(1 + \Phi_i^{(2)} + a_{i+1,i+1}\right) \geq \frac{12}{57}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) = \frac{3}{57} > \frac{1}{20}.$$

Отже, і умови (20) виконуються для всіх $i = 1, 2, \ldots$. Оскільки елементи ДНД (1) задовольняють всі умови теореми 4, то даний дріб є розбіжним.

[1] *Антонова Т.М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 11–15.

[2] *Антонова Т.М., Гладун В.Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 27–35.

[3] *Антонова Т.М., Сусь О.М.* Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 4–9.

[4] *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.

[5] *Гладун В.Р.* Ознаки збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками //Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 16–26.

[6] *Кучмінська Х.Й.* Про збіжність двовимірних неперервних дробів // Теорія наближення і застосування. Праці Ін-ту математики НАН України. – 2000. – Т. 31. – С. 282–296.

[7] *Кучмінська Х.Й., Сусь О.М., Возна С.М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.

[8] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued fractions with applications. – Amsterdam: Noth Holland, 1992. – 606 p.

[9] *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. – Stuttgart: Teubner, 1957. – Bd. 2. – 524 s.

ON THE PROPERTIES OF SEQUENCE OF FIGURE APPROXIMANTS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS SPECIAL FORM WITH REAL ELEMENTS

Tamara ANTONOVA[1], *Ol'ha SUS'*[2]

[1]Lviv Polytechnic National University,
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine
[2]Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

Sufficient conditions of monotonicity, boundedness and convergence for sequences of figure approximants of two-dimensional continued fractions of special form with real elements are established. The example of the divergent two-dimensional continued fraction is given.