ЕРГОДИЧНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ: ПОРЯДОК ТА ХАОС

©2005 р. Микола БОГОЛЮБОВ (мол.) [1],
Анатолій ПРИКАРПАТСЬКИЙ [2],
Микола ПРИТУЛА [3]

[1] Математичний інститут ім. В.Стєклова РАН,
Москва 117966, Росія,
[2] Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79601, Україна,
[2] АГМ-Університет Науки та Технологій, Краків 30059, Польща,
[3] Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79602, Україна

Редакція отримала статтю 8 лютого 2005 р.

У статті подано короткий огляд деяких основних результатів про ергодичні властивості дискретних динамічних систем та їх застосування до опису явищ динамічного хаосу та порядку в природі.

1. Нехай M^n — деякий топологічний простір розмірності $\dim M^n = n \in \mathbb{Z}_+$, наділений ймовірнісною мірою Лебега μ, $\mu(M) = 1$, а на ньому певне відображення: $\psi : M \to M$.

Говоритимемо [2, 3], що відображення $\psi : M \to M$ задає дискретну динамічну систему, якщо $\mu(A) = \mu(\psi^{-1}A)$ для кожної μ-вимірної підмножини $A \subset M$, тобто відображення зберігає міру підмножин в M.

Означення 1. *Динамічна система $\psi\colon M \to M$ називається ергодичною, якщо для довільних μ-вимірних множин $A, B \subset M$ існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap \psi^{-n}(B)) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

УДК 517.946, 519.63; MSC 2000: 37–01

Означення 2. *Динамічна система $\psi : M \to M$ називається перемішуванням, якщо існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap \psi^{-n}(B)) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

для всіх μ-вимірних множин $A, B \subset M$.

Очевидно, що кожне перемішування $\psi : M \to M$ є ергодичним, але не навпаки. Для динамічних систем на M існують так звані *спектральні інваріанти*, які визначаються за допомогою оператора $U_\psi : L_2^{(\mu)} \to L_2^{(\mu)}$ такого, що

$$U_\psi f(x) := f(\psi(x)), \quad x \in M,$$

для будь-якої функції $f \in L_2^{(\mu)}(M)$. Очевидно, що для всіх $f, g \in L_2^{(\mu)}(M)$

$$(U_\psi f, U_\psi g) = (f, g),$$

тобто $U_\psi : L_2^{(\mu)}(M) \to L_2^{(\mu)}(M)$ є ізометрією.

Справедливий [2] такий критерій.

Теорема 1. (Купман В.) *Динамічна система $\psi : M \to M$ є ергодичною тоді і тільки тоді, коли $\lambda = 1 \in \sigma(U_\psi)$ є простим власним значенням оператора $U_\psi : L_2^{(\mu)}(M) \to L_2^{(\mu)}(M)$.*

Якщо динамічна система $\psi : M \to M$ є перемішуванням, то справедлива така теорема.

Теорема 2. *Динамічна система $\psi : M \to M$ є перемішуванням, якщо $\lambda = 1 \in \sigma(U_\psi)$ є її единим власним значенням.*

Корисним є наступне означення (див. [2]).

Означення 3. *Нехай у просторі $L_2^\mu(M)$ можна вибрати такий повний ортонормований базис $f_{i,j} \in L_2^{(\mu)}(M)$, $i \in I$, $j \in \mathbb{Z}$, що для унітарного оператора $U_\psi : L_2^{(\mu)} \to L_2^{(\mu)}$ для всіх $i \in I, j \in \mathbb{Z}$, виконуються умови*

$$U_\psi f_{i,j} = f_{i,j+1}.$$

Тоді кажуть, що динамічна система $\psi : M \to M$ має лебегівський спектр кратності $\dim I$.

При цьому, за теоремою Стоуна, вираз

$$U_\psi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\lambda} dE(\lambda)$$

є спектральним розвиненням оператора $U_\psi : L_2^{(\mu)}(M) \to L_2^{(\mu)}(M)$, до того ж, спектральна міра $(f, E(\lambda)f)$ є абсолютно неперервною за мірою Лебега для кожної функції $f \in L_2^{(\mu)}(M)$ такої, що $(f, 1) = 0$.

Справедливе [2] наступне твердження про динамічні системи із лебегівським спектром.

Твердження 1. *Нехай динамічна система $\psi : M \to M$ має лебегівський спектр. Тоді вона є перемішуванням, а отже, й ергодичною динамічною системою.*

2. Якщо динамічна система $\psi : M \to M$ є ергодичною, то легко встановити, що єдиними інваріантними підмножинами в M є тільки M або $\emptyset$. Окрім цього, завжди існує границя майже всюди за мірою μ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\psi^k x) = f^*(x),$$

причому $f^* = \overline{f}$ майже всюди (тут $\overline{f} := \int_M f(x)d\mu(x)$ — середнє значення функції $f \in L_2^{(\mu)}(M)$). Це означає, що функція $f^* : M \to \mathbb{R}$ є майже всюди константою, рівною $\overline{f} \in \mathbb{R}$. Це твердження становить зміст класичної теореми Біркгофа–Хінчина, яка має багато застосувань [1, 4] в різних науках, від чистої математики до біології.

Перейдемо до деяких застосувань теореми Біркгофа–Хінчина. Спочатку сформулюємо наступні твердження.

Твердження 2. *Динамічна система $\psi : M \to M$ є ергодичною тоді і тільки тоді, коли „час“ перебування траєкторії $\{\psi^n x : n = \overline{0, N}\}$, яка виходить з довільної точки $x \in M$, у довільній μ-вимірній підмножині $A \subset M$ є пропорційним при $N \to \infty$ до міри $\mu(A)$ цієї множини, тобто для майже всіх точок $x \in M$*

$$\exists \lim_{N\to\infty} \frac{\tau_\psi(N; A|x)}{N} = \mu(A),$$

де $\tau_\psi(N; A|x) := \operatorname{card}\{n \in \{\overline{0, N}\},\ \psi^n x \in A\}$.

Лема 1. (Данжуа) *Динамічна система $\psi : x \to x + \alpha (\mathrm{mod}\ 1)$ є ергодичною, якщо $\alpha \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$.*

Доведення. Нехай $\alpha \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$. Припустимо, що множина $A \subseteq [0, 1)$ є інваріантною. Доведемо, що $A = [0, 1)$. Оскільки $\mu(A) > 0$, то існує точка згущення $x_0 \in \overline{A}$, така, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\varepsilon = (x_0 - \delta_\varepsilon,\ x_0 + \delta_\varepsilon) \quad \mu(A \cap I_\varepsilon) \geq (1 - \varepsilon)\mu(I_\varepsilon).$$

Оскільки множина $A \subseteq [0,1)$ є інваріантною, то

$$\mu(A \cap \psi^{-n} I_\varepsilon) \geq \mu(\psi^{-n} I_\varepsilon)(1-\varepsilon).$$

Якщо тепер числа $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+$ є такими, що відрізки $\psi^{-n_i} I_\varepsilon,\ i = \overline{1,k}$, не перетинаються, то

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{k} \mu(A \cap \psi^{-n_i} I_\varepsilon) \geq (1-\varepsilon)\mu\left(\sum_{i=1}^{k} \psi^{-n_i} I_\varepsilon\right).$$

Оскільки $\mu(I_\varepsilon) \leq 2\delta_\varepsilon$, то існують числа $n_i,\ i = \overline{1,k}$, такі, що множини $\psi^{-n_i} I_\varepsilon,\ i = \overline{1,k}$, не перетинаються і покривають проміжок $[0,1)$ з точністю до 2ε. Отже,

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{k} \psi^{-n_i} I_\varepsilon\right) \geq 1 - 2\varepsilon,$$

звідки отримуємо, що $\mu(A) \geq (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)$. Оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, то $\mu(A) = 1$ і, отже, динамічна система $\psi : [0,1) \to [0,1)$ є ергодичною.

2. Приклад 1. Розподіл перших цифр у десятковому записі чисел 2^n, $n \in \mathbb{Z}_+$. Десятковий запис числа 2^n має вигляд:

$$2^n = k_n \cdot 10^{r_n} + l_n \cdot 10^{r_n - l} + \ldots, \quad \text{де} \quad 0 < k_n \leq 9, \quad 0 \leq l_n \leq 9.$$

Першою цифрою числа 2^n буде, очевидно, k_n тоді і тільки тоді, коли

$$k_n \cdot 10^{r_n} \leq 2^n < (k_n + 1) \cdot 10^{r_n},$$

або

$$r_n + \log_{10} k_n \leq n \log_{10} 2 \leq r_n + \log_{10}(k_n + 1).$$

Нехай $\alpha := \log_{10} 2$, і $\{n\alpha\}$ — дробова частина числа $n\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді отримуємо, що

$$\log_{10} k_n \leq \{n\alpha\} < \log_{10}(k_n + 1).$$

Але, оскільки $\alpha \in \mathbb{R}_+$ є ірраціональним числом, то, за лемою Данжуа, динамічна система $\psi : x \to x + \alpha \pmod 1$, $x \in [0,1) \simeq \mathbb{S}^1$, є ергодичною. Отже, послідовність чисел $\{\{n\alpha\} : n \in \mathbb{Z}_+\}$ є рівномірно розподіленою на проміжку $[0,1)$. Зокрема, якщо взяти $A := [\log_{10} k,\ \log_{10}(k+1)]$, то

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\tau_\psi(N; A|x)}{N} = \mu(A) = \log_{10}(k+1) - \log_{10} k =$$

$$= \log_{10} \frac{k+1}{k} = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Таким чином, частка цілих чисел у послідовності $\{2^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, десятковий запис яких розпочинається з цифри $k = \overline{1,9}$, дорівнює $\log_{10}(1 + \frac{1}{k})$, доля сімок — $P_7 = \log_{10}(1 + \frac{1}{7})$, а вісімок — $P_8 = \log_{10}(1 + \frac{1}{8})$, звідки бачимо, що сімок є в $P_7/P_8 = \log_{\frac{8}{7}} \frac{9}{8}$ раз більше, ніж вісімок.

Приклад 2. Розглянемо відображення Гаусса $\psi : x = \{1/x\}$, $x \in (0,1] := M$. Нехай $a_n(x) := [1/\psi^n x]$ — ціла частина числа $1/\psi^n x \in (0,1]$. Тоді для числа $x \in (0,1]$ існує розвинення у відповідний ланцюговий (неперервний) дріб

$$x = \frac{1}{a_1(x) + \frac{1}{a_2(x) + \frac{1}{a_3(x) + \dots}}} := [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots].$$

На $M = (0,1]$ існує інваріантна міра Гаусса-Лебега така, що

$$\mu(A) := \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{dx}{1+x}, \quad A \subset (0,1],$$

відносно якої відображення Гаусса $\psi : (0,1] \to (0,1]$ є ергодичним, тобто $\mu(\psi^{-1}A) = \mu(A)$ для довільної $A \subset (0,1]$. Якщо для $x \in (0,1]$ визначити числа $p_n(x)/q_n(x) = [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)]$, то на основі теореми про ергодичність відображення $\psi : (0,1] \to (0,1]$ можна встановити [3], що існують границі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln q_n(x)}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j(x)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+a)}\right)^{\frac{\ln k}{\ln 2}}.$$

Приклад 3. Розглянемо на $M := [0,1]$ відображення

$$\psi : x \to 4x(1-x), \quad x \in M.$$

Це відображення володіє інваріантною мірою Улама-Лебега

$$\mu(A) = \frac{2}{\pi} \int_A \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

для кожної підмножини $A \subset [0,1]$, вимірної за лебеговою мірою dx на $[0,1]$, і відносно якої динамічна система $\psi : M \to M$ є ергодичною. Це означає, що для довільної $f \in L_1(M)$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\psi^k x).$$

Приклад 4. Відображення

$$\psi : x \to \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

на відрізку $M := [0,1]$, є також ергодичним відносно звичайної міри Лебега dx на $[0,1]$, тобто для довільної функції $f \in L_1(0,1)$

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\psi^k x).$$

Приклад 5. Нехай $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — деякий гомеоморфізм, що зберігає орієнтацію на $\mathbb{S}^1 \simeq [0,1)$.

Означення 4. *Гомеоморфізм $\hat{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ліфтом гомеоморфізму $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, якщо $\psi(\pi(x)) = \pi(\hat{\psi})$ для кожного $x \in \mathbb{R}$.*

Означення 5. *Трансляційним числом точки $x \in \mathbb{R}$ при відображенні $\hat{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається вираз*

$$\tau(x;\hat{\psi}) := \lim_{n\to\infty}\frac{\hat{\psi}^n(x) - x}{n}.$$

Теорема 3. *Нехай $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — гомеоморфізм, який зберігає орієнтацію, і нехай $\hat{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — його ліфт. Тоді*

i) число $\tau(x;\hat{\psi})$ існує для довільного $x \in \mathbb{R}$;

ii) $\tau(x;\hat{\psi}^m) = m\tau(x;\hat{\psi})$ для всіх $m \in \mathbb{Z}$;

iii) $\tau(x;\hat{\psi} + m) = \tau(x;\hat{\psi}) + m$ для всіх $m \in \mathbb{Z}$;

iv) число $\tau(x;\hat{\psi}) := \tau(\hat{\psi})$ не залежить від вибору точки $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Нехай $\tau(\hat{\psi})$ є трансляційним числом відображення $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Тоді*

i) $\tau(\hat{\psi}) = 0$ тоді і тільки тоді, коли відображення $\hat{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має нерухому точку;

ii) $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ має нерухому точку тоді і тільки тоді, коли $\tau(\hat{\psi}) \in \mathbb{Z}$;

iii) $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *має періодичну точку періоду* $q \in \mathbb{Z}_+$ *тоді і тільки тоді, коли* $\tau(\hat{\psi}) = p/q \in \mathbb{Q}$, *де* p/q *— нескоротний дріб.*

Наступне твердження [2] встановлює зв'язок між ліфтом $\hat{\psi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та ергодичністю відносно певної інваріантної міри μ на $\mathbb{S}^1$.

Теорема 5. *Якщо відображення* $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *— гомеоморфізм, який зберігає орієнтацію, то*

$$\tau(\hat{\psi}) = \int_{\mathbb{S}^1} [\hat{\psi}(x) - x] d\mu(x)$$

відносно довільної інваріантної ймовірнісної міри μ *на* $\mathbb{S}^1$.

Зауважимо тут, що ліва сторона виразу для $\tau(\hat{\psi})$ зовсім не залежить від вибору інваріантної міри μ на $\mathbb{S}^1$.

Доведення. Згідно з теоремою Біркгофа–Хінчина, існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{\hat{\psi}}(\hat{\psi}^k x) = \tau(x + \mathbb{Z};\ \hat{\psi}), \quad x \in \mathbb{R},$$

яка є інтегровною функцією на $\mathbb{S}^1$ (тут $\Delta_{\hat{\psi}} := \hat{\psi} - \mathrm{id}$), тобто,

$$\tau(\hat{\psi}) = \int_{\mathbb{S}^1} \tau(x;\ \hat{\psi}) d\mu(x) = \int_{\mathbb{S}^1} [\hat{\psi}(x) - x] d\mu(x),$$

оскільки $\tau(\hat{\psi}) \in \mathbb{R}$ не залежить від $x \in \mathbb{R}$.

Наступна теорема О.М. Шарковського [4] дає найбільш загальну можливу характеристику періодичних точок довільного неперервного відображення $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Теорема 6. *Нехай відображення* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *є неперервним. Тоді періоди точок цього відображення впорядковані наступним лексикографічним чином:*

$$1 \lhd 2 \lhd 4 \lhd 8 \cdots \lhd 2^n \lhd \cdots \lhd 5 \cdot 2^n \lhd 3 \cdot \lhd \cdots \lhd 7 \cdot 2^2 \lhd$$

$$\lhd 5 \cdot 2^2 \lhd 3 \cdot 2^2 \lhd \cdots \lhd 7 \cdot 2^1 \lhd 5 \cdot 2^1 \lhd 3 \cdot 2^1 \lhd \cdots \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3.$$

Тоді, якщо відображення $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *має цикл періоду* $n \in \mathbb{Z}_+$ *і* $k \lhd n$, *то воно має і цикли періоду* $k \in \mathbb{Z}_+$.

[1] *Боголюбов Н.Н.* Избранные труды: в 3-х т. – Т. 1. – К.: Наук. думка, 1969. – 644 с.

[2] *Каток А.Б., Хассельблат Б.* Введение в теорию динамических систем. – М.: Факториал, 2000. – 540 с.

[3] *Корнфельд Н.П., Синай Я.Г., Фомин С.В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 382 с.

[4] *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1986. – 280 с.

ERGODIC DYNAMICAL SYSTEMS: THE ORDER AND CHAOS

[1]*Mykola BOGOLYUBOV (jr.)*, [2]*Anatoliy PRYKARPATSKY*,
[3]*Mykola PRYTULA*

[1] Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow 117966, Russia,
[2] Pidstryhach Instytute of Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NASU, 3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine,
[2]AGH University of Science and Technology, Cracow 30059, Poland,
[3] Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79602, Ukraine

The article contains a short review of some principal results on the ergodic theory and their application to the description of dynamical chaos and order events in the nature.